

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ
С ТОКОМ В ДЛИННЫХ КАНАЛАХ ВО ВНЕШНЕМ
МАГНИТНОМ ПОЛЕ

О. А. ЭЙСМОНТ

(Москва)

Рассматривается задача об устойчивости равновесия находящейся в длинном канале электропроводной жидкости в электрическом и магнитном полях при условии, что вдоль канала имеется градиент температуры и проводимости жидкости.

1. Постановка задачи. В работах [1,2] рассматривалась конвективная неустойчивость бесконечного плоского слоя жидкости с током в магнитном поле, когда электромагнитная сила действует в направлении, перпендикулярном граничным поверхностям. Наряду с такой геометрией возможны ситуации, когда электромагнитная сила направлена параллельно ограничивающим стенкам. Если в этом же направлении имеется градиент температуры и, следовательно, проводимости жидкости, то возможно развитие неустойчивости типа [1, 2].

Аналогичные задачи для случая, когда объемная сила гравитационного происхождения и зависит от плотности жидкости, являющейся, в свою очередь, функцией температуры, исследованы в [3-10].

Рассматривается канал, поперечный характерный размер которого существенно меньше продольного характерного размера. В осевом направлении имеется постоянный градиент температуры β . Если канал плоский (расстояние между стенками h), то можно исследовать два случая: 1) параллельные стенки представляют собой идеальные изоляторы, нормально к которым приложено внешнее однородное магнитное поле с индукцией B ; в направлении, перпендикулярном магнитному полю и градиенту температуры, действует внешнее однородное электрическое поле напряженностью E , которое индуцирует в канале электрический ток плотностью j ; 2) параллельные стенки канала являются идеальными электродами, к которым приложена разность потенциалов, создающая в канале электрическое поле E ; в направлении, перпендикулярном внешнему электрическому полю и градиенту температуры, приложено внешнее однородное магнитное поле с индукцией B . В дальнейшем первый из этих вариантов будем называть изоляторным, второй — электродным. В общем случае можно рассматривать канал прямоугольного сечения, образованного двумя электроизоляционными и двумя электродными стенками. Во всех случаях принимается, что магнитное поле направлено вдоль оси x , электрическое — вдоль оси y . Предполагается, что концы канала закрыты, так что электромагнитная сила, действующая вдоль канала, уравновешивается градиентом давления и не вызывает поступательного движения жидкости.

Предполагается, что плотность жидкости ρ , теплоемкость C_v , а также коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ постоянны. Электропроводность жидкости является линейной функцией температуры $\sigma = \sigma_0(1 + \alpha T)$, причем $|\alpha T| \ll 1$. Джоулевой диссипацией пренебрегается, и задача об устойчивости решается в безындукционном приближении в линейной постановке.

Исходная система уравнений имеет вид (используются обычные обозначения)

$$\rho \partial \mathbf{V} / \partial t + \rho (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{j} = \sigma (-\nabla \Phi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\partial T / \partial t + (\mathbf{V} \nabla) T = \kappa \Delta T, \quad \kappa = \lambda / \rho C_p, \quad \sigma = \sigma_{00} (1 + \alpha T)$$

Поведение малых возмущений описывается следующей системой уравнений, записанной в безразмерном виде (за характерные значения величин приняты: скорости $-v/h$, температуры $-\mu v / \alpha j_{00} B h^3$, $j_{00} = \sigma_{00} E$, давления $-\rho v^2 / h^2$, электрического потенциала $-Bv$, плотности электрического тока $-\sigma_{00} v B / h$, времени $-h^2 / \nu$, длины $-h$):

$$(1.1) \quad \partial \mathbf{V}' / \partial t = -\nabla p' + \Delta \mathbf{V}' + H^2 \mathbf{j}' \times \mathbf{e}_x - T' \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{j}' = -\nabla \Phi' + \mathbf{V}' \times \mathbf{e}_z$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}' = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j}' = 0, \quad P \partial T' / \partial t + R w' = \Delta T'$$

$$H^2 = \sigma_{00} B^2 h^2 / \mu, \quad R = \alpha j_{00} B \beta h^4 / \mu \kappa, \quad P = \nu / \kappa$$

Здесь $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ — единичные векторы в направлениях осей x и z , соответственно.

На жестких (свободных), идеально теплопроводных (теплоизолированных) и идеально электропроводных (электроизоляционных) поверхностях граничные условия имеют вид

$$V_l' = V_\tau' \left\{ \frac{\partial V_\tau'}{\partial l} \right\} = T' \left\{ \frac{\partial T'}{\partial l} \right\} = \Phi' \{j_l'\} = 0$$

Здесь l и τ — нормальное и касательное к граничной поверхности направления соответственно.

Далее всюду, если это специально не оговаривается, предполагается, что выполняется принцип изменения устойчивости и рассматривается состояние на границе устойчивости.

2. Неустойчивость в плоском канале с электроизоляционными стенками. Рассмотрим сначала изоляторный вариант. Представляя возмущения в виде

$$u' = U(x) \cos a_2 y \sin a_3 z, \quad \Phi' = \Phi(x) \sin a_2 y \cos a_3 z$$

$$v' = V(x) \sin a_2 y \sin a_3 z, \quad T' = \theta(x) \cos a_2 y \cos a_3 z$$

$$w' = W(x) \cos a_2 y \cos a_3 z, \quad p' = \Pi(x) \cos a_2 y \sin a_3 z$$

можно получить из (1.1) систему уравнений для амплитуд возмущений

$$(2.1) \quad [(D^2 - a^2)^2 - H^2 D^2] (D^2 - a^2) W = R D^2 W$$

$$[(D^2 - a^2)^2 - H^2 D^2] W = D^2 \theta$$

$$a_3 (D^2 - a^2 - H^2) V + a_2 (D^2 - a^2 - H^2) W + H^2 a^2 \Phi - a_2 \theta = 0$$

$$D U + a_2 V - a_3 W = 0, \quad (D^2 - a^2)^2 U - H^2 D^2 U = a_3 D \theta$$

$$(D^2 - a^2) \theta = R W, \quad a^2 = a_2^2 + a_3^2$$

Здесь и далее в этом разделе $D = d/dx$. Последнее уравнение (2.1) не является независимым. Граничные условия имеют вид

$$x = \pm 1/2, \quad U = V \{D V\} = W \{D W\} = \theta \{D \theta\} = D \Phi = 0$$

Методом [5] можно показать, что минимальное значение критического числа Рэлея реализуется при $a_3 = 0$.

Из условия $a_3 = 0$ следует, что $U = V = 0$, т. е. возмущение скорости жидкости имеет лишь одну не равную нулю компоненту, направленную параллельно электромагнитной силе, и в системе уравнений (2.1) можно

ограничиться рассмотрением лишь уравнений

$$(2.2) \quad [(D^2 - a^2)^2 - H^2 D^2] W = D^2 \theta, \quad (D^2 - a^2) \theta - RW = 0$$

Рассмотрим далее случай свободных теплоизолированных граничных поверхностей, когда можно получить точное решение задачи. Граничные условия в этом случае

$$(2.3) \quad x_1 = x + 0.5 = 0, 1, \quad DW = D\theta = D^3 W = 0$$

Последнее условие, являющееся следствием электроизолированности граничных поверхностей, получено с учетом первых двух условий из третьего уравнения (2.1).

Решение системы уравнений (2.2) с условиями (2.3) имеет вид

$$W = C_1 \cos m\pi x_1, \quad \theta = C_2 \cos m\pi x_1$$

Число Рэлея определяется выражением

$$R = (m\pi)^{-2} (m^2 \pi^2 + a^2) [(m^2 \pi^2 + a^2)^2 + m^2 \pi^2 H^2]$$

Отсюда следует, что наиболее неустойчива в этом случае антисимметричная мода ($m=1$) и минимальное значение критического числа Рэлея достигается, как и во всех рассмотренных в этой работе случаях плоских каналов, при волновом числе 0 и равно $R_* = \pi^4 + \pi^2 H^2$. Отметим, что в случае гравитационной конвекции при теплоизолированных граничных поверхностях наиболее быстрорастущими являются симметричные возмущения и соответствующее им критическое число Рэлея равно нулю [6].

В случае жестких теплоизолированных стенок граничные условия имеют вид

$$(2.4) \quad x = \pm 1/2, \quad W = D\theta = (D^2 - a^2 - H^2) DW = 0$$

(последнее граничное условие получено точно так же, как и в предыдущем случае свободных граничных поверхностей).

