

**ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В НЕСЖИМАЕМОЙ  
ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕПАДАХ  
ДАВЛЕНИЯ И ВДУВЕ**

**Ю. В. ЛАПИН, В. Г. ШАРОВ**

(Ленинград)

Применение численных методов для расчета турбулентного пограничного слоя оказывается во многих случаях затруднительным в связи с отсутствием детальных сведений о характере распределения параметров в начальном сечении турбулентного участка пограничного слоя.

Напротив, для интегральных методов расчета достаточно задание лишь интегральных параметров пограничного слоя в начальном сечении. В связи с этим важное значение приобретает разработка интегральных методов расчета, не уступающих по точности численным методам.

В работе излагается интегральный метод расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости при больших продольных перепадах давления и вдуве (отсосе). Принимается двухслойная схема турбулентного пограничного слоя, согласно которой слой делится на пристеночную и внешнюю области.

В пристеночной области для эффективной вязкости принимается гипотеза Прандтля — Ван-Дриста, модифицированная Себеси. Распределение напряжений трения и профиль скоростей в этой области находятся исходя из «закона стенки». Во внешней области для турбулентной вязкости принимается гипотеза Клаузера, а профиль скоростей определяется путем интегрирования уравнения движения в переменных Мизеса, упрощенного допущением о локальном подобии.

Семейство профилей скорости во всем пограничном слое получается в результате сращивания профилей в пристеночной и внешней областях. При сращивании выполняются условия непрерывности скорости, первой производной от скорости по поперечной координате и турбулентной вязкости. Трение находится из интегрального соотношения импульсов. Приводятся результаты расчетов и их сопоставления с опытными данными, свидетельствующие о высокой точности метода.

**1. Постановка задачи.** Осредненные уравнения переноса количества движения и неразрывности, описывающие стационарное, плоское течение в турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости на проницаемой поверхности и граничные условия на ней запишем в форме

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \tau = (\mu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$(1.2) \quad \partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$$

$$(1.3) \quad u = 0, \quad v = \pm v_w \quad (y = 0), \quad u \rightarrow u_e \quad (y \rightarrow \infty)$$

Знак минус во втором из условий (1.3) соответствует отсосу, а знак плюс — вдуву в пограничный слой жидкости, обладающей свойствами среды, которая движется во внешнем потоке.

Здесь и далее  $x, y$  — координаты, отсчитываемые вдоль поверхности и по нормали к ней;  $u, v$  — проекции скорости на оси  $x, y$ ;  $\tau$  — напряжение трения;  $\mu, \varepsilon$  — коэффициенты динамической молекулярной и турбулентной вязкости;  $\rho$  — плотность жидкости; индексами  $e$  и  $w$  обозначены параметры на внешней границе пограничного слоя и на стенке соответственно.

Согласно существующим представлениям о структуре турбулентного пограничного слоя разобьем весь слой на две основные области: внутреннюю (пристеночную) область, в которой приближенно выполняется «закон стенки»

$$(1.4) \quad \varphi = \varphi(\eta), \quad \varphi = u / v_*, \quad \eta = y v_* / \nu, \quad v_* = (\tau_w / \rho)^{1/2}, \quad \nu = \mu / \rho$$

и внешнюю или область «закона следа».

Для коэффициента турбулентной вязкости во внутренней области ( $\varepsilon_i$ ) примем гипотезу Прандтля с демпфирующим множителем Ван-Дрифта, модифицированную в [1]. Эта гипотеза, записанная в универсальных переменных  $\varphi$ ,  $\eta$ , имеет вид

$$(1.5) \quad \varepsilon_i = \mu \kappa^2 \eta^2 (1 - e^{-\eta/A})^2 d\varphi / d\eta$$

$$(1.6) \quad A = 26 \left[ -\frac{P_*}{B_*} (e^{B_* \eta_L} - 1) + e^{B_* \eta_L} \right]^{-1/2}, \quad P_* = \frac{u_* \mu}{\rho \nu_*^3} \frac{du_*}{dx}.$$

Здесь  $B_* = \pm v_w / \nu_*$  — параметр вдува (отсоса),  $\eta_L$  — значение универсальной координаты  $\eta$  на границе ламинарного подслоя,  $\kappa = 0.4$  — универсальная постоянная турбулентности.

