

5. Лосев С. А., Генералов Н. А. К исследованию явлений возбуждения колебаний и распада молекул кислорода при высоких температурах. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 5.
6. Финни Р. Безразмерные решения для течений с колебательной релаксацией. Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 2.
7. Генералов Н. А., Козлов Г. И., Селезнева И. К. Об инверсной заселенности молекул CO_2 в расширяющихся потоках газа. ПМТФ, 1971, № 5.
8. Басов Н. Г., Михайлов В. Г., Ораевский А. Н., Щеглов В. А. Получение инверсной населенности молекул в сверхзвуковом потоке бинарного газа в сопле Лавалы. Ж. техн. физ., 1968, т. 38, вып. 12.
9. Лосев С. А., Шаталов О. П., Яловик М. С. О влиянии ангармоничности на время релаксации при адиабатическом возбуждении и дезактивации колебаний молекул. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 3.
10. Bray K. N. C. Vibrational relaxation of anharmonic oscillator molecules. 2. Non-isothermal conditions. J. Phys. Ser. B: Atom. Molec. Phys., 1970, vol. 3, No. 11.

УДК 622.276.031:532:5

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ К ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГАЛЕРЕЕ В ДВУХСЛОЙНОМ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

С. Н. БАГИР-ЗАДЕ, И. А. НАСРУЛЛАЕВ

(Баку)

В связи с исследованиями фильтрации жидкости в нефтяных пластах с трещинными и трещиновато-пористыми типами коллекторов рассматривается нестационарная фильтрация однородной жидкости в двухслойном пласте большой протяженности с различными значениями непроницаемостей системы трещин пропластков.

Движение однородной жидкости в трещиновато-пористом пласте описывается уравнениями [1-3]

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial \eta^2} - \frac{1-\omega}{k_i} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\omega}{k_i} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \tau}$$

$$(1-\omega) \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \tau} = \lambda (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}), \quad i=1, 2$$

$$u_i^{(j)} = P_0 - P_i^{(j)}(\xi, \eta, \tau), \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{z}{l}, \quad \lambda = \alpha l^2 \frac{k_i^{(1)}}{k_i^2}$$

$$(2) \quad \omega = \frac{m_i^{(2)} \beta_i^{(2)}}{m_i^{(1)} \beta_i^{(1)} + m_i^{(2)} \beta_i^{(2)}}, \quad \tau = \frac{k_i^{(2)} t}{\mu l^2 (m_i^{(1)} \beta_i^{(1)} + m_i^{(2)} \beta_i^{(2)})}$$

$$k_i = \begin{cases} 1, & i=1 \\ k_0 = \frac{k_2^{(2)}}{k_1^{(2)}}, & i=2 \end{cases}$$

Здесь α — коэффициент обмена жидкостью между системами блоков и трещин среды, P_0 и $P(\xi, \eta, \tau)$ — начальное и текущее давления, k и μ — проницаемость среды и вязкость жидкости, m и β — пористость и сжимаемость пласта, t — время, l — характерная длина, x и z — горизонтальная и вертикальная координаты. Верхние индексы относятся соответственно к системам блоков 1 и трещин 2 среды, а нижние — к пропласткам. Начальное и граничные условия для (1) имеют вид

$$(3) \quad u_i^{(1)}(\xi, \eta, 0) = u_i^{(2)}(\xi, \eta, 0) = 0, \quad i=1, 2$$

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} u_1^{(2)}(\xi, b_1, \tau) = \frac{\partial}{\partial \eta} u_2^{(2)}(\xi, -b_2, \tau) = 0, \quad b = \frac{h}{l}$$

$$(5) \quad u_1^{(2)}(\xi, 0, \tau) = u_2^{(2)}(\xi, 0, \tau), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} u_1^{(2)}(\xi, 0, \tau) = k_0 \frac{\partial}{\partial \eta} u_2^{(2)}(\xi, 0, \tau)$$

$$(6) \quad u_1^{(2)}(\infty, \eta, \tau) = u_2^{(2)}(\infty, \eta, \tau) = 0$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} u_i^{(2)}(0, \eta, \tau) = \begin{cases} -\mu Q_1/k_1^{(2)} b_1 = q_1, & 0 \leq \eta \leq b_1, \quad i=1 \\ -\mu Q_2/k_2^{(2)} b_2 = q_2, & -b_2 \leq \eta < 0, \quad i=2 \end{cases}$$