Можно показать, что и в случае жестких стенок антисимметричные возмущения будут наиболее неустойчивыми. Поэтому решение системы (2.2) с граничными условиями (2.4) следует искать в виде

$$(2.5) \quad \theta = \sum_m C_m \sin(2m+1)\pi x, \quad W = \sum_m C_m W_m$$

где W_m определяется из второго уравнения (2.2) и граничных условий. Далее из условия ортогональности системы функций $\sin(2m+1)\pi x$ к функции в левой части этого уравнения получаем линейную систему алгебраических уравнений относительно C_m . Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к искомому характеристическому уравнению. Ограничиваясь в разложениях (2.5) одним членом, получаем

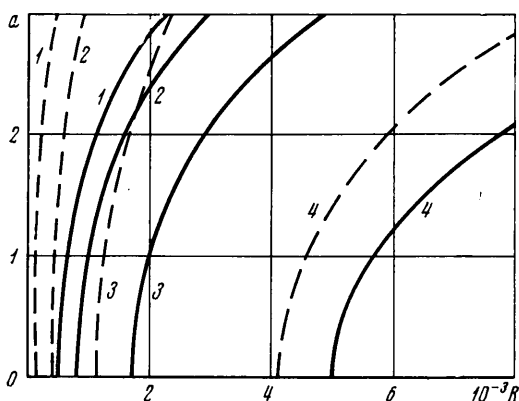
$$(2.6) \quad R = (\pi^2 + a^2) [(\pi^2 + a^2)^2 + \pi^2 H^2] \pi^{-2} \left[1 - 4\xi_1 \left(\frac{1}{\xi_1^2 + \pi^2} - \frac{g}{\xi_2^2 + \pi^2} \right) \left(\operatorname{th} \frac{1}{2} \xi_1 - g \frac{\xi_1}{\xi_2} \operatorname{th} \frac{1}{2} \xi_2 \right)^{-1} \right]^{-1}$$

$$\xi_{1,2} = \left[a^2 + \frac{1}{2} H^2 \pm \left(a^2 H^2 + \frac{1}{4} H^4 \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad g = \frac{\xi_1^2 - a^2 - H^2}{\xi_2^2 - a^2 - H^2}$$

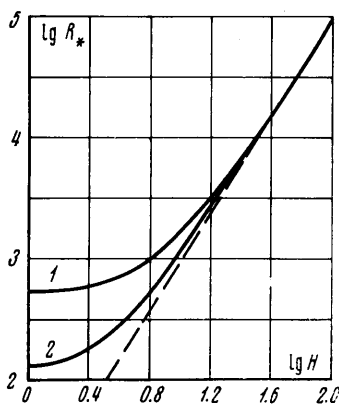
Переходя в этом выражении к пределу при $a \rightarrow 0$, получаем критическое значение числа Рэлея

$$R_* = \pi^2 (\pi^2 + H^2) \left[1 - \frac{4H}{(\pi^2 + H^2) \operatorname{th}^{1/2} H} \right]^{-1}$$

Зависимость $R(a)$ при различных значениях числа Гартмана приведена на фиг. 1 (сплошные линии). Здесь и на фиг. 3, 4 кривым 1–4 соответствуют числа Гартмана, равные 0, 5, 10 и 20. На фиг. 2 (кривая 1) показана зависимость критического числа Рэлея от числа Гартмана. Пунктирной линией показана предельная зависимость $R_* = \pi^2 H^2$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть теперь граничные поверхности являются идеально теплопроводными. Тогда граничные условия

$$x = \pm 1/2, \quad W = \theta = (D^2 - a^2 - H^2) DW - D\theta = 0$$

В этом случае можно показать, что наименее устойчивы симметричные возмущения. Как и в случае теплоизолированных стенок, ограничиваясь в разложении типа (2.5) одним членом, можно получить выражение для критического числа Рэлея, которое совпадает с (2.6). Таким образом, в изоляторном варианте критическое число Рэлея не зависит от теплового режима граничных поверхностей. Что же касается формы наиболее быстро растущих возмущений, то они являются антисимметричными в случае теплоизолированных стенок и симметричными в случае идеально теплопроводных.

3. Неустойчивость в плоском канале с идеально электропроводными стенками. Записывая возмущения всех величин в виде

$$\begin{aligned} u' &= U(y) \cos a_1 x \sin a_3 z, & \varphi' &= \Phi(y) \sin a_1 x \cos a_3 z \\ v' &= V(y) \sin a_1 x \sin a_3 z, & T' &= \theta(y) \sin a_1 x \cos a_3 z \\ w' &= W(y) \sin a_1 x \cos a_3 z, & p' &= \Pi(y) \sin a_1 x \sin a_3 z \end{aligned}$$

получаем из (1.4) следующую систему уравнений для амплитуд:

$$\begin{aligned} [(D^2 - a^2)^2 + H^2 a_1^2] (D^2 - a^2) W &= -R a_1^2 W, & [(D^2 - a^2)^2 + H^2 a_1^2] W &= -a_1^2 \theta \\ a_3 (D^2 - a^2) V - (D^2 - a^2) DW - H^2 a_1^2 \Phi &= 0, & -a_1 U + DV - a_3 W &= 0 \\ (D^2 - a^2)^2 U + H^2 a_1^2 U &= a_1 a_3 \theta, & D &\equiv d/dy; \quad a^2 = a_1^2 + a_3^2 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$y = \pm 1/2, \quad V = U \{DU\} = W \{DW\} = \theta \{D\theta\} = \Phi = 0$$

В этом случае можно показать, что при фиксированном значении волнового числа a_1 критическое значение числа Рэлея достигает минимума при $a_3 = 0$. Систему уравнений (3.1) можно привести к одному уравнению

$$(3.2) \quad [(D^2 - a^2)^2 + H^2 a^2] (D^2 - a^2) \theta = -Ra^2 \theta$$

с граничными условиями

$$y = \pm 1/2, \quad (D^2 - a^2) \theta \{D(D^2 - a^2) \theta\} = \theta \{D\theta\} = (D^2 - a^2)^2 D\theta = 0$$

В случае свободных теплоизолированных поверхностей граничные условия будут

$$y = \pm 1/2, \quad D\theta = D^3\theta = D^5\theta = 0$$

Тогда решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\theta = C \cos m\pi y_1, \quad y_1 = y + 1/2$$

Ему соответствует число Рэлея

$$R = a^{-2} (m^2 \pi^2 + a^2) [(m^2 \pi^2 + a^2)^2 + H^2 a^2]$$

Видно, что наиболее неустойчивы симметричные возмущения ($m=0$) и соответствующее им число Рэлея $R = a^4 + H^2 a^2$ равно нулю при $a=0$ вне зависимости от величины числа Гартмана (т. е. $R_* = 0$).

Пусть теперь граничные поверхности являются жесткими. Рассмотрим сначала случай $H=0$. Тогда уравнение (3.2) совпадает с уравнением, описывающим развитие возмущений в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу (граничные условия, однако, различаются). Точное решение этого уравнения (четное) имеет вид [11]

$$(3.3) \quad \theta = \sum_{k=1}^3 C_k \operatorname{ch} \chi_k y$$

$$\chi_k^2 = a^2 - (Ra^2)^{1/3} \omega_k, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_{2,3} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$$

Если граничные поверхности являются идеально теплопроводными, то, подставляя (3.3) в соответствующие граничные условия, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$(3.4) \quad 2a [F_1 (1 - e^{-2aF_1}) - 2F_2 a^{-aF_1} \sin aF_2] [1 + e^{-2aF_1} + 2e^{-aF_1} \cos aF_2]^{-1} =$$

$$= [(Ra^2)^{1/3} - a^2]^{1/2} \operatorname{tg}^{1/2} [(Ra^2)^{1/3} - a^2]^{1/2}$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{4F_1^2 - 3} - F_1), \quad (Ra^2)^{1/3} = \frac{4}{\sqrt{3}} a^2 F_1 F_2$$

Когда граничные поверхности теплоизолированы, получаем характеристическое уравнение

$$(3.5) \quad \frac{2[F_1(1 - e^{-2aF_1}) - 2F_2 e^{-aF_1} \sin aF_2]}{(F_1^2 + F_2^2) a (1 + e^{-aF_1} - 2e^{-aF_1} \cos aF_2)} = \frac{\operatorname{ctg}^{1/2} [(Ra^2)^{1/3} - a^2]^{1/2}}{[(Ra^2)^{1/3} - a^2]^{1/2}}$$

Пусть теперь $H > 0$. Тогда, используя, как и в п. 2, метод Галеркина, при теплоизолированных граничных поверхностях для числа Рэлея получаем (симметричные возмущения, в соответствующих разложениях

сохранен один член)

$$R = (a^4 + H^2 a^2) \left\{ 1 - \frac{2[\eta_1 \operatorname{tg}^{1/2} \eta_2 - \eta_2 \operatorname{th}^{1/2} \eta_1 + s(\eta_1 \operatorname{th}^{1/2} \eta_1 + \eta_2 \operatorname{tg}^{1/2} \eta_2)]}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)(\operatorname{th}^{1/2} \eta_1 \operatorname{tg}^{1/2} \eta_2 + s)} \right\}^{-1} \quad (3.6)$$

$$s = \frac{\eta_1 \operatorname{th}^{1/2} \eta_1 - \eta_2 \operatorname{tg}^{1/2} \eta_2}{\eta_1 \operatorname{tg}^{1/2} \eta_2 + \eta_2 \operatorname{th}^{1/2} \eta_1}, \quad \eta_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{a^4 + H^2 a^2} \pm a^2]}$$

В пределе при $a \rightarrow 0$, $R \rightarrow (12 + H^2) a^2 + O(a^4)$ и критическое число Рэлея равно нулю независимо от величины числа Гартмана.

В случае идеально теплопроводных граничных поверхностей аналогично получаем

$$R = a^{-2} [(\pi^2 + a^2)^2 + H^2 a^2] (\pi^2 + a^2) \left[1 - \frac{\pi(\pi^2 + a^2) G_1}{\eta_1 \eta_2 G_2} \right]^{-1} \quad (3.7)$$

$$G_1 = -\eta_1 K_1 (1 + \operatorname{th}^2 \frac{1}{2} \eta_1 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \eta_2)$$

$$G_2 = \eta_1 \operatorname{th}^{1/2} \eta_1 - \eta_2 \operatorname{tg}^{1/2} \eta_2 + \operatorname{th}^{1/2} \eta_1 \operatorname{tg}^{1/2} \eta_2 (\eta_1 \operatorname{tg}^{1/2} \eta_2 + \eta_2 \operatorname{th}^{1/2} \eta_1)$$

$$K_1 = \frac{1}{\eta_1^2 + (\eta_2 - \pi)^2} - \frac{1}{\eta_1^2 + (\eta_2 + \pi)^2}$$

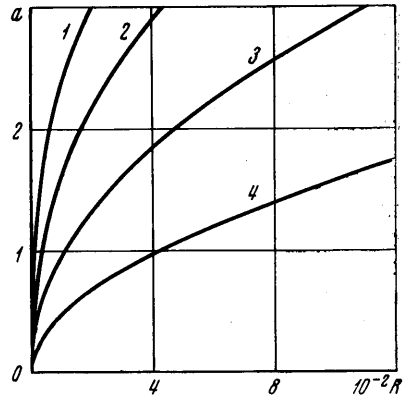
в пределе при $a \rightarrow 0$ находим

$$R_* = \frac{1}{8} \pi^6 (1 + H^2 / 12)$$

В обоих случаях наиболее быстро растущими оказываются симметричные возмущения.

Можно показать, что когда $R_* = 0$, инкремент нарастания неустойчивости при малых значениях числа Рэлея определяется выражением $n = RP^{-1} (12 + H^2)^{-1} + O(R^2)$. Таким образом, хотя равновесие жидкости неустойчиво при любых, сколь угодно малых числах Рэлея, время развития этой неустойчивости может быть сколь угодно велико. Кроме того, несмотря на то, что критическое число Рэлея равно нулю вне зависимости от величины числа Гартмана, скорость роста возмущений уменьшается с увеличением H и в пределе при $H \rightarrow \infty$, $n \rightarrow 0$.

На фиг. 1 (пунктирные линии), 3 приведены зависимости числа Рэлея от волнового числа для различных значений числа Гартмана при двух рассмотренных тепловых режимах стенок.



Фиг. 3

Сравнение приближенных решений (3.6), (3.7) при $H=0$ с соответствующими «точными» (3.4), (3.5) показывает, что даже при ограничении в разложениях типа (2.11) одним членом погрешность в определении критических значений числа Рэлея составляет величину менее 1%. Заметим, что зависимость числа Рэлея от волнового числа в электродном варианте выражена значительно слабее, чем в изоляторном. Зависимость критического числа Рэлея от числа Гартмана в случае идеально теплопроводных стенок показана на фиг. 2 (кривая 2). Видно, что в изоляторном варианте равновесие жидкости является более устойчивым, чем в электродном варианте с идеально теплопроводными стенками, хотя в пределе при $H \rightarrow \infty$ соответствующие критические числа Рэлея стремятся к одному значению.

4. Неустойчивость в канале прямоугольного сечения. Рассмотрим теперь задачу о конвективной неустойчивости в канале прямоугольного сечения, образованного двумя электроизоляционными стенками и двумя идеально электропроводными. Электроизоляционные стенки, длина которых в плоскости поперечного сечения h_1 , предполагаются теплоизолированными, электродные длиной h_2 — идеально теплопроводными. Нормально к изоляционным стенкам приложено внешнее однородное магнитное поле. Рассматриваются двумерные возмущения, не зависящие от координаты вдоль оси канала, при этом все компоненты возмущения скорости, кроме составляющей в направлении оси z , будут равны нулю. Тогда исходная система уравнений для возмущений при сделанных предположениях может быть получена из (1.1)

$$(4.1) \quad (\Delta^2 - H^2 \partial^2 / \partial x^2) w' = \partial^2 T' / \partial x^2$$

$$(4.2) \quad \Delta T' - R w' = 0$$

(Здесь числа Гартмана и Рэлея определены по характерному размеру h_2 .)

Граничными условиями в рассматриваемом случае являются равенство нулю возмущений скорости на всех стенках канала, теплового потока и нормальной составляющей плотности электрического тока на изоляционных и температуры и электрического потенциала на электродных стенках

$$(4.3) \quad x = \pm 1/2, \quad \partial T' / \partial x = w' = (\Delta - H^2) \partial w' / \partial x = 0$$

$$(4.4) \quad y = \pm 1/2r, \quad T' = w' = \partial \Delta w' / \partial y = 0, \quad r = h_1 / h_2$$

Система уравнений (4.1), (4.2) с граничными условиями (4.3), (4.4) допускает решения четырех различных типов в зависимости от их симметрии относительно взаимно перпендикулярных осей x , y в плоскости поперечного сечения. Таким образом, возможны $C-C$, $C-A$ и $A-A$ решения, где $C-A$, например, означает решение системы уравнений (4.1), (4.2), симметричное относительно оси x и антисимметричное относительно оси y .

Как было показано, в плоских каналах с электро- и теплоизолированными стенками наиболее быстрорастущими оказываются антисимметричные возмущения, в каналах с электродными, идеально теплопроводными стенками — симметричные возмущения. Из физических соображений следует, что при $r \rightarrow \infty$ решение задачи для канала прямоугольного сечения должно стремиться к решению, соответствующему плоскому каналу с изоляционными стенками, а при $r \rightarrow 0$ — к решению, соответствующему плоскому каналу с электродными стенками. Можно заключить, что в случае неустойчивости наиболее быстрорастущими возмущениями в канале прямоугольного сечения будут $C-A$ моды. В соответствии с этим решение системы (4.1) (4.2) с граничными условиями (4.3) (4.4) будем искать в виде

$$(4.5) \quad T' = \sum_{m,n} C_{mn} \sin a_m x \cos b_n y$$

$$w' = \sum_{m,n} C_{mn} w_{mn}, \quad a_m = (2m+1)\pi, \quad b_n = (2n+1)\frac{\pi}{r}$$

где w_{mn} удовлетворяет уравнению

$$(4.6) \quad (\Delta^2 - H^2 \partial^2 / \partial x^2) w_{mn} = -a_m^2 \sin a_m x \cos b_n y$$

Решение уравнения (4.6) ищем в виде ряда

$$w_{mn} = \sum_k [(C_{1k}^{(mn)} \operatorname{sh} \xi_{1k} x + C_{2k}^{(mn)} \operatorname{sh} \xi_{2k} x) \cos b_k y + (D_{1k}^{(mn)} \operatorname{ch} \eta_{1k} y \cos \eta_{2k} y + D_{2k}^{(mn)} \operatorname{sh} \eta_{1k} y \sin \eta_{2k} y) \sin a_k x] + K_{mn} \sin a_m x \cos b_n y$$

$$K_{mn} = - \frac{a_m^2}{(a_m^2 + b_n^2)^2 + H^2 a_m^2}, \quad \xi_{1k, 2k} = \sqrt{b_k^2 + 1/2 H^2 \pm \sqrt{H^2 (b_k^2 + 1/4 H^2)}}$$

$$\eta_{1k, 2k} = \sqrt{1/2 [\sqrt{a_k^4 + H^2 a_k^2} \pm a_k^2]}$$

Здесь $C_{1k}^{(mn)}$, $C_{2k}^{(mn)}$, $D_{1k}^{(mn)}$, $D_{2k}^{(mn)}$ — произвольные постоянные коэффициенты.

