

**ВЛИЯНИЕ ИНТЕНСИВНОГО ОТСОСА НА ТЕЧЕНИЕ  
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ОТРЫВА ЛАМИНАРНОГО  
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ**

**И. И. ЛИПАТОВ, В. Я. НЕЙЛАНД**

(Москва)

Исследуется течение в ламинарном пограничном слое в окрестности точки отрыва на пластине, обтекаемой сверхзвуковым потоком вязкого газа, через поверхность которой производится интенсивный отсос газа ( $v_w \gg R^{-1/2}$ ) по всей поверхности с постоянной скоростью  $v_w$ . Получены уравнения и краевые условия, описывающие это течение, и найдено асимптотическое решение при  $R \rightarrow \infty$ . Применение средств управления пограничным слоем, таких как, например, вдув или отсос, ставит задачи теоретического описания течений в пограничном слое с вдувом или отсосом.

Одно из наиболее простых решений для пограничного слоя с отсасыванием приводится в работах [1, 2]. Рассмотрено продольное обтекание плоской пластины с равномерно распределенным отсасыванием, т. е.  $v_w = \text{const}$ , и предполагается, что жидкость несжимаема. Граничные условия в этом случае не зависят от текущей длины  $x$ , поэтому существует решение, не зависящее от  $x$ . В этом случае толщина пограничного слоя  $\delta^* \sim (v_w R)^{-1}$  [3]. Касательное напряжение на стенке  $\tau_w = \rho_w v_w u_\infty$  и не зависит от вязкости.

Течение такого вида даже при равномерном отсосе, начинающемся с передней кромки, устанавливается асимптотически на некотором расстоянии от носка. Иглиш показал, что практически переход к профилю течения, не зависящему от  $x$ , происходит при  $\xi = (-v_w/u_\infty)^2 u_\infty x/\nu = 4$ .

Подробное изложение результатов его расчетов и их экспериментальной проверки можно найти в [3]. Профиль скоростей, не зависящий от  $x$ , назван асимптотическим профилем отсасывания. В работах [4, 5] сжимаемость была учтена и получены следующие результаты:

$$u(y) = u_\infty \{1 - \exp v_w \rho_\infty y_1 / \mu_w\}, \quad y_1 = \int_0^y \rho / \rho_\infty dy, \quad \tau_w = \rho_w (-v_w) u_\infty$$

в предположении, что  $\mu/\mu_\infty = T/T_\infty$  и при произвольных числах  $-\sigma$ .

Градиент давления, индуцируемый пограничным слоем на плоской пластине в сверхзвуковом потоке, имеет порядок  $dp/dx \sim \delta^*/x^2$ , где  $\delta^*$  толщина вытеснения. (Далее предполагается, что все функции течения обезразмерены и отнесены к их значениям в невозмущенном набегающем потоке, кроме давления, которое отнесено к удвоенному скоростному напору. Длины отнесены к длине пластины  $l$ .) В пограничном слое с отсасыванием толщина вытеснения  $\delta^*$  имеет порядок  $\varepsilon^2/v_w$  [3], где  $\varepsilon^2 = R^{-1}$  (например при  $v_w \sim \varepsilon$  следует обычная оценка  $\delta^* \sim \varepsilon$ ). Верхней границей рассматриваемых скоростей отсоса является  $v_w \sim 1$ , так как возмущения, вносимые в поток, не являются малыми, и нижней границей  $-v_w \sim \varepsilon$ , так как в обычном пограничном слое вертикальная скорость  $v \sim \varepsilon$  и при меньших скоростях отсасывания  $v_w$  будет внепорядковой величиной в граничных условиях. Следовательно градиент давления, индуцируемый толщиной вытеснения  $O(\varepsilon^2/v_w)$  при  $R \rightarrow \infty$ , входит в уравнения лишь в следующих приближениях.

Сделанные оценки несправедливы в местах, где на пограничный слой падает ударная волна или контур тела имеет излом. Возрастание давления вверх по потоку от места падения ударной волны может индуцироваться лишь толщиной вытеснения пограничного слоя. В этом случае толщина вытеснения зависит от распределения давления, которое, в свою очередь, определяется толщиной вытеснения. Соответственно индуцированный градиент давления входит в уравнения уже в первом приближении. Задача о течении в окрестности точки отрыва на непроницаемой поверхности решена в работе [6]. Получены уравнения и краевые условия для течения в ламинарном пограничном слое около точки отрыва на теле, обтекаемом сверхзвуковым потоком вязкого газа, и найдено асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса при стремлении  $R \rightarrow \infty$ .