После преобразования Лапласа и косинус-преобразования Фурье из (4) с учетом (3), (6), (7) можно получить

$$(8) \quad \frac{d^2 U_i}{d\eta^2} - \left(n^2 + \frac{S}{k_i} \right) U_i(n, \eta, s) - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{q_i}{s} = 0, \quad i=1, 2$$

$$(9) \quad S = s[\omega(1-\omega)s + \lambda] [(1-\omega)s + \lambda]^{-1}$$

где s и n — параметры преобразований Лапласа и Фурье, $U(\xi, \eta, s)$ — лапласово изображение $u(\xi, \eta, \tau)$, а верхний индекс 2 опущен. Решения уравнений (8), удовлетворяющих условиям (4), (5)

$$(10) \quad U_1(n, \eta, s) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{k_0 \sigma_2}{s} \left(\frac{q_1}{\sigma_1^2} - \frac{q_2}{\sigma_2^2} \right) \frac{\text{sh } \sigma_2 b_2 \text{ ch } \sigma_1 (\eta - b_1)}{\Delta(n, S)} - \frac{q_1}{s \sigma_1^2} \right]$$

$$(11) \quad U_2(n, \eta, s) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{\sigma_2}{s} \left(\frac{q_2}{\sigma_2^2} - \frac{q_1}{\sigma_1^2} \right) \frac{\text{sh } \sigma_1 b_1 \text{ ch } \sigma_2 (\eta + b_2)}{\Delta(n, S)} - \frac{q_2}{s \sigma_2^2} \right]$$

$$(12) \quad \Delta(n, S) = \sigma_1 \text{ sh } \sigma_1 b_1 \text{ ch } \sigma_2 b_2 + k_0 \sigma_2 \text{ sh } \sigma_2 b_2 \text{ ch } \sigma_1 b_1, \quad \sigma_i^2 = n^2 + S/k_i$$

Для осуществления перехода к оригиналам в (10), (11) воспользуемся в отличие от работ [4, 5] тем обстоятельством, что функции $sU_i(n, \eta, s)$ являются дробно-рациональными относительно аргумента $S=p(s)$ и имеют простые полюсы в точках, определяемых лишь корнями уравнения

$$(13) \quad \Delta(n, S) = 0$$

Обозначив эти корни через $-p_m^2$ и разложив функции $sU_i(n, \eta, s)$ по этим корням в ряд, можно написать

$$(14) \quad sU_i(n, \eta, p) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} (p + p_m^2)^{-1}, \quad i=1, 2$$

$$(15) \quad A_m^{(1)} = \left[q_1 \left(1 + \frac{k_0 - 1}{\delta_1^2} n^2 \right) - k_0 q_2 \right] \frac{\text{sh } \delta_2 b_2 \text{ ch } \delta_1 (\eta - b_1)}{\delta_2 \Delta'(n, -p_m^2)}$$

$$(16) \quad A_m^{(2)} = \left[q_2 \left(k_0 - \frac{k_0 - 1}{\delta_2^2} n^2 \right) - q_1 \right] \frac{\text{sh } \delta_1 b_1 \text{ ch } \delta_2 (\eta + b_2)}{\delta_1 \Delta'(n, -p_m^2)}$$

$$(17) \quad \Delta'(n, -p_m^2) = \frac{\text{sh } \delta_2 b_2}{2\delta_1 \delta_2 \text{ sh } \delta_1 b_1} \left[(1 - k_0) n^2 \frac{\text{sh } 2\delta_1 b_1}{2\delta_1} - \right. \\ \left. - (b_1 + b_2) (k_0 n^2 - p_m^2) \text{ch}^2 \delta_1 b_1 + (b_2 \delta_1^2 / k_0 + b_1 k_0 \delta_2^2) \text{sh}^2 \delta_1 b_1 \right]$$

$$\delta_1 = n^2 - p_m^2, \quad \delta_2 = n^2 - p_m^2 / k_0, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Следует отметить, что коэффициенты $A_m^{(i)}$ найдены для общего случая ($k_0 \neq 0, 1, \infty; b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$), при котором значения $-n^2$ и $-k_0 n^2$ не являются полюсами функций $sU_i(n, \eta, p)$. Исследование уравнения (12) показывает, что в интервале [6]