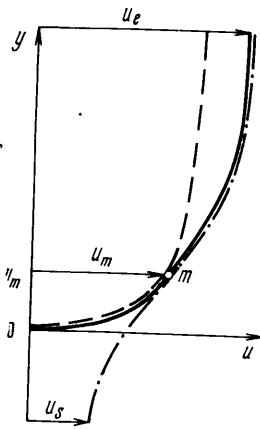
Для  $\eta_L$  Себеси принимает значение, равное  $\eta_L = \alpha = 11.8$ , что означает принятие допущения об отсутствии влияния вдува (отсоса) на толщину ламинарного подслоя ( $\alpha$  — универсальная постоянная турбулентности). Учет влияния вдува (отсоса) приводит к следующей зависимости  $\eta_L$  от параметра  $B_*$  [2]:  $\eta_L \exp(1/2 B_* \eta_L) = \alpha$ .

При  $B_* = 0$  (1.6) принимает вид  $A = 26(1 - \eta_L P_*)^{-1/2}$ .

Для коэффициента турбулентной вязкости во внешней области примем гипотезу Клаузера [3]

$$(1.7) \quad \varepsilon_o = \rho k u_* \delta^*, \quad \delta^* = \int_0^{\infty} (1 - U) dy, \quad U = u/u_*, \quad k = 0.0168$$

Семейство профилей скорости в пограничном слое найдем путем сращивания двух различных семейств профилей, получаемых в областях закона стенки и закона следа. Ниже излагаются способы получения этих семейств и условия их сращивания. Схематически процесс сращивания показан на фиг. 1. Профиль скоростей для внутренней области показан пунктиром, для внешней — штрихпунктиром; результирующий профиль скоростей изображен сплошной линией;  $m$  — точка сращивания профилей. Подобный подход позволяет значительно расширить возможности интегральных методов особенно в описании таких «тонких» характеристик пограничного слоя, каковыми являются профили скорости.



Фиг. 1

## 2. Профили скоростей в пристеночной области.

При построении семейства профилей в этой области получим выражение для распределения касательных напряжений. Для этого выразим поперечную составляющую скорости  $v$  через продольную скорость  $u$ . Интегрируя уравнение неразрывности (1.2) по  $y$  от 0 до  $y$  и используя второе из граничных условий (1.3), найдем

$$(2.1) \quad v = v_w - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy$$

Подставим в (1.1) вместо  $v$  его значение из (2.1) и произведем интегрирование этого уравнения по  $y$  от 0 до  $y$

$$(2.2) \quad \tau = \tau_w + \rho \left[ v_w u - u_* \frac{du_*}{dx} y + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u^2 dy - u \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy \right]$$

Принимая, что в пристеночной области приближенно выполняется закон стенки (1.4), преобразуем (2.2) с учетом равенств (1.4) к виду

$$(2.3) \quad \frac{\tau}{\tau_w} = 1 + BU + v \frac{\xi^3}{v_*} \left[ \frac{d(\ln v_*)}{dx} \int_0^U U^2 \frac{d\eta}{d\varphi} dU - \frac{\eta}{\xi} \frac{d(\ln u_e)}{dx} \right]$$

$$B = \frac{v_w^2}{u_e c_f}, \quad \xi = \frac{u_e}{v_*}, \quad c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_e^2}$$

Равенство (2.3) выражает распределение касательных напряжений в пристеночной области.

В выражении для напряжения трения перейдем к универсальным переменным  $\varphi$ ,  $\eta$  и подставим соотношение для турбулентной вязкости  $\varepsilon_0$  (1.5). Разрешая полученное равенство относительно  $d\eta/d\varphi$ , найдем

$$(2.4) \quad \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{2\kappa^2 \eta^2 (1 - e^{-\eta/A})^2}{[1 + 4\kappa^2 \eta^2 (1 - e^{-\eta/A})^2 (\tau/\tau_w)]^{1/2} - 1}$$

Интегрируя (2.4) по  $\varphi$  с использованием условия  $\eta=0$  при  $\varphi=0$ , получим

$$(2.5) \quad \eta = \int_0^\varphi \frac{2\kappa^2 \eta^2 (1 - e^{-\eta/A})^2 d\varphi}{[1 + 4\kappa^2 \eta^2 (1 - e^{-\eta/A})^2 (\tau/\tau_w)]^{1/2} - 1}$$

Соотношение (2.5) совместно с (2.3) описывает семейство профилей скорости в пристеночной области. Независимым параметром этого семейства является скорость  $v_*$ . Равенство (2.5) следует рассматривать как приближенное выражение закона стенки, который строго выполняется лишь при условиях  $A = \text{const}$ ,  $\tau = \text{const} = \tau_w$ .