**1. Постановка задачи и оценка масштабов.** Рассматривается ламинарный пограничный слой на плоской пластине в сверхзвуковом потоке газа. Через поверхность пластины производится отсос газа с постоянной скоростью отсасывания  $\epsilon \ll v_w \ll 1$ . Отрыв может быть вызван установленным на задней части пластины препятствием или падающим извне скачком уплотнения. Предполагается, что возмущение имеет амплитуду, приводящую к появлению точки отрыва на расстоянии  $O(1)$  от передней кромки пластины. Между передней кромкой и областью возмущенного течения течение в пограничном слое имеет профиль скорости, приведенный выше согласно результатам [4, 5]. Заметим, что такой же результат можно получить и для неравномерного распределения  $v_w(x)$ , если только  $\epsilon \ll v_w \ll 1$ , так как в этом случае в продольном уравнении импульса

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial p}{\partial x} \sim O(1), \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim O\left(\frac{v_w^2}{\epsilon^2}\right)$$

Переходя к рассмотрению течения в окрестности точки отрыва, заметим, что градиент давления, вызывающий отрыв вверх по течению от препятствия, может появиться только вследствие быстрого роста толщины вытеснения пограничного слоя из-за передачи возмущений вверх по течению через дозвуковую часть пограничного слоя.

Проведем оценки функций для течения около точки отрыва, следуя подходу, развитому в работе [6]. При этом как обычно для окрестности точки отрыва предполагается, что индуцируемый градиент давления, вызывающий отрыв, велик  $\Delta p / \Delta x \gg 1$ .

В основной части невозмущенного пограничного слоя перед началом области взаимодействия согласно [3] имеем

$$(1.1) \quad \delta^* \sim \epsilon^2 / v_w, \quad u \sim 1, \quad v \sim v_w, \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim v_w^2 / \epsilon^2$$

Из продольного уравнения импульса, уравнения состояния и уравнения энергии получаем оценки для возмущений, вызываемых  $\Delta p \ll 1$

$$(1.2) \quad \Delta u \sim \Delta p, \quad \Delta \rho \sim \Delta p$$

т. е. допустима линеаризация относительно профиля невозмущенного течения. Тогда из уравнения неразрывности следует:

$$(1.3) \quad \Delta \delta^* / \delta^* \sim \Delta p$$

В невозмущенном пограничном слое вблизи тела [3]

$$(1.4) \quad u \sim y / \delta^*$$

Так как в предотрывной области трение меняется на основной порядок по величине, то вблизи тела обязательно найдется достаточно тонкий слой, в котором оценка (1.2) для скорости не верна, так как возмущение скорости  $\Delta u \sim u$ . Но тогда продольное уравнение импульса дает для этого тонкого слоя оценку

$$(1.5) \quad \Delta u \sim \Delta p^{1/2}$$

Поскольку скорость в этом тонком подслое меняется в основном порядке, то и толщина струек тока (согласно уравнению неразрывности) меняется в основном порядке и с учетом (1.4) равна

$$(1.6) \quad \Delta \delta^* \sim \delta^* \Delta p^{1/2}$$

Сравнивая (1.3) и (1.6), видим, что основное изменение толщины вытеснения происходит за счет торможения медленного пристеночного течения. Тогда, используя формулу Аккерета, получим

$$(1.7) \quad \Delta p \sim \delta^* \Delta p^{1/2} / \Delta x$$

Поскольку течение в пристеночном слое содержит безотрывный участок при  $\Delta p > 0$  и сколь угодно малых невозмущенных  $u$ , то вязкие члены должны быть порядка градиента давления для этой области течения

$$(1.8) \quad \Delta p / \Delta x \sim \varepsilon^2 \Delta u / \Delta \delta^{*2}$$

Для неизвестных оценок  $\Delta p$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta \delta^*$  имеем систему (1.5) — (1.8). Решая ее с учетом (1.1), получим

$$(1.9) \quad \Delta p \sim v_w^{1/2}, \quad \Delta \delta^* \sim \varepsilon^2 / v_w^{3/4}, \quad \Delta x \sim \varepsilon^2 / v_w^{5/4}, \quad \Delta u \sim v_w^{1/4}$$

Уравнение неразрывности дает для поперечной компоненты скорости в подслое  $v \sim v_w^{3/4}$ . Это значит, что для возмущенной области течения отсос будет в первом приближении внепорядковым. Его роль сводится к формированию исходного невозмущенного асимптотического профиля пограничного слоя перед началом области взаимодействия.

**2. Вывод уравнений в краевых условиях.** В соответствии с приведенными выше оценками рассмотрим характерные области течения. Индекс у функции будет соответствовать номеру области, в которой она порядка  $O(1)$ .

Введем также координаты, сохраняющие величину  $O(1)$  в рассматриваемой области и асимптотические представления функций течения.

Характерный продольный размер области течения  $x \sim \varepsilon^2 v_w^{-1/4}$ . Область 1, в которой  $x \sim y \sim \varepsilon^2 v_w^{-2/4}$ , представляет собой область невязкого сверхзвукового течения над окрестностью точки отрыва. Рассмотрение области 1 позволит получить соотношение для давления, которое ввиду малости возмущений можно определить по линейной теории сверхзвуковых течений.

Область 2 — основная часть пограничного слоя, в которой продольная скорость  $u \sim O(1)$ ,  $y \sim \varepsilon^2 v_w^{-1}$ ,  $x \sim \varepsilon^2 v_w^{3/4}$ .

