**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1974**

УДК 532.546

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАЗИЛИЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ НЕДЕФОРМИРУЕМУЮ СРЕДУ

Л. К. ЦАБЕК

(*Москва*)

Проанализированы численные методы решения квазилинейной системы уравнений в частных производных, описывающей движение сорбируемой смеси газов (жидкостей) через состоящую из пористых зерен пористую насыщенную недеформируемую среду; получены условия сходимости итерационного процесса разностной схемы; найдены условия, при которых система допускает инвариантные решения типа бегущей волны; получены оценки времени и координаты, по истечении и прохождении которых решения краевой задачи становятся инвариантными.

1. Система квазилинейных уравнений, описывающих движение сорбируемой смеси газов (жидкостей), представляет собой уравнение непрерывности, модельное уравнение кинетики сорбции в пористых зернах и соответствующие начальные и граничные условия

$$\frac{1}{q_*}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 c}{\partial z^2},\qquad \gamma\frac{\partial q}{\partial t}=\omega(q^*)[c-\varphi(q)] \tag{1.1}$$

$$c|_{t=0}=c_0+(c^\circ-2c_0)\exp\left(\frac{z}{2\alpha}\right)\frac{\operatorname{sh}\lambda(b-z)}{\operatorname{sh}\lambda b},\qquad \lambda=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}\omega[f(c_0)]}$$

$$q|_{t=0}=f(c_0),\quad c_0, c^\circ=\text{const},\quad c|_{z=0}=F(t),\quad c|_{z=b}=c_0,\quad 0\leqslant z\leqslant b \tag{1.2}$$

$$F(0)=c^\circ-c_0,\quad q|_{z=0}=H(t),\quad H(0)=H_0,\quad \alpha+\gamma=1\quad (q_*\gg 1)$$

Здесь c — концентрация вещества (сорбата) в потоке газовой (жидкой) смеси, q — концентрация поглощенного вещества, u — фильтрационная линейная скорость потока,

$$\alpha=\tau_l(\tau_l+\tau_i)^{-1},\qquad \gamma=\tau_i(\tau_l+\tau_i)^{-1},\qquad t=t'(\tau_l+\tau_i)^{-1},$$

$$z=z'ku^{-1}(\tau_l+\tau_i)^{-1}\delta,\qquad \delta=(1-\sigma)/\sigma,\quad q^*=q/f(c),\quad f=\varphi^{-1},$$

$$\tau_i=(1+k)a^2(1+\nu)^{-1}(3+\nu)^{-1}D_i^{-1},\qquad \tau_l=[1+(1+k)\delta]Du^{-2}$$

z', t' — размерное время и координата, σ — доля свободного пространства недеформируемой пористой среды, α — относительный коэффициент продольного перемешивания, D — коэффициент продольного перемешивания (продольная дисперсия), $k=q^*/c^*$, q^*, c^* — максимальные равновесные концентрации, которые находятся из изотермы сорбции, D_i — коэффициент диффузии внутри узких каналов пористых зерен, $\omega(q)$ — функция заполнения пористого зерна, ν — параметр симметрии. Для соблюдения непрерывности решений начальное условие $c|_{t=0}$ найдено из системы (1.1).

Граничное условие $q|_{z=0}$ получим из решения обыкновенного уравнения методом Рунге — Кутта

$$\gamma H_t=\omega(H)[F(t)-\varphi(H)],\qquad H(0)=H_0 \tag{1.3}$$

Точное уравнение кинетики сорбции в пористых зернах представляет собой квазилинейное параболическое уравнение [1]. Из численного решения такого уравнения можно получить значения функции $\omega(q)$, как невязки в модельном уравнении кинетики (1.1). Функцию $\omega_0(q)$ для сорбции и $\omega^\circ(q)$ для десорбции запишем в виде

$$(1.4)\qquad \omega_0(q)=(q+\delta)^{-2}\left\{\sum_{n=1}^{3}\alpha_n(q+\delta)^n+a_4\exp[-a_5(1-q)]\right\}$$

$$(1.5)\qquad \omega^\circ(q)=(1-q+\delta_0)^{-2}\left\{\sum_{n=0}^{3}b_n(q-\delta_0)^n+b_4\exp(-b_2q)\right\},\quad 0\leqslant q\leqslant 1$$

причем коэффициенты a_n, b_n, δ, δ_0 могут быть найдены из точных численных значений функции $\omega(q)$ методом наименьших квадратов. Решение точной системы уравнений движения смеси через пористую среду для линейной изотермы получено в [1].