Многочисленные опытные данные по профилям скорости свидетельствуют о том, что протяженность области, в которой приближенно справедлив этот закон, составляет на плоской пластине  $\sim 20\%$  толщины всего слоя. С ростом положительных перепадов давления эта область сокращается и в непосредственной близости от точки отрыва, по-видимому, полностью исчезает.

**3. Профили скоростей во внешней области.** Течение во внешней области пограничного слоя близко по характеру к течениям в струях; влиянием динамической вязкости по сравнению с турбулентной можно пренебречь. Для определения профиля скоростей в этой области обратимся к уравнению движения в переменных Мизеса.

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u_0}{u} \frac{du_0}{dx} = \rho \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \varepsilon_0 u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right), \quad \psi = \rho \int_{y_m} u dy + \psi_m$$

Здесь  $\varepsilon_0$  — турбулентная вязкость, выражаемая равенством (1.7).

Принимая во внимание, что  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x)$ , перейдем в (3.1) к новым переменным

$$(3.2) \quad \omega = \psi / \sqrt{\xi}, \quad \xi = \rho \int_0^x \varepsilon_0 u_0 dx$$

$$(3.3) \quad \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\omega}{2} \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial \omega} \left( U \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) - \frac{1-U^2}{U} \beta = 0, \quad \beta = \frac{d(\ln u_0)}{d(\ln \xi)}$$

Для дальнейших упрощений примем допущение о локальном подобии, т. е. будем пренебрегать в (3.3), членами, содержащими производные от  $U$  по  $\xi$ , сохраняя последний член в этом уравнении и считая  $\beta$  параметром. Для обоснования этого допущения напомним, что подобный прием, предложенный в [4], широко и не без успеха применялся при расчетах ламинарного пограничного слоя. В работе [5], посвященной исследованию ламинарного смешения двух потоков при наличии продольного перепада давления, гипотеза локального подобия была подтверждена численными расчетами. Как показали эти расчеты, параметр  $\beta$  слабо влияет на профиль скоростей в зоне смешения.

При принятом допущении (3.3) становится уравнением в обыкновенных производных и может быть записано с граничными условиями в виде (штрих — производная по  $\omega$ )

$$(3.4) \quad \frac{U''}{U'} + \frac{U'}{U} + \frac{\omega}{2U} + \left( \frac{1}{U^2} - 1 \right) \frac{\beta}{U'} = 0$$

$$(3.5) \quad U \rightarrow 1 (\omega \rightarrow +\infty) \quad U \rightarrow U_s (\omega \rightarrow -\infty)$$

Интегрируя (3.4) дважды по  $\omega$  от 0 до  $\omega$  и используя граничные условия (3.5), будем иметь

$$(3.6) \quad U = 1 - (1 - U_s) \frac{I(+\infty) - I(\omega)}{I(+\infty) - I(-\infty)}$$

$$(3.7) \quad I(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{1}{U} \exp \left\{ - \int_0^{\omega} \left[ \frac{\omega}{2U} + \left( \frac{1}{U^2} - 1 \right) \frac{\beta}{U'} \right] d\omega \right\} d\omega$$

Соотношение (3.6) описывает семейство профилей скорости во внешней части пограничного слоя,  $U_s$  является свободным параметром этого семейства, выбираемым из условий стыковки профиля скорости (3.6) с профилем (2.5).