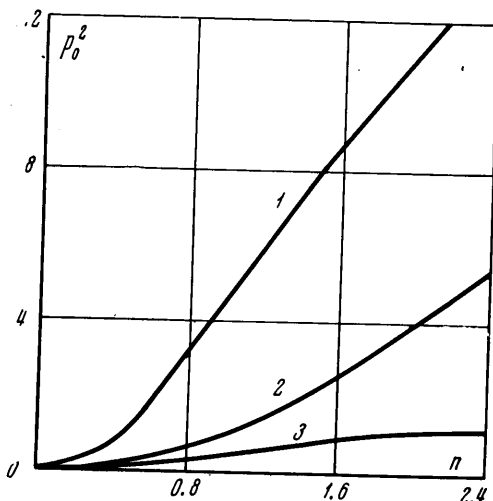
$$(18) \quad -\min\{[n^2 + (\pi/2b_1)^2], \quad k_0[n^2 + (\pi/2b_2)^2]\} < p < 0$$

оно имеет только один корень, который обозначим через $-p_0^2$. Посредством последовательного приближения для этого корня можно получить следующее аналитическое выражение

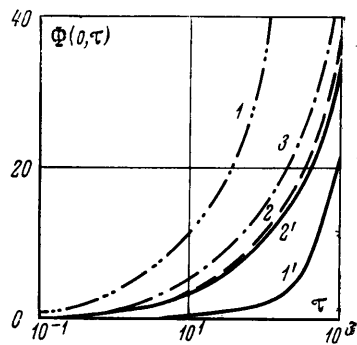
$$(19) \quad p_0^2 = \frac{b_1 + k_0 b_2}{b_1 + b_2} n^2 - \frac{k_0 b_1 + b_2}{3k_0} \frac{b_1^2 b_2^2}{(b_1 + b_2)^3} (1 - k_0)^2 n^4 + \dots$$

точность которого при малых значениях n является достаточно высокой, а при больших n значения этого корня уточнялись точным выражением (13). Найденные таким способом значения p_0^2 приведены на фиг. 1 при $b_1 = b_2 = 0.5, l = h_1 + h_2$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют $k_0 = 10, 1$ и 0.1 .

Для выявления эффекта, вызванного трещиноватостью коллектора необходимо сравнить показатели процесса разработки трещиновато-пористого пласта с таковыми для гранулярного. Поэтому, подвергая (14) формулам обращений Лапласа и обрат-



Фиг. 1



Фиг. 2

ного косинус-преобразования Фурье, при $\omega=1$, $S=s$ будем иметь

$$(20) \quad U_i(\xi, \eta, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\varphi_i(n, \eta) - \sum_{m=0}^{\infty} p_m^{-2} A_m^{(i)} \exp(-p_m^2 \tau) \right] \cos n\xi \, dn$$

$$(21) \quad \varphi_i(n, \eta) = \frac{(-1)^i k_0 (q_2 - q_1) \operatorname{sh} n b_j \operatorname{ch} n [\eta + (-1)^i b_i]}{\operatorname{sh} n b_1 \operatorname{ch} n b_2 + k_0 \operatorname{sh} n b_2 \operatorname{ch} n b_1} n^{-2} - q_i n^{-2} \quad i, j=1, 2; i \neq j$$

Точное решение (20) является неудобным для проведения численных расчетов. Это связано с отсутствием аналитического выражения для корней p_m^2 при $m > 0$ и с трудностью проведения вычислений при увеличении значений подынтегральных функций при $n \rightarrow 0$ (особенно при больших значениях τ). Однако проведение соответствующих операций с учетом (18) и (19) позволяет частично раскрыть интеграл в (20), и окончательное решение с опусканием подробных выкладок сводится к виду

$$(22) \quad u_i^*(\xi, \eta, \tau) = \frac{u_i(\xi, \eta, \tau)}{-q_1} = \Phi(\xi, \tau) - \frac{2}{\pi q_1} \int_0^{\infty} \cos n\xi \left[\varphi_i(n, \eta) - \frac{A_0^{(i)}}{p_0^2} e^{-p_0^2 \tau} - \frac{B_0}{p_*^2} (1 - e^{-p_*^2 \tau}) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m^{(i)}}{p_m^2} e^{-p_m^2 \tau} \right] dn$$

$$(23) \quad \Phi(\xi, \tau) = \frac{1+Q_0}{1+k_0 b_0} \left[2 \sqrt{\frac{T}{\pi}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4T}\right) - \xi \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{T}}\right) \right]$$