Используя граничные условия равенства нулю скорости возмущений на электродных стенках и нормальной составляющей плотности электрического тока на изоляционных, получаем

$$D_{1k}^{(mn)} = -D_{2k}^{(mn)} \operatorname{th} 1/2 \eta_{1k} r \operatorname{tg} 1/2 \eta_{2k} r$$

$$C_{1k}^{(mn)} = -C_{2k}^{(mn)} g_k \frac{\xi_{2k} \operatorname{ch} 1/2 \xi_{2k}}{\xi_{1k} \operatorname{ch} 1/2 \xi_{1k}}, \quad g_k = \frac{\xi_{2k}^2 - b_k^2 - H^2}{\xi_{1k}^2 - b_k^2 - H^2}$$

Из условия равенства нулю возмущений скорости на изоляционных стенках и электрического потенциала на электродных получим

$$\sum_k [C_{2k}^{(mn)} A_{1k} \cos b_k y + D_{2k}^{(mn)} f_{2k}(y)] = Q_{1mn} \cos b_n y$$

$$\sum_k [C_{2k}^{(mn)} f_{1k}(x) + D_{2k}^{(mn)} A_{2k} \sin a_k x] = Q_{2mn} \sin a_m x$$

$$A_{1k} = -g_k \frac{\xi_{2k}}{\xi_{1k}} \operatorname{th} \frac{1}{2} \xi_{1k} + \operatorname{th} \frac{1}{2} \xi_{2k}$$

$$A_{2k} = 2\eta_{1k} \eta_{2k} \left[\left(\eta_{1k} + \eta_{2k} \operatorname{th} \frac{r}{2} \eta_{1k} \operatorname{tg} \frac{r}{2} \eta_{2k} \right) \operatorname{th} \frac{r}{2} \eta_{1k} + \left(\eta_{1k} \operatorname{th} \frac{r}{2} \eta_{1k} \operatorname{tg} \frac{r}{2} \eta_{2k} - \eta_{2k} \right) \operatorname{tg} \frac{r}{2} \eta_{2k} \right]$$

$$f_{1k}(x) = (-1)^k b_k \left[g_k \frac{\xi_{2k} \operatorname{ch} 1/2 \xi_{2k}}{\xi_{1k} \operatorname{ch} 1/2 \xi_{1k}} (\xi_{1k}^2 - b_k^2) \operatorname{sh} \xi_{1k} x - (\xi_{2k}^2 - b_k^2) \operatorname{sh} \xi_{2k} x \right]$$

$$f_{2k}(y) = (-1)^k \left(\operatorname{th} \frac{1}{2} \eta_{1k} y \operatorname{tg} \frac{1}{2} \eta_{2k} y - \operatorname{th} \frac{r}{2} \eta_{1k} \operatorname{tg} \frac{r}{2} \eta_{2k} \right)$$

$$Q_{1mn} = \frac{(-1)^n a_m^2 b_n (a_m^2 + b_n^2)}{(a_m^2 + b_n^2)^2 + H^2 a_m^2}, \quad Q_{2mn} = \frac{(-1)^m a_m^2}{(a_m^2 + b_n^2)^2 + H^2 a_m^2}$$

Раскладывая функции $f_{1k}(x)$ и $f_{2k}(y)$ в ряды Фурье по $\sin(2j+1)\pi x$ и $\cos(2i+1)\pi r^{-1}y$, соответственно, и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получаем систему уравнений для коэффициентов $C_{2k}^{(mn)}$ и $D_{2k}^{(mn)}$:

$$(4.7) \quad \sum_k (C_{2k}^{(mn)} A_{1k} \delta_{ik} + D_{2k}^{(mn)} B_{ik}) = Q_{2mn} \delta_{ni},$$

$$\sum_k (C_{2k}^{(mn)} E_{jk} + D_{2k}^{(mn)} A_{2k} \delta_{kj}) = Q_{1mn} \delta_{mj}$$

$$B_{ik} = \frac{2(-1)^{i+k} \eta_{1k}}{r} \left\{ \frac{1}{\eta_{1k}^2 + [\eta_{2k} + (2i+1)\pi/r]^2} - \frac{1}{\eta_{1k}^2 + [\eta_{2k} - (2i+1)\pi/r]^2} \right\} \left[1 + \left(\operatorname{th} \frac{r}{2} \eta_{1k} \operatorname{tg} \frac{r}{2} \eta_{2k} \right)^2 \right]$$

$$E_{jk} = 4(-1)^{j+k} \xi_{2k} b_k \left[g_k \frac{\xi_{1k}^2 - b_k^2}{\xi_{1k}^2 + (2j+1)^2 \pi^2} - \frac{\xi_{2k}^2 - b_k^2}{\xi_{2k}^2 + (2j+1)^2 \pi^2} \right]$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