Используя определения функции тока  $\psi$  (3.1) и переменной  $\omega$  (3.2), нетрудно получить следующие формулы перехода от переменных Мизеса к физическим переменным:

$$(3.8) \quad y = \frac{\sqrt{\xi}}{\rho} \int_{\omega_m}^{\omega} \frac{d\omega}{u} + y_m$$

Здесь индексом  $m$  обозначены значения величин в точке срачивания (фиг. 1)

Переменная  $\xi$ , выражаемая вторым из равенств (3.2), после подстановки в последнее значения  $\varepsilon_0$  из (1.7), имеет вид

$$(3.9) \quad \xi = \rho^2 k \int_0^x u_*^2 \delta^* dx, \quad k = 0.0168$$

**4. Условия срачивания профилей скорости.** Из полученных семейств профилей скорости во внутренней (2.5) и внешней (3.6) областях составим профиль скоростей во всем пограничном слое. При проведении срачивания этих профилей будем считать коэффициент трения на стенке  $c_f$  фиксированным. В этом случае при срачивании необходимо определить скорость в точке срачивания  $u_m$  и параметр  $U_s$ . Для нахождения этих величин потребуем, чтобы в точке срачивания

$$(4.1) \quad \varepsilon_i(y_m) = \varepsilon_0(y_m), \quad (\partial u / \partial y)_{y=y_m-0} = (\partial u / \partial y)_{y=y_m+0}$$

Условие непрерывности производных от скорости по поперечной координате в принятых для описания профилей скорости переменных преобразуется к виду

$$(4.2) \quad \left(\frac{dU}{d\omega}\right)_m = \frac{\sqrt{\xi}}{\mu\xi^2 U_m} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_m$$

Процедура сращивания профилей в общем случае осуществляется методом последовательных приближений по  $\delta^*$ . При заданных  $c_f$  и  $\delta^*$ , что имеет место в начальном сечении ( $x=x_t$ ), турбулентная вязкость во внешней области  $\varepsilon_0$  может быть определена по соотношению (1.7). Форма профиля скорости в пристеночной области (2.5) однозначно определяется величиной коэффициента трения  $c_f$ . Таким образом, при заданном  $c_f$  могут быть сразу определены все характеристики, в том числе и вязкость  $\varepsilon_i$ , внутренней области. Точка на профиле внутренней области, в которой выполняется условие  $\varepsilon_i = \varepsilon_0$  и будет точкой сращивания. В этой точке из расчета профиля внутренней области известны скорость  $U_m$  и производная  $(d\varphi/d\eta)_m$ . По известным  $U_m$  и  $(d\varphi/d\eta)_m$  по соотношению (4.2) определяется производная  $(dU/d\omega)_m$ , которая, как это следует из (3.6), выражается равенством

$$(4.3) \quad dU/d\omega = (1-U_s)I'(\omega)/(I(+\infty)-I(-\infty))$$

Путем варьирования свободного параметра  $U_s$  подбирается такой профиль во внешней области, который в точке со значением скорости  $U_s$  имеет заданный наклон  $(dU/d\omega)_m$ . Таким образом, оказываются выполненными все условия сращивания (4.1). При расчете профиля скорости в сечении, где  $\delta^*$  неизвестна, необходимо применение итераций по  $\delta^*$ .

Полученный описанным способом профиль скоростей, как это видно из (2.5) и (3.6), зависит от  $B$ ,  $du_e/dx$ ,  $c_f$  (или  $v_*$ ),  $dc_f/dx$  (или  $dv_*/dx$ ). Если первые два параметра обычно задаются, то зависимость  $c_f(x)$  должна быть определена из интегрального соотношения импульсов (вместо  $B$  можно задавать относительную скорость вдува (отсоса)  $v_w/u_e$ , но целесообразнее задавать  $B$ ).

**5. Расчет трения.** Обратимся к интегральному соотношению импульсов [2]

$$(5.1) \quad \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{d(\ln u_e)}{dx} \delta^{**} (2+H) = \frac{c_f}{2} (1+B)$$

$$\delta^{**} = \int_0^x U(1-U) dy, \quad H = \delta^*/\delta^{**}$$

Введением новой переменной [2]

$$(5.2) \quad \theta = \rho u_e \delta^{**} e^S, \quad S = \int_{x_t}^x \frac{d(\ln u_e)}{dx} (1+H) dx$$

сведем его к виду

$$(5.3) \quad d\theta/dx = 1/2 \rho u_e c_f (1+B) e^S$$

Интегрируя (5.3) и возвращаясь от  $\theta$  к  $\delta^{**}$ , получим

$$(5.4) \quad u_e \delta^{**} = e^{-S} \left[ \frac{1}{2} \int_{x_t}^x u_e c_f (1+B) e^S dx + u_{et} \delta_{t}^{**} \right].$$

Индексом  $t$  здесь обозначены величины в точке перехода (или в начальном сечении).