В статье рассмотрены решения модельных уравнений движения смеси через пористую среду (1.1) для нелинейной (произвольной) изотермы. В общем случае решения квазилинейной системы уравнений (1.1) могут быть получены только численно с помощью разностных схем [2]. Для получения консенвативной разностной схемы воспользуемся интегральной формой уравнений (1.1). После преобразований запишем неявную итерационную схему на шеститочечном шаблоне с весом 0.5 второго порядка точности, которую решать будем методом прогонки

$$(1.6)\qquad q^{(s+1)}{}_i^j = q^{(s)}{}_i^j + \theta\left\{\frac{\tau}{\gamma}\omega\,(q^{(s)}{}_i^{j-1/2})\,[c^{(s)}{}_i^{j-1/2} - \varphi\,(q^{(s)}{}_i^{j-1/2})] - q^{(s)}{}_i^j + q_i^{j-1}\right\},$$

$$1\leqslant i\leqslant N$$

$$c^{(s+1)}{}_i^j = A_{i+1}c^{(s+1)}{}_{i+1}^j + B_{i+1},\qquad 0\leqslant i\leqslant N-1$$

$$A_{i+1}=R\,(Q_i-PA_i)^{-1},\qquad B_{i+1}=(PB_i+F_i)\,(Q_i-PA_i)^{-1},\qquad A_1=0$$

$$(1.7)\qquad B_1=F(t),\quad P=\frac{\alpha}{h^2}+\frac{1}{2h},\quad R=\frac{\alpha}{h^2}-\frac{1}{2h},$$

$$Q_i=\frac{2\alpha}{h^2}+\frac{1}{\gamma}\,\omega\,(q^{(s+1)}{}_i^{j-1/2}),\qquad F_i=\frac{2}{\gamma}\,\omega\,(q^{(s+1)}{}_i^{j-1/2})\,\varphi\,(q^{(s+1)}{}_i^{j-1/2})+$$

$$+\frac{\alpha}{h^2}\,(c_{i-1}^{j-1}-2c_i^{j-1}+c_{i+1}^{j-1})-\frac{1}{2h}\,(c_{i+1}^{j-1}-c_{i-1}^{j-1})-\frac{1}{\gamma}\,c_i^{j-1}\omega\,(q^{(s+1)}{}_i^{j-1/2})$$

Консервативная схема (1.6), (1.7) удобна тем, что в такой схеме сквозной счет сходится в классе разрывных коэффициентов. Для определения условий сходимости итерационного процесса схемы (1.6), (1.7) запишем погрешность разностной схемы

$$(1.8)\qquad \varepsilon^{(s)}{}_i^j = c^{(s)}{}_i^j - c_i^j,\quad \xi^{(s)}{}_i^j = q^{(s)}{}_i^j - q_i^j$$

Из линеаризованной разностной схемы (1.6), (1.7) после преобразований получим

$$(1.9)\qquad A_{ik}\varepsilon^{(s+1)}{}_k^j = P\varepsilon^{(s+1)}{}_{i-1}^j - Q_i\varepsilon^{(s+1)}{}_i^j + R\varepsilon^{(s+1)}{}_{i+1}^j = B_{ik}\varepsilon^{(s)}{}_k^j$$

$$B_{ik}=A_{ik}\left[1-\theta\frac{\theta\tau}{2}\left(B+\frac{(1-c)}{2\gamma}\,\omega'\right)\right]-\frac{\theta\tau}{2\gamma}B\delta_{ik},$$

$$B=\frac{1}{\gamma}\left[(\omega\varphi)'-\frac{(1+c)}{2}\,\omega'\right]$$

Достаточным условием сходимости итерационного процесса является выполнение условий

$$\|B_{ik}\|<\|A_{ik}\| \tag{1.10}$$

где $\|B_{ik}\|$, $\|A_{ik}\|$ — нормы матриц B_{ik}, A_{ik} соответственно. После преобразований находим

$$\tau\leqslant\tau_1=\frac{2}{\theta}(2-\theta)\max\left\{\left| B+\frac{(1-c)}{\gamma}\omega'-\frac{B\omega}{\gamma A_0}\right|\right\}^{-1} \tag{1.11}$$

$$\tau\leqslant\tau_2=\frac{2\gamma}{\theta}(2-\theta)\max\{|(\omega\varphi)'|\}^{-1}$$

$$A_0=P+R+Q_i$$

Так как $A_0\sim 4\alpha h^{-2}$, то $\tau_1>\tau_2$ и поэтому шаг τ можно выбрать из второго условия (1.11). Можно показать, что при выполнении условий (1.11) разностная схема (1.6), (1.7) будет абсолютно устойчивой. В уравнениях (1.1) коэффициенты для процессов сорбции и десорбции различны: для сорбции $f\to f_0$, $\varphi\to\varphi_0$, $\omega\to\omega_0$, $\gamma\to\gamma_0$, для десорбции $f\to f^\circ$, $\varphi\to\varphi^\circ$, $\omega\to\omega^\circ$, $\gamma\to\gamma^\circ$. Для определения условий, при которых протекает сорбция или десорбция, используем неравенства

$$q_0^j>a_0q_0^{j-1},\qquad aq_0^j=q_0^{j-1} \tag{1.12}$$

$$a^\circ q_0^j<q_0^{j-1},\qquad a_0, a, a^\circ=\text{const} \tag{1.13}$$

$$c^{(s)}{}_i^{j-1/2}>a_0\varphi\left(q^{(s)}{}_i^{j-1/2}\right),\qquad ac^{(s)}{}_i^{j-1/2}=\varphi\left(q^{(s)}{}_i^{j-1/2}\right) \tag{1.14}$$

$$a^\circ c^{(s)}{}_i^{j-1/2}<\varphi\left(q^{(s)}{}_i^{j-1/2}\right) \tag{1.15}$$

При выполнении условий (1.12) в неравенствах (1.14), (1.15) $\varphi\to\varphi_0$, а при выполнении условий (1.13) в неравенствах (1.14), (1.15) $\varphi\to\varphi^\circ$. При выполнении условий (1.14) протекает сорбция, а при выполнении условий (1.15) — десорбция.

В качестве примера по разностной схеме (1.6), (1.7) для изотермы Лангмюра на ЭВМ БЭСМ-6 было рассчитано распространение ступенчатого возмущения через пористую среду при следующих параметрах:

$$\alpha=\gamma=0.5,\quad q=(1+p)c(1+pc)^{-1},\quad \varphi=q(1+p-pq)^{-1} \tag{1.16}$$

$$b=15,\quad h=0.06,\quad \tau=0.02,\quad c^\circ=1,\quad c_0=0,\quad H_0=0,\quad F(t)=1$$

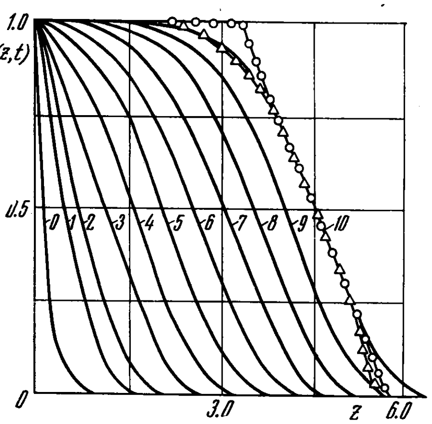
$$a_1=0.91,\quad a_2=-0.57,\quad a_3=-0.2,\quad a_4=0.702$$

$$a_5=120,\quad \delta=0.082,\quad p=49.$$

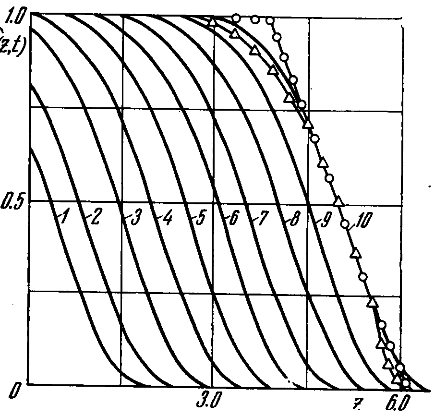
Результаты численного расчета изображены сплошными линиями на фиг. 1 и 2 ($0-t=0$, *1* $-\ t=0.26$, *2* $-\ t=0.5$, *3* $-\ t=1.0$, *4* $-\ t=1.5$, *5* $-\ t=2.0$, *6* $-\ t=2.5$, *7* $-\ t=3.0$, *8* $-\ t=3.5$, *9* $-\ t=4.0$, *10* $-\ t=4.5$).

Как показано ниже, для рассмотренного примера возможен режим бегущей волны, соответствующий асимптотическому инвариантному решению. Используя постоянство второго центрального момента как критерий перехода от обычного к инвариантному решению типа бегущей волны, получим, что при $t\geqslant t_*=4.5$, $z\geqslant z_*=6.4$ решение будет соответствовать режиму бегущей волны.

При анализе движения ступенчатого возмущения через пористую среду необходимо рассчитывать начальные и центральные моменты. Расчет моментов имеет смысл выполнить по следующей причине. Для асимптотически больших времен $t\gg 1$ расчет на ЭВМ будет происходить довольно долго. Поэтому для не очень больших времен можно рассчитать моменты и выяснить характер их зависимости от времени. Экстраполируя выражения для моментов на большие времена по аналитическим формулам, полученным в [3], можно рассчитать с помощью ряда полиномов Эрмита асимптотическое распределение концентраций в пористой среде для произвольной изотермы.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Система уравнений (1.1) допускает инвариантное решение, соответствующее оператору переноса $w\partial/\partial z - \partial/\partial t$ (w — скорость бегущей волны, подлежащая определению) [4]. При $c^\circ=1$, $c_0=0$, $q|_{t=0}=c|_{t=0}=0$ эта система имеет вид

$$(2.1)\qquad c-wq=\alpha dc/dy,\quad -\gamma w dq/dy=\omega(q^*)[c-\varphi(q)],\quad y=z-wt$$
$$w=cq^{-1}|_{y\to-\infty}=1,\quad c(-\infty)=1,\quad q(-\infty)=f(1)=1$$
$$c(+\infty)=q(+\infty)=0,\quad \left.\frac{dc}{dy}\right|_{y\to\pm\infty}=\left.\frac{dq}{dy}\right|_{y\pm\infty}=0$$

Для приведенных выше граничных условий решения c, q должны быть монотонно убывающими, поэтому из (2.1) получим

$$(2.2)\qquad q>c>\varphi(q)\quad \text{или}\quad q>\varphi(q)$$

При выполнении условий (2.2) система (2.1) допускает решение, соответствующее режиму бегущей волны. Условие (2.2) всегда выполняется для произвольной выпуклой изотермы f (или вогнутой φ), т. е. выходящей из начала координат $f(0)=0$ и лежащей выше прямой, соединяющей точки (0, 0) и (1, 1) в промежутке $0\leqslant c\leqslant 1$, $0\leqslant q\leqslant 1$. Система (2.1) может быть сведена к краевой задаче одного уравнения второго порядка и проинтегрирована численно методом прогонки. Аналитическое решение можно получить для частного случая ($\alpha=0$, $\gamma=1$). В этом случае система (2.1) превратится в следующую:

$$(2.3)\qquad q=c,\quad -\gamma dq/dy=\omega(q^*)[q-\varphi(q)]$$

Решение уравнения (2.3) запишем в квадратурах

$$(2.4)\qquad c(y)=q(y)=F^{-1}\left(\frac{y_0-y}{\gamma}\right),\quad F(q)=\int\frac{dq}{\omega(q)[q-\varphi(q)]}$$
$$y_0=\gamma\int_0 F(q)\,dq$$

Из интегральной формы уравнения непрерывности найдем трансцендентное уравнение для определения y_0

$$y_0=-\int_0^1 y\,dq+\alpha[1-c(0)] \tag{2.5}$$

При $\alpha=1$, $\gamma=0$ система (2.1) превратится в уравнение

$$c-1=\alpha dc/dy$$

решение которого имеет вид

$$q(y)=f(c),\qquad c=\begin{cases}1-\exp(y-y_0)/\alpha, & -\infty<y\leqslant y_0\\ 0, & y_0\leqslant y<\infty\end{cases} \tag{2.6}$$

Из (2.5) получим уравнение для определения y_0

$$y_0=\alpha[1-c(0)]=\alpha\exp(-y_0/\alpha)$$

из решения которого $y_0=0.5652\alpha$.

Для общего случая $\alpha\neq\gamma\neq0$ можно найти лишь приближенное решение системы (2.1)

$$q(y)=F^{-1}\left(\frac{y_0-y}{\gamma}\right),\qquad c(y)=F^{-1}\left(\frac{y_0+y^\circ-y}{\gamma}\right) \tag{2.7}$$

$$y^\circ=\alpha,\qquad y_0=\gamma\int_0^1 F(q)\,dq$$

причем константа y_0 и решение q находятся вначале при $\alpha=0$, $\gamma=1$, а затем из решения q путем сдвига по координате на величину y° (здесь $\alpha\neq0$) находится решение c.

Для параметров (1.16) по уравнениям (2.7) при $t=4.5$ были рассчитаны $q(y)$, $c(y)$, которые изображены на фиг. 1 и 2 треугольниками.

Для приближенного выражения

$$\omega(q)=bq^{-1},\qquad b=\text{const} \tag{2.8}$$

при наличии ступенчатой изотермы, которую можно рассматривать как предельную ($p\gg1$) изотерму Лангмюра, решение системы (2.1) имеет простой аналитический вид при $\alpha\neq\gamma\neq0$ и при $\alpha=0$, $\gamma\neq0$

$$c(y)=\begin{cases}1, & -\infty<y\leqslant y_0+\alpha-\gamma/b\\ b\gamma^{-1}(y_0+\alpha-y), & \alpha-\gamma/b+y_0\leqslant y\leqslant\alpha+y_0,\qquad y_0=\gamma/2b\\ 0, & y_0+\alpha\leqslant y<\infty\end{cases} \tag{2.9}$$

$$q(y)=\begin{cases}1, & -\infty<y\leqslant y_0-\gamma/b\\ b\gamma^{-1}(y_0-y), & y_0-\gamma/b\leqslant y\leqslant y_0,\qquad y_0=\gamma/2b\\ 0, & y_0\leqslant y<\infty\end{cases}$$

При $\alpha=1$ и при $\gamma=0$ решения остаются прежними, т. е. (2.6). Решения (2.9) при $t=4.5$, $b=0.41$, $\alpha=\gamma=0.5$ изображены на фиг. 1 и 2 кружками.

3. Инвариантное решение, соответствующее режиму бегущей волны, представляет в некотором смысле асимптотическое решение, которое реализуется при $z\geqslant z_*$ и $t\geqslant t_*$. Оценку величин z_*, t_* для произвольной выпуклой изотермы можно найти из численных решений. Аналитические оценки можно получить для ступенчатой изотермы. В этом случае систе-

му (1.1) можно свести к задаче типа Стефана [5] с неизвестной подвижной границей $l(t)$

$$(3.1)\qquad \frac{1}{q_*}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 c}{\partial z^2},\qquad \gamma\frac{\partial q}{\partial t}=\omega(q)c,\qquad 0\leqslant z\leqslant l(t)$$

$$q=c=0,\qquad z\geqslant l(t),\qquad c\,|_{z=0}=1,\qquad c\,|_{t=0}=q\,|_{t=0}=0$$

Из второго уравнения (3.1) получим

$$(3.2)\qquad q(0,t)=H^{-1}\left(\frac{t}{\gamma}\right),\qquad c(z,t)=\gamma H_t,\qquad H(q)=\int\limits_0^q\frac{dx}{\omega(x)}$$

Подставим второе уравнение (3.2) в первое уравнение (3.1). После преобразований найдем

$$(3.3)\qquad g(t)\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial t}=0,\qquad g(t)=\left[c(0,t)-\alpha\frac{\partial c(0,t)}{\partial z}\right][q(0,t)]^{-1}$$

Из уравнения (3.3) видно, что выход на режим бегущей волны произойдет при $g(t)\,|_{t\geqslant t_*}=1$. При этом решение уравнения (3.3) будет иметь вид

$$(3.4)\qquad q(z,t)=\Phi_0[z-(t-t_*)],\qquad q(z,t_*)=\Phi_0(z)$$

Ввиду нелинейности уравнений в общем случае ($\alpha\neq\gamma\neq0$) найти аналитический вид функции Φ_0 не удается. Приближенное решение можно построить с учетом точного решения для частного случая $\alpha=0$, $\gamma=1$. Запаздывание по координате, связанное с коэффициентом α, можно учесть в конечных выражениях. В таком приближении при $\alpha\neq\gamma\neq0$ и $\alpha=0$, $\gamma=1$ решения будут иметь вид

$$(3.5)\qquad c(z,t)=\Phi^{-1}\left\{\Phi\left[H^{-1}\left(\frac{t}{\gamma}\right)-\frac{z-\alpha}{\gamma}\right]\right\}\left[H^{-1}\left(\frac{t}{\gamma}\right)\right]^{-1}$$

$$0\leqslant z\leqslant l(t)$$

$$q(z,t)=\Phi^{-1}\left\{\Phi\left[H^{-1}\left(\frac{t}{\gamma}\right)-\frac{z}{\gamma}\right]\right\},\qquad \Phi(q)=\int\frac{dq}{q\omega(q)}$$