Область 3 — вязкий подслей, изменение толщины вытеснения которого определяет распределение давления в рассматриваемой области течения,  $x \sim \varepsilon^2 v_w^{-3/4}$ ,  $y \sim \varepsilon^2 v_w^{-3/4}$ . Сращивание решений в областях 2 и 3 даст необходимые граничные условия для области 3. В качестве переменных удобно использовать переменные Мизеса —  $x$ ,  $\psi$ . Выпишем уравнения Навье — Стокса в переменных Мизеса

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho v \frac{\partial p}{\partial \psi} &= \varepsilon^2 \left\{ \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \rho \mu u \frac{\partial u}{\partial \psi} + \right. \right. \\ &+ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) \left. \right] + \left( \frac{\partial}{\partial x} - \rho v \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \times \\ &\times \left[ \frac{4}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) - \frac{2}{3} \rho \mu u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] \left. \right\} \\ \rho u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \psi} \right) &= \varepsilon^2 \left\{ \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{4}{3} \rho \mu \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \right. \right. \\ &- \rho v \frac{\partial u}{\partial \psi} \left. \right] + \left( \frac{\partial}{\partial x} - \rho v \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left[ \rho \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \rho u \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) \right] \right\} \\ \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial n}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho u} \\ \rho u \frac{\partial h}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \left[ \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \rho \mu u \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} - \rho v \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left( \mu \frac{\partial h}{\partial x} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\rho v \mu \frac{\partial h}{\partial \psi}] + \varepsilon^2 \mu \left[ \left( \rho u \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v \frac{\partial v}{\partial \psi} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left( \rho u \frac{\partial v}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial \psi} + \rho u \frac{\partial v}{\partial \psi} \right)^2 \right]$$

Область 1

$$x_1 = (x/\varepsilon^2) v_w^{3/4}, \quad \psi_1 = \psi v_w^{5/4} / \varepsilon^2$$

$$p \sim 1/\gamma M^2 + v_w^{1/2} p_1 + \dots, \quad u \sim 1 + v_w^{1/2} u_1 + \dots$$

$$\rho \sim 1 + v_w^{1/2} \rho_1 + \dots, \quad v \sim v_w^{1/2} v_1 + \dots$$

$$n \sim \varepsilon^2 v_w^{-5/4} \psi_1 + \varepsilon^2 v_w^{-3/4} n_1 + \dots, \quad h \sim 1/(\gamma-1) M^2 + v_w^{1/2} h_1 + \dots$$

Подставим эти разложения в уравнения Навье — Стокса и совершим предельный переход при  $R \rightarrow \infty$ . Тогда получаются известные уравнения линейной теории сверхзвуковых течений. Из них получаем следующий результат:

$$(2.1) \quad \sqrt{M^2-1} p_{1w}(x_1) = v_1(x_1, 0)$$

Область 2

$$x_2 = x v_w^{3/4} / \varepsilon^2, \quad \psi_2 = \psi v_w / \varepsilon^2$$

$$u_2 \sim u_{20}(\psi_2) + v_w^{1/2} u_{21}(x_2, \psi_2) + \dots, \quad p \sim 1/\gamma M^2 + v_w^{1/2} p_2(x_2) + \dots$$

$$v_2 \sim v_w^{1/2} v_{20}(x_2, \psi_2) + \dots, \quad \rho \sim \rho_{20}(\psi_2) + v_w^{1/2} \rho_{21}(x_2, \psi_2) + \dots$$

$$h \sim h_{20}(\psi_2) + v_w^{1/2} h_{21}(x_2, \psi_2) + \dots, \quad n \sim \varepsilon^2 v_w^{-1} n_{20}(\psi_2) + \varepsilon^2 v_w^{-3/4} n_{21}(x_2, \psi_2) + \dots$$

в этом разложении второй член обусловлен сдвигом области 2 за счет изменения толщины области 3.

Подстановка в уравнения Навье — Стокса приведет к системе

$$(2.2) \quad \rho_{20} u_{20} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \psi_2} = 0, \quad \frac{\partial n_{20}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial n_{21}}{\partial x_2} = \frac{v_2}{u_{20}}$$

$\partial n_{21} / \partial \psi_2 = 0$ , т. е.  $n_{21} = f(x_2)$  и будет определяться при сращивании с областью 3.

Интегрируя первое уравнение системы, можно получить

$$(2.3) \quad p_2 + \rho_{20} u_{20} u_{21} = 0$$

Область 3

$$x_3 = x v_w^{3/4} / \varepsilon^2, \quad \psi_3 = \psi v_w^{1/2} / \varepsilon^2$$

$$u \sim v_w^{1/4} u_3(x_3, \psi_3) + \dots, \quad n \sim \varepsilon^2 v_w^{-1/4} n_3(x_3, \psi_3) + \dots$$

$$v \sim v_w^{3/4} v_3(x_3, \psi_3) + \dots, \quad h \sim h_w + v_w h_3(x_3, \psi_3) + \dots$$

$$p \sim 1/\gamma M^2 + v_w^{1/2} p_3(x_3) + \dots, \quad \rho \sim \rho_w + \dots$$

В результате подстановки в уравнения Навье — Стокса, совершив предельный переход при  $R \rightarrow \infty$ , придