

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОМ
ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ**

В. М. ЕНТОВ, Т. А. МАЛАХОВА

(Москва)

Рассматриваются элементарные решения задач нелинейной фильтрации с кусочно-линейным законом сопротивления, анализируется их асимптотическое поведение при относительном увеличении сопротивления в области малых скоростей и переходе к закону фильтрации с предельным градиентом. Дается применение полученных решений к определению размеров застойных зон в слоистых пластах.

Закон фильтрации с предельным градиентом

$$(0.1) \quad \mathbf{w} = -\frac{k}{\mu} \left(\text{grad } p - G \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} \right), \quad |\text{grad } p| > G$$

$$\mathbf{w} = 0, \quad |\text{grad } p| < G$$

описывает движение в некотором промежуточном диапазоне скоростей w , но выполнимость его в области самых малых скоростей, как правило, остается непроверенной. Естественно поставить вопрос о том, насколько расхождение между истинным законом фильтрации и его аппроксимацией (0.1) сказывается на точности расчета полей течения и какой смысл имеет при таких условиях определение размеров застойных зон. Чтобы в какой-то мере ответить на этот вопрос, ниже рассматриваются некоторые простейшие точные (элементарные) решения, полученные для более общего нелинейного закона фильтрации

$$(0.2) \quad \text{grad } p = -(\mu/k)(w + \lambda)w/w, \quad \lambda = kG/\mu, \quad w \geq w_0$$

$$\text{grad } p = -\mu w/k\varepsilon, \quad w \leq w_0, \quad \varepsilon = w_0/w_0 + \lambda.$$

переходящего в (0.1) при $w_0 \rightarrow 0$. Полученные решения применены также к оценке размеров застойных зон, образующихся в слоистых пластах, когда в одном из пропластков существенны эффекты предельного градиента.

1. Рассмотрим по аналогии с [1, 2] течение, создаваемое обобщенным диполем, т. е. некоторую идеализацию течения в системе источник — сток. На плоскости годографа скорости этому случаю отвечает задача в полуполосе $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq w < \infty$. В предположении, что имеет место кусочно-линейный закон фильтрации (0.2), имеем для функции тока ψ

$$(1.1) \quad w^2 \psi_{ww}'' + w \psi_w' + \psi_{\theta\theta}'' = 0, \quad 0 \leq w \leq w_0$$

$$w(w + \lambda) \psi_{ww}'' + (w - \lambda) \psi_w' + \psi_{\theta\theta}'' = 0, \quad w_0 \leq w < \infty$$

$$(1.2) \quad \psi(w, 0) = \psi(0, \theta) = \psi(w, \theta_0) = 0$$

При $w = w_0$ решения уравнений (1.1) должны удовлетворять условиям сопряжения, следующим из требования непрерывности функции тока и координат точек физической плоскости

$$(1.3) \quad \psi(w_0 + 0, \theta) = \psi(w_0 - 0, \theta)$$

$$(1.4) \quad \frac{w_0}{w_0 + \lambda} \frac{\partial \psi(w_0 - 0, \theta)}{\partial w} = \frac{\partial \psi(w_0 + 0, \theta)}{\partial w}$$

Элементарное решение поставленной задачи имеет вид

$$(1.5) \quad \psi = C_0 w^s \sin s\theta, \quad w \leq w_0$$

$$\psi = \left[A_0 \left(\frac{\lambda}{w+\lambda} \right)^s F \left(s-1, s, 2s+1, \frac{\lambda}{w+\lambda} \right) + B_0 (w/\lambda)^2 F(2-s, 2+s, 3, -w/\lambda) \right] \sin s\theta, \quad s = \pi/\theta_0, \quad w \geq w_0$$

Решение определено с точностью до множителя, который выберем из условия, чтобы оно росло при $w \rightarrow \infty$ как w^s . Тогда имеем

$$(1.6) \quad A_0 = \frac{\Gamma(2+s)\Gamma(1+s)}{2s\Gamma(2s)} \frac{w_0(w_0+\lambda)^s}{\lambda^2} [2(w_0+\lambda)F(2-s, 2+s, 2, -w_0/\lambda) - sw_0F(2-s, 2+s, 3, -w_0/\lambda)] [F(s-1, s, 1+2s, \lambda/(w_0+\lambda)) + F(s-1, s+1, 1+2s, \lambda/(w_0+\lambda))]^{-1}$$

$$B_0 = 1/2 \lambda^s \Gamma(2+s)\Gamma(1+s) [\Gamma(2s)]^{-1}$$

$$C_0 = \frac{\Gamma(2+s)\Gamma(1+s)}{2\lambda s \Gamma(2s)} (\lambda/w_0)^{s-1} [2(w_0+\lambda)F(2-s, 2+s, 2, -w_0/\lambda) \times F(s-1, s, 1+2s, \lambda/(w_0+\lambda)) + sw_0F(2-s, 2+s, 3, -w_0/\lambda) \times F(s-1, s+1, 1+2s, \lambda/(w_0+\lambda))] [F(s-1, s, 1+2s, \lambda/(w_0+\lambda)) + F(s-1, s+1, 1+2s, \lambda/(w_0+\lambda))]^{-1}$$

Допустим, что $w_0 \ll \lambda$, т. е. закон фильтрации близок к закону фильтрации с предельным градиентом, и рассмотрим положение на физической плоскости характерных линий постоянной скорости $w = \text{const}$ для предельного решения $w_0 = 0$ и решения с малым, но не равным нулю w_0 . Отметим прежде всего, что линия $w = w_0$ при любом значении w_0 представляет собой дугу окружности, уравнение которой имеет вид

$$(1.7) \quad x = -s(s-1)^{-1} C_0 w_0^{s-1} \cos(s-1)\theta, \quad y = s(s-1)^{-1} C_0 w_0^{s-1} \sin(s-1)\theta$$

Как следует из (1.6) и (1.7), при $w_0 \rightarrow 0$ линия $w = w_0$ стремится к окружности

$$(1.8) \quad x + iy = -R e^{-i(s-1)\theta}$$

$$R = \lambda^{s-1} s^2 \Gamma^2(s) [|s-1| \Gamma(2s)]^{-1}$$

Если же непосредственно решить задачу с $w_0 = 0$ (фильтрация с предельным градиентом) и найти границу застойной зоны [2], то получим уравнение эписцилоиды

$$(1.9) \quad x + iy = -\rho (s-1)^{-1} [e^{i(s-1)\theta} (s+1) + e^{-i(s+1)\theta} (s-1)]$$

образуемой внешним значением окружности радиуса $\rho = 1/2 \lambda^{s-1} s^2 \Gamma^2(s) / \Gamma(2s)$ по окружности радиуса $R_0 = |s-1|^{-1} \lambda^{s-1} s^2 \Gamma^2(s) / \Gamma(2s)$.

Таким образом, граница застойной зоны, определяемая из решения задачи фильтрации с предельным градиентом, не есть предел линий $w = w_0$ при $w_0 \rightarrow 0$. Очевидно, здесь имеет место эффект неравномерности предельного перехода при $w \rightarrow 0$ и $w_0 \rightarrow 0$. Чтобы выяснить смысл предельного перехода, рассмотрим линии постоянной скорости $w = w_0 + \delta = \text{const}$ при w_0 и $\delta \ll \lambda$. Используя выражения (1.5) и (1.6) и формулы возвращения на физическую плоскость, получим

$$(1.10) \quad x + iy = [2\lambda z (s^2 - 1)]^{-1} [(1-s) E_+ e^{i(s+1)\theta} - (1+s) E_- e^{-i(s-1)\theta}]$$

При малых $z=(w_0+\delta)/\lambda$ и $z_1=w_0/\lambda$ величины E_+ и E_- допускают разложение вида

$$(1.11) \quad E_{\pm} = -2(s+1)^{-1} \Gamma(2s) \Gamma^{-2}(s) A_0 [(s \pm 1) + sz \{s \mp 1 + (s+1) [1 + (s-1)\alpha]\} + s(s^2-1)z \ln z + s(s^2-1)(1 \mp s)z^2 \ln z + \dots] + 2B_0 z [1 + 1/2z(s^2 \mp s - 2) \pm 1/3s(4-s^2)z^2 + \dots]$$

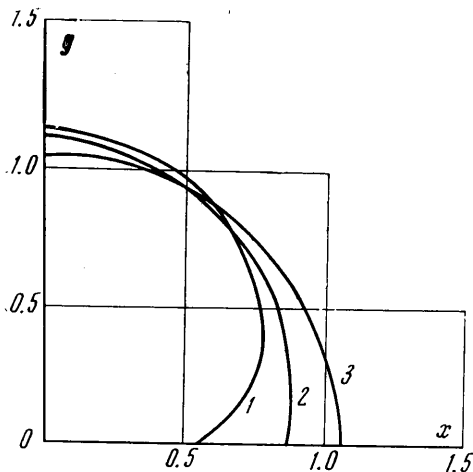
$$A_0 = 1/2s^2(s+1)\Gamma^4(s)\Gamma^{-2}(2s)\lambda^s z_1 [1 + z_1 \{1/2(s^2+s-2) + s(s-1)(s+1)^{-1}[(1+\alpha(s+1)) - (s+1)\ln z_1]\} + \dots]$$

$$B_0 = 1/2\lambda^{-s}s^2(1+s)\Gamma^2(s)\Gamma^{-1}(2s)$$

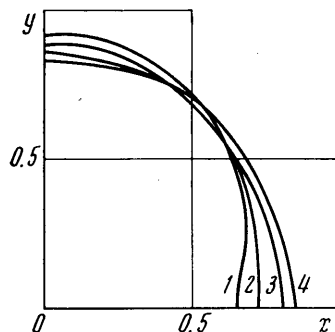
$$\alpha = \psi(1) + \psi(3) - \psi(s) - \psi(s+2) = 1/2 + s(s+1)^{-1} - 2\gamma - 2/s - 2\psi(s)$$

где ψ — логарифмическая производная Γ -функции, γ — постоянная Маклорена.

Если $z=z_1$ ($\delta=0$), то $E_+=0$ и уравнение (1.10) становится уравнением окружности, если же, зафиксировав δ , устремить z к нулю ($w_0 \rightarrow 0$), то $A_0 \rightarrow 0$ и E_+ и E_- совпадают с точностью до малых членов. Тогда из (1.10) для линий $w = \delta \ll \lambda$ получаем уравнения элли-



Фиг. 1



Фиг. 2

пциклоид, переходящие при $\delta \rightarrow 0$ в уравнение границы застойной зоны (1.9).

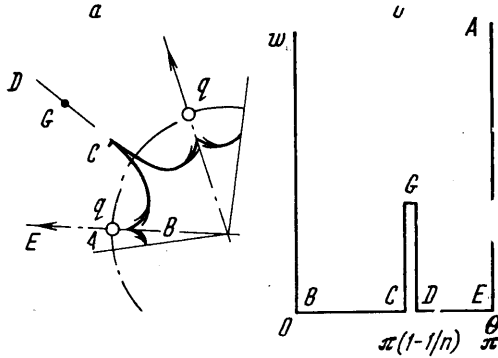
Таким образом, граница застойной зоны не есть предельное положение границы $w=w_0$ при $w_0 \rightarrow 0$, как этого можно было бы ожидать из общих соображений, а есть предельное положение линий $w=w_0+\delta$ при двойном предельном переходе $w_0 \rightarrow 0$, а затем $\delta \rightarrow 0$. Подобное явление отмечено в работе [3].

Выражения (1.10) и (1.11) позволяют оценить ошибку в положении линий постоянной скорости $w=\text{const}$, порождаемую пренебрежением величиной w_0 . Эта ошибка пропорциональна отношению A_0/B_0z , т. е. имеет порядок $z_1/z = w_0/(w_0+\delta)$.

Таким образом, если скорость w_0 принять за характерное значение скорости, при котором наблюдаемый закон фильтрации начинает отклоняться от модельного закона фильтрации с предельным градиентом, то приходим к выводу, что моделью закона фильтрации с предельным градиентом можно пользоваться для определения формы линий постоянной скорости при скоростях, на порядок больших w_0 ($w \geq 10w_0$). Чтобы проиллюстрировать характер ошибки, вносимой предположением $w_0=0$, на фиг. 1 по-

казаны линии $w/\lambda=0.2$ при $w_0/\lambda=0, 0.1, 0.2$ (кривые 1-3), на фиг. 2 линии $w/\lambda=0.4$ при $w_0/\lambda=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ (кривые 1-4).

2. Помимо чисто методического значения построенные элементарные решения могут быть использованы для построения приближенных решений задач фильтрации с кусочно-линейным законом фильтрации на основе полученных ранее решений задач фильтрации с предельным градиентом. Рассмотрим это на примере течения, создаваемого кольцевой батареей скважин. На фиг. 3, а показано расположение скважин, моделируемых точечными источниками интенсивности q , а на фиг. 3, б — соот-



Фиг. 3

ветствующая задача в плоскости годографа скорости, которая сведена к парным интегральным уравнениям и затем к уравнению Фредгольма в [4]; численные расчеты размеров застойных зон, проведенные на основе этой схемы А. Е. Сегаловым, показали, что размеры этих зон при фильтрации с предельным градиентом весьма велики даже при достаточно больших значениях параметра a ; например, для $n=6, a=2$, отношение площади застойной зоны к площади, заключенной внутри батареи скважин, составляет 0.42, $a=5-0.31, a=10-0.24$. Это открывает возможность применения к этим задачам приближенного приема, указанного в работе [5].

Вначале ищется решение задачи, отвечающей линейной фильтрации, т. е. решение уравнения

$$(2.1) \quad u^2 \psi_{uu}'' + u \psi_u' + \psi_{\theta\theta}'' = 0$$

в области $ABCDEA$ (фиг. 3, б) при условиях

$$\begin{aligned} \psi &= 0 & (\theta=0, 0 \leq u < \infty; \theta=\theta_1, 0 \leq u \leq a) \\ \psi &= 1/2q & (\theta=\theta_0, 0 \leq u < \infty) \end{aligned}$$

Затем ищется асимптотика этого решения при $u \rightarrow 0, 0 \leq \theta \leq \pi(1-1/n)$, а потом элементарное решение в области $0 \leq \theta \leq \pi(1-1/n), u < a$, имеющее при $\lambda \rightarrow 0$ ту же асимптотику. Тогда искомая застойная зона имеет форму и размеры, отвечающие данному элементарному решению. Решение задачи линейной фильтрации легко найти следующим образом. Зависимость комплексного потенциала ω от координат точек физической плоскости дается выражением

$$(2.2) \quad \omega = -H + i\psi = 1/2\pi^{-1}q \ln(z^n - R^n)$$

комплексная скорость равна

$$(2.3) \quad w = d\omega/dz = 1/2\pi^{-1}qnz^{n-1}/(z^n - R^n)$$

причем для максимального на оси симметрии значения скорости a имеем

$$(2.4) \quad a = q(n-1)^{(1-1/n)} (2\pi R)^{-1}$$

Вблизи точки $w=0$ ($z=0$)

$$(2.5) \quad w \sim (q/2\pi) n R^{-n} z^{n-1} = w e^{-i\theta}$$

Откуда

$$(2.6) \quad z = R(2\pi w R / n q)^{1/(n-1)} \exp(-i\theta / (n-1))$$

$$\psi \approx - (q/2\pi) \operatorname{Im} (z/R)^n = (q/2\pi) (n-1) (w/an)^{n/(n-1)} \sin[\theta n / (n-1)]$$

Выражение (2.6) представляет собой искомую асимптотику.

С другой стороны, искомое элементарное решение задачи фильтрации с предельным градиентом имеет согласно [2] вид

$$(2.7) \quad \psi = C(w/\lambda)^2 F(2-s, 2+s, 3, -w/\lambda) \sin s\theta, \quad s = n/(n-1)$$

и при $\lambda \rightarrow 0$ имеет асимптотику

$$(2.8) \quad \psi = C \frac{2\Gamma(2s)}{\Gamma(2+s)\Gamma(1+s)} \left(\frac{w}{\lambda}\right)^s \sin s\theta$$

Сопоставляя выражения (2.8) и (2.6), находим

$$(2.9) \quad C = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^s \frac{q}{2\pi} \frac{n-1}{n^s} \frac{\Gamma(2+s)\Gamma(1+s)}{2\Gamma(2s)}$$

Для границы застойной зоны в пределах элемента симметрии течения имеем с точностью до жесткого перемещения

$$(2.10) \quad x = \frac{C}{\lambda} \left[(n-1) \cos \frac{\theta}{n-1} + \frac{n-1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{n-1} \theta \right]$$

$$y = \frac{C}{\lambda} \left[\frac{n-1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{n-1} \theta - (n-1) \sin \frac{\theta}{n-1} \right]$$

Результаты расчетов по приближенным формулам (2.10) для $n=6$, $a=2,5$ и 10 (сплошные линии) сопоставлены с результатами, полученными в точной постановке (пунктирные линии), на фиг. 4.

Проведенное сопоставление показывает, что приближенным решением можно пользоваться вплоть до $a=5$ с достаточной для технических целей точностью.

Воспользуемся теперь тем же приемом, чтобы определить расположение характерных линий постоянной скорости при фильтрации по кусочно-линейному закону (0.2).

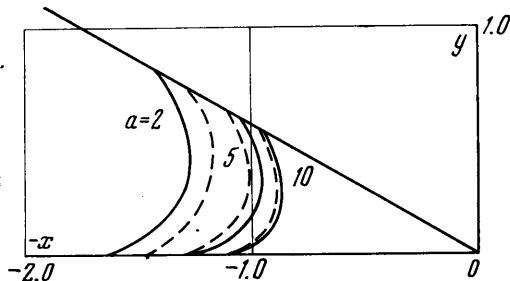
Соответствующее элементарное решение с точностью до множителя определяется выражениями (1.5) при $s=n/(n-1)$, а его асимптотика при $\lambda \rightarrow 0$ имеет вид (2.8), где $C=C'B_0$. Сопоставляя (2.9) с (1.6), находим $C'=(q/2\pi)(n-1)(an)^{-n/(n-1)}$ и искомое решение получается из (1.5) заменой A_0, B_0, C_0 на $C'A_0, C'B_0, C'C_0$. В частности, линия $w=w_0$, отвечающая точке излома ломаной, описывающей закон фильтрации, превращается в окружность радиуса

$$(2.11) \quad R' = \frac{2n-1}{2} R \left(\frac{2\pi R w_0}{qn^n} \right)^{1/(n-1)}$$

Применим полученный результат к оценке возможных размеров застойных зон, образующихся в слоистом пласте, сложенном из двух идеаль-

но сообщающихся пропластков, в одном из которых проявляется предельный градиент давления, а в другом — нет (это может быть связано, например, с большой глинизированностью одного из пропластков). Примем следующие параметры пропластков:

$$k_1=5k_2=1 \text{ д}, \quad h_1=0.4h_2=0.5 \text{ м}, \quad \mu=8 \text{ сП}, \quad G_1=0, \quad G_2=0.02 \text{ ат/м}$$



Фиг. 4

Суммарный закон фильтрации, получаемый осреднением потока жидкости по сечению пласта, имеет вид [6]

$$(2.12) \quad -w = \frac{h_1}{h_1+h_2} \frac{k_1}{\mu} \text{grad } p, \quad |\text{grad } p| < G_2$$

$$-w = \frac{h_1}{h_1+h_2} \frac{k_1}{\mu} \text{grad } p + \frac{h_2}{h_1+h_2} \frac{k_2}{\mu} \left(\text{grad } p - G_2 \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} \right), \quad |\text{grad } p| > G_2$$

В данном случае

$$w_0 = k_1 h_1 G_2 \mu^{-1} (h_1 + h_2)^{-1} = 2.25 \cdot 10^{-8} \text{ см/сек}$$

$$\varepsilon = h_1 k_1 / (h_1 k_1 + h_2 k_2) = 1/3, \quad \lambda = (1 - \varepsilon) w_0 / \varepsilon = 4.5 \cdot 10^{-8} \text{ см/сек}$$

Согласно (2.4) при $n=6$

$$a = (q/2\pi R) 5^{1/6} \approx 0.606 q/R \text{ при } q=10 \text{ м}^2/\text{сут} \approx 1.17 \text{ см}^2/\text{сек}$$

$$R=200 \text{ м}, \quad a \approx 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ см/сек} \approx 4\lambda$$

Согласно (2.11) получаем при этом $R' \approx 0.45R$.

Таким образом даже при сравнительно небольшой величине предельного градиента в одном из пропластков может оказаться неподвижной значительная часть жидкости. Можно полагать, что в ходе вытеснения нефти водой в подобной ситуации в малопроницаемом пласте образуются целики больших размеров, приводящие к значительным потерям нефти.

Поступила 11 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Енгов В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Алишаев М. Г., Енгов В. М., Сегалов А. Е. Элементарные решения плоских задач нелинейной фильтрации. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
3. Молокович Ю. М., Скворцов Э. В. Решение одной плоской стационарной задачи нелинейной фильтрации. В сб.: «Вопросы подземной гидромеханики», вып. 7, Казань, Изд. Каз. ун-та, 1970.
4. Енгов В. М. О парных интегральных уравнениях, возникающих в задачах фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1970, т. 34, № 3.
5. Енгов В. М., Салганик Р. Л. О решении плоских задач фильтрации с предельным градиентом методом малого параметра. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
6. Енгов В. М. Двумерные и нестационарные одномерные задачи движения неньютоновских жидкостей в пористой среде. Нефть. хоз-во, 1968, № 10.