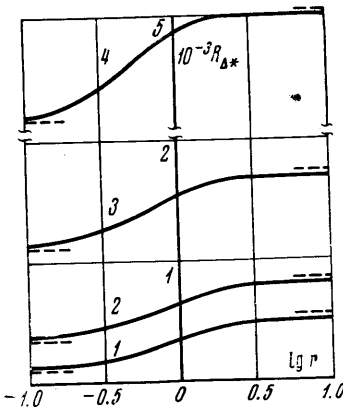
Далее из условия ортогональности выбранной полной системы функции $\sin(2m+1)\pi x \cos(2n+1)(\pi/r)y$ к функции в левой части уравнения (4.2) получаем характеристическое уравнение для определения критического значения числа Рэлея

$$\|\delta_{mi} \delta_{nj} / R + b_{ij}\| = 0$$

$$(4.8) \quad b_{ij} = \frac{\sum_{m,n} (C_{2j}^{(mn)} M_{ij} + (-1)^i D_{2i}^{(mn)} B_{ji} + K_{mn} \delta_{mi} \delta_{nj})}{(2i+1)^2 \pi^2 + (2j+1)^2 \pi^2 / r^2}$$

$$M_{ij} = 4(-1)^i \xi_{2j} \left[\frac{1}{\xi_{2j}^2 + (2i+1)^2 \pi^2} - \frac{g_j}{\xi_{1j}^2 + (2i+1)^2 \pi^2} \right]$$

Таким образом, схема решения задачи такова. Для каждой пары значений m и n решается система линейных алгебраических уравнений (4.7)



Фиг. 4

и определяются значения $C_{2k}^{(mn)}$ $D_{2k}^{(mn)}$. Затем находятся собственные значения матрицы (4.8), минимальное из которых и определяет критическое число Рэлея. В конкретных расчетах ряды (4.5) ограничивались конечным числом членов ($m, n=0, 1, \dots, N, N=4$). Выбранное число членов обеспечивало достаточную точность в определении критического значения числа Рэлея, что проверялось по изменениям R_* при увеличении N от $N=4$ до $N=6$ и по значениям проекций соответствующего собственного вектора.

На фиг. 4 представлена зависимость критического числа Рэлея от соотношения длин сторон, образующих поперечное сечение канала, при различных значениях числа Гартмана. Числа Гартмана и Рэлея определялись по характерному размеру $\Delta = h_1 h_2 (h_1^2 + h_2^2)^{-1/2}$. Удобство подобного определения H и R заключается в том, что в предельных случаях $r \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$ решение задачи для канала прямоугольного сечения автома-

тически переходит в решение, отвечающее плоскому каналу с изоляционными и электродными стенками, соответственно. На фиг. 4 эти предельные решения, соответствующие плоским каналам, отмечены пунктирными линиями.

При фиксированном числе Гартмана H_{Δ} устойчивость равновесия жидкости возрастает с увеличением параметра r . Отметим, что, начиная со значений $r \geq 2$, критическое число Рэлея сохраняется почти постоянным, причем эта закономерность проявляется тем раньше, чем больше число Гартмана.

Автор благодарен Г. А. Любимову за внимание к работе.

Поступила 24 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйсмонт О. А. О конвективном движении проводящей жидкости с током в поперечном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
2. Эйсмонт О. А. О влиянии джоулевой диссипации на конвективную неустойчивость проводящей жидкости с током в магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
3. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Гостехиздат, 1952.
4. Ostrach S. On the flow, heat transfer and stability of viscous fluids subject to body forces and heated from below in vertical channels, in «50 Jahre Grenzschichtforschung». Berlin, 1956.
5. Yih C.-S. Thermal instability of viscous fluids. Quart. Appl. Math., 1959, vol. 17, No. 1.
6. Wooding R. A. Instability of a viscous liquid of variable density in a vertical Hele — Shaw cell. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt 4.
7. Dunwoody N. T. Instability of a viscous fluid of variable density in a magnetic field. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, pt 1.
8. Yih C.-S. Gravitational instability of a viscous fluid in a magnetic field. J. Fluid. Mech., 1965, vol. 22, pt 3.
9. Регурер С. А. О конвективном движении проводящей жидкости между параллельными вертикальными пластинами в магнитном поле. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 1.
10. Yu C. P. Thermal instability of a magnetofluid in a vertical rectangular channel. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 4.
11. Pellew A., Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1940, vol. 176, No. 966.