Толщину потери импульса  $\delta^{**}$  представим в соответствии с принятой двухслойной схемой пограничного слоя в виде суммы двух интегралов. После несложных преобразований найдем

$$(5.5) \quad \delta^{**} = \delta_i^{**} + \delta_o^{**} = \frac{2\mu}{\rho u_e c_f} \int_0^{u_m} U(1-U) \frac{d\eta}{d\varphi} dU + \frac{\sqrt{\xi}}{\rho u_e} \int_{\omega_m}^{\infty} (1-U) d\omega$$

Подставляя (5.5) в (5.4) и разрешая полученное соотношение относительно  $c_f$ , будем иметь

$$(5.6) \quad c_f = 2\mu e^s \int_0^{u_m} U(1-U) \frac{d\eta}{d\varphi} dU \left[ \frac{1}{2} \rho \int_{x_i}^x u_e c_f (1+B) e^s dx - \sqrt{\xi} e^s \int_{\omega_m}^{\infty} (1-U) d\omega + \rho u_e \delta_i^{**} \right]^{-1}.$$

Необходимую для определения формпараметра  $H$  и  $\varepsilon_0$  толщину вытеснения  $\delta^*$  также удобно представить в виде суммы двух интегралов

$$(5.7) \quad \delta^* = \delta_i^* + \delta_o^* = \frac{2\mu}{\rho u_e c_f} \int_0^{u_m} (1-U) \frac{d\eta}{d\varphi} dU + \frac{\sqrt{\xi}}{\rho u_e} \int_{\omega_m}^{\infty} \left( \frac{1}{U} - 1 \right) d\omega$$

Величина  $d\eta/d\varphi$  выражается равенством (2.4), а  $\xi$  — равенством (3.9).

Уравнение (5.6) вместе с полученным ранее семейством профилей скорости, содержащим трение в качестве единственного неопределенного параметра, позволяет вычислить коэффициент трения  $c_f$  методом последовательных приближений.

Изложенный метод расчета требует примерно таких же затрат машинного времени, как и численный метод интегрирования уравнений пограничного слоя в частных производных.

**6. Результаты расчетов.** По изложенному методу были проведены систематические расчеты. Результаты этих расчетов сравнивались с опытными данными.

На фиг. 2 приведены результаты расчетов профилей скорости на плоской пластине ( $u_\infty = 51$  м/сек) при различных интенсивностях вдува, там же приведены опытные данные [6] (кривые 1–4 соответствуют  $v_w/u_e$ , равным 0.0039, 0.00993, 0.0147). Как видно из фигуры, использованное в настоящей работе семейство профилей скорости очень хорошо описывает их деформацию по мере увеличения параметра вдува. При  $v_w/u_e = 0.0147$  получен предотрывный профиль, соответствующий значению формпараметра  $H = 2.1$ .

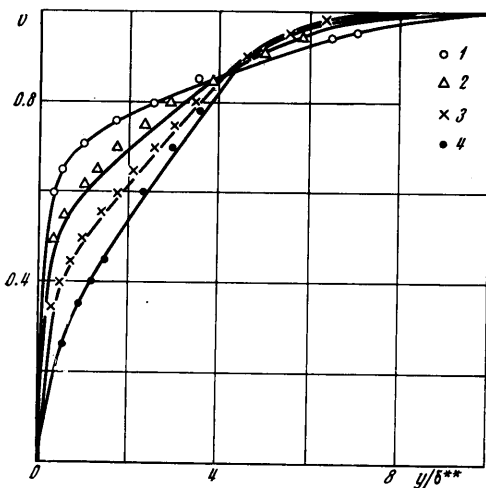
На рис. 3 представлена зависимость напряжения трения ( $\tau/\tau_w$ ) от скорости  $U$  при различных значениях параметра вдува  $B$ . Кривые 1–6 соответствуют  $B$ , равным 0.08, 3.25, 5, 10, 20. Там же приведены опытные данные из работы [7]. Соответствие расчетных и опытных данных следует признать хорошим.