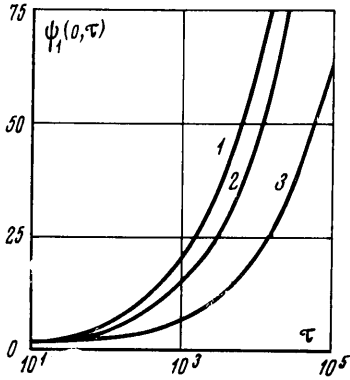
$$(24) \quad p_*^2 = \frac{b_1 + k_0 b_2}{b_1 + b_2} n^2, \quad \frac{B_0}{p_*^2} = -\frac{q_1 b_1 + k_0 q_1 b_2}{b_1 + k_0 b_2} n^{-2}, \quad T = \frac{b_1 + k_0 b_2}{b_1 + b_2} \tau$$

$$Q_0 = Q_2/Q_1, \quad b_0 = b_2/b_1$$

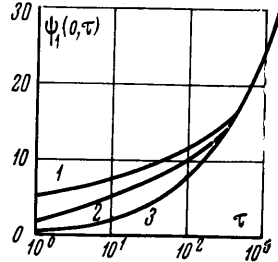
Функция $\Phi(\xi, \tau)$ из (23) определяет значимую величину функции $u_i^*(\xi, \eta, \tau)$ в (22) и характеризует процесс понижения давления в полубесконечном двухслойном гранулярном пласте при разработке его совершенной по характеру и степени вскрытия галереями со средним дебитом $(q_1 b_1 + k_0 q_2 b_2) (b_1 + k_0 b_2)^{-1}$ при упругом режиме.

Изменение этой функции во времени приведено на фиг. 2 при $\xi=0$, $Q_0=0.1$ (кривые $1'$, $2'$), $Q_0=1$ (кривые 1, 2, 3). Кривые $1'$, 1 построены при $k_0=10$, кривые $2'$, 2 — при $k_0=0.1$, кривая 3 — при $k_0=1$ (галерея совершенна, пласт однороден).

По формуле (22) подсчитано осредненное по мощности верхнего пропластка понижение давления $\Psi(\xi, \tau) = \langle u_i^*(\xi, \tau) \rangle$ у стенки несовершенной по степени вскрытия галереи ($\xi=0$). Результаты произведенных расчетов представлены кривыми фиг. 3. Кривые 1—3 соответствуют величинам отношения проницаемостей пропластков $k_0=$



Фиг. 3



Фиг. 4

$=0.1, 1, 10$. Для рассмотренного частного случая независимая от времени часть интеграла в (22) сведена к дзета-функции Римана

$$(25) \quad \int_0^{\infty} \left[\varphi_1(n, \eta) - \frac{B_0}{p^2} \right] dn = -\frac{q_1}{\pi^2} \frac{7k_0}{1+k_0} \zeta(3)$$

а оставшаяся часть подынтегрального выражения подсчитана способом Симпсона.

Теперь решим поставленную задачу для трещиновато-пористого пласта — подставим выражение S из (9) в (14)

$$(26) \quad U_i(n, \eta, S) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^{(i)}}{p_m^2} \left\{ 1 - \frac{s + \lambda_1}{s^2 + (\lambda_1 + p_m^2/\omega)s + \lambda_1 p_m^2} \right\}, \quad \lambda_1 = \lambda \omega^{-1} (1 - \omega)^{-1}$$

Осуществив переход к оригиналу по Лапласу, а затем подвергнув полученное выражение обратному косинус-преобразованию Фурье, функцию понижения давления нетрудно представить в виде

$$(27) \quad u_i(\xi, \eta, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\varphi_i(n, \eta) - \frac{A_0^{(i)}}{p_0^2} V_0(p_0^2, \tau) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m^{(i)}}{p_m^2} V_m(p_m^2, \tau) \right] \cos n\xi \, dn, \quad i=1, 2$$

$$(28) \quad V_m = \left(\operatorname{ch} \gamma_m \tau + \frac{\lambda_1 - p_m^2/\omega}{2\gamma_m} \operatorname{sh} \gamma_m \tau \right) \exp \left[- \left(\lambda_1 + \frac{p_m^2}{\omega} \right) \frac{\tau}{2} \right]$$

$$\gamma_m = 1/4 (\lambda_1 + p_m^2/\omega) - \lambda_1 p_m^2$$

Здесь также целесообразно заняться упрощением полученного выражения. Ввиду справедливости неравенства $\gamma_m > 0$ легко показать, что при $\tau \geq 10$ с достаточно высокой степенью точности справедливо соотношение