Уравнение для подвижной границы найдем из интегральной формы уравнения непрерывности (1.1)

$$(3.6)\qquad \int\limits_0^l q(z,t)\,dz=t-\alpha\int\limits_0^t c_z(0,t)\,dt$$

С учетом (3.5), (3.6) получим систему уравнений для определения t_*, z_*

$$(3.7)\qquad q_0=q(0,t_*),\qquad q_0=1+\alpha/\gamma^{-1}\omega(q_0),\qquad t_*=\gamma H(q_0)$$

$$\int\limits_0\Phi^{-1}\left[\Phi\left(q_0-\frac{z}{\gamma}\right)\right]dz=$$

$$=t_*+\frac{\alpha}{\gamma}\int\limits_0\left\{\Phi^{-1}\left[\Phi\left[H^{-1}\left(\frac{t}{\gamma}\right)-\frac{\alpha}{\gamma}\right]\right]\right\}'\left[H^{-1}\left(\frac{t}{\gamma}\right)\right]^{-1}dt$$

Для частного случая $\alpha=1$, $\gamma=0$ решение запишем в виде

$$q=f(c),\quad c(z,t)=[1-\exp(z-l)/\alpha][1-\exp(-l/\alpha)]^{-1} \tag{3.8}$$

Уравнение для подвижной границы найдем из первого уравнения (3.1)

$$l(t)=t+\alpha-\alpha\exp(-l/\alpha)$$

Режиму бегущей волны соответствует линейная зависимость положения подвижной границы от времени, поэтому $\exp(-l/\alpha)\approx 0$. Отсюда

$$t_*\geqslant 3.6\alpha,\quad z_*=l\geqslant 4.6\alpha$$

$$q=f(c),\quad c=\begin{cases}1-\exp(y-\alpha)/\alpha, & -\infty<y\leqslant\alpha\\ 0, & \alpha\leqslant y<\infty\end{cases}$$

Аналитические решения уравнений (3.1) и простые приближенные оценки t_*, z_* можно найти для $\omega(q)$ в форме (2.8). При $\alpha\neq\gamma\neq 0$ или $\alpha=0$, $\gamma=1$

$$c(z,t)=\begin{cases}1-z\sqrt{b/(2\gamma t)}, & 0\leqslant z_0-b/\gamma\leqslant z\leqslant z_0\\ 0, & z\geqslant z_0,\quad z_0=\sqrt{2\gamma t/b}\end{cases} \tag{3.9}$$

$$0\leqslant t\leqslant t_*$$

$$q(z,t)=\begin{cases}\sqrt{2bt/\gamma}-(z-\alpha)b/\gamma, & z_0+\alpha-b/\gamma\leqslant z\leqslant z_0+\alpha\\ 0, & z\geqslant z_0+\alpha\end{cases}$$

$$c(z,t)=\begin{cases}1, & y\leqslant -t_*\\ 1-b\gamma^{-1}(y+t_*), & -t_*\leqslant y\leqslant -t_*+\gamma/b\\ 0, & y\geqslant -t_*+\gamma/b\end{cases}$$

$$t\geqslant t_*$$

$$q(z,t)=\begin{cases}1, & y\leqslant -t_*+\alpha\\ 1-(y+t_*+\alpha)b\gamma^{-1}, & -t_*+\alpha\leqslant y\leqslant -t_*+\alpha+\gamma/b\\ 0, & y\geqslant -t_*+\alpha+\gamma/b\end{cases}$$

$$t_*=\frac{\gamma}{2b}\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha b}{\gamma}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\alpha b}{\gamma}}\right),\quad y_0=-t_*$$

$$z_*=\gamma b^{-1}\{\sqrt{t_*}+B+\sqrt{2Bt_*+B^2}\},\quad B=\alpha b^2\gamma^{-2}$$

Аналитические решения (3.9) описывают движение сорбируемой смеси через пористую среду при наличии ступенчатой изотермы сорбции.

Поступила 14 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цабек Л. К.* Движение газовой смеси через пористую среду при наличии сорбции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
2. *Саульев В. К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
3. *Розен И. В., Цабек Л. К.* Определение коэффициента продольного перемешивания в недеформируемой пористой среде при наличии сорбции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
4. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли. М.– Л., Гостехиздат, 1940.
5. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана. Рига, «Звайгзне», 1967.