Обратимся к результатам расчетов течений с продольным перепадом давления. Отметим, что номера опытов, с которыми проводится сравнение, соответствуют их значениям, принятым в материалах стэнфордской конференции ([8], т. 2).

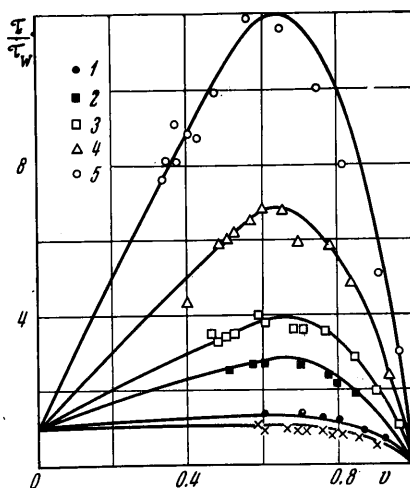
На фиг. 4 приводится распределение коэффициента трения на поверхностях, обтекаемых с сильным отрицательным (кривая 1, опыт 1300) и умеренным положительным (кривая 2, опыт 1100). Как видно из фигуры соответствие расчетных (сплошные кривые) и опытных (точки) данных очень хорошее.

На фиг. 5 результаты расчета по изложенному методу (сплошная кривая) сравниваются с опытными данными (опыт 2100). Расхождение между расчетной кривой и опытными данными наблюдается лишь в области течения, непосредственно перед отрывом пограничного слоя. Прерывистой кривой изображены результаты, полученные методом [2], в основе которого лежит допущение  $\tau = \text{const} = \tau_w$ , а профиль скоростей, полученный для внутренней области, распространялся на весь пограничный слой.

Результаты расчетов по изложенному интегральному методу сравнивались с результатами численного интегрирования исходных дифференциальных уравнений в частных производных, замыкаемых с помощью тех же гипотез турбулентности. Эти

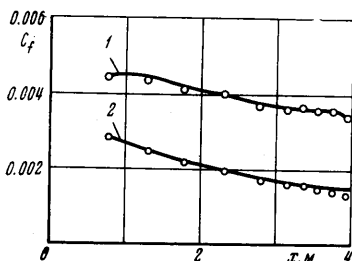


Фиг. 2

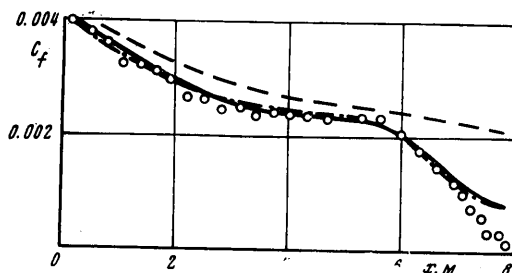


Фиг. 3

результаты оказались практически совпадающими, в том числе и для течений с сильными положительными перепадами давления (штрихпунктирная кривая на



Фиг. 4



Фиг. 5

фиг. 5), что свидетельствует об обоснованности принятых при построении интегрального метода немногочисленных допущений.

В заключение заметим, что настоящий метод расчета легко обобщается на более сложные течения (течения сжимаемого газа с теплообменом и т. п.).

Поступила 29 IV 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Себеси Т. Турбулентное течение у пористой стенки при наличии градиента давления. Ракетная техника и космонавтика, 1970, № 12.
2. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М., «Наука», 1970.
3. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. Сб. «Проблемы механики», вып. 2. Изд-во иностр. лит., 1959.
4. Лиз Л. Ламинарный теплообмен на тупоносых телах при больших сверхзвуковых скоростях. Сб. «Научные проблемы искусственных спутников». М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Мурзинов И. Н., Шинкин Г. П. Ламинарное смешение однородных потоков при наличии градиента давления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
6. Мугалев В. П. Экспериментальное исследование дозвукового турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом. Изв. вузов, Сер. авиац. техн., 1959, № 3.
7. Вулдридж К. Е., Муцци Р. Дж. Измерения турбулентности в пограничном слое с подводом массы и горением. Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 11.
8. Computation of turbulent boundary layer. 1968. Proc. AFOSR — IFR — Stanford Conference, 1969, vol. 1, 2.