$$(29) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m^{(i)}}{p_m^2} V_m(p_m^2, \tau) = \frac{\lambda_2}{\lambda} \left[\frac{A_0^{(i)}}{p_0^2} - \frac{A_0^{(i)}}{\lambda_2 + p_0^2} - \varphi_i(n, \eta) + U_i(n, \eta, \lambda_2) \right] \exp \left(\frac{-\lambda \tau}{1 - \omega} \right)$$

$$\lambda_2 = \lambda (1 - 3\omega) (1 - \omega)^{-1}, \quad i=1, 2$$

Очевидно, что последняя сумма в (29) составляет небольшую величину, порядка λ . При выводе (29) пренебрежено членами порядка λ^2 из-за их малости, что следует из выражения (2).

С целью облегчения вычислительных работ первые два слагаемых в квадратной скобке (29) при $n \rightarrow 0$ целесообразно представить в виде

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow 0} \left[\varphi_i(n, \eta) - \frac{A_0^{(i)}}{p_0^2} V_0(p_0^2, \tau) \right] = \lim_{n \rightarrow 0} \left[\varphi_i(n, \eta) - \frac{A_0^{(i)}}{p_0^2} \right] + \\ + A_0^{(i)} \left[\tau + 2(1-\omega)(\lambda_1 \omega)^{-1} \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 \tau}{2} \exp \left(-\frac{\lambda_1 \tau}{2} \right) \right]$$

В частности, для рассматриваемого случая ($b_1=b_2=0.5$, $q_2=0$) осредненное по η значение предела правой части (30)

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow 0} \left\langle \varphi_i(n, \eta) - \frac{A_0^{(i)}}{p_0^2} \right\rangle = \frac{k_0}{16} + \frac{1}{12(1+k_0)} - \frac{1}{48k_0} - \frac{1}{8}$$

Результаты расчетов по формуле (27) с учетом (29) и (31) представлены на фиг. 4, где кривые 1 и 2 соответствуют величинам параметров трещинной емкости $\omega=0.01$, 0.1 и $\lambda=0.005$, для гипотетического трещиновато-пористого пласта с отношением проницаемостей пропластков $k_0=0.1$. Кривая 3 на фиг. 4 аналогична кривой 1 на фиг. 3 и соответствует гранулярной среде.

Анализ кривых фиг. 4 показывает, что уменьшение величины параметра трещинной емкости ω увеличивает величину понижения забойного давления галерей в начальный период процесса разработки трещиновато-пористого пласта (кривые 1, 2) по сравнению с таковым для гранулярного (кривая 3). Это обстоятельство характерно и для плоскорадиальной фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых средах [7], в которых помимо этого установлена также роль параметра λ в процессе изменения во времени забойного давления. Уменьшение величины параметра λ , характеризующего степень затрудненности обмена жидкостью между системами блоков (матриц) и трещин среды, увеличивает промежуток времени примыкания кривой понижения давления в трещиновато-пористом пласте к соответствующей кривой для гранулярной среды.

Значения функций, входящих в расчетные формулы, взяты из [8].

Поступила 30 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Warren J. E., Root P. J. The behaviors of naturally fractured reservoirs. Soc. Petrol. Engng. Journal, 1963, vol. 3, № 3.
3. Николаевский В. Н., Васниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
4. Багир-заде С. Н., Гусейнов Г. П. Исследование движения жидкости в трещиновато-пористом пласте. ПМТФ, 1972, № 6.
5. Багир-заде С. Н. Приток однородной жидкости к галерее в трещиновато-пористом пласте. Азерб. нефт. хоз-во, 1972, № 7.
6. Амирбеков Т. С., Насруллаев И. А. Приток жидкости к точечным стокам (скважинам) в двухслойном бесконечном пласте при упругом режиме. Уч. зап. АЗИНЕФТЕХИМ, 1972, т. 29.
7. Гусейнов Г. П., Багир-заде С. Н. Приток жидкости к скважине, частично вскрывшей неоднородный трещиновато-пористый пласт, при неустановившемся режиме фильтрации. Азерб. нефт. хоз-во, 1971, № 8.
8. Хаяши К., Барк Л. Многозначные таблицы круговых, гиперболических и других функций. М., Изд-во АН СССР, 1965.

Технический редактор Э. Ф. Бунова

Сдано в набор 17/I-1974 г. Т-05066 Подписано к печати 27/III -1974 г. Тираж 1925 экз.
Зак. 68 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6. Уч.-изд. л. 18,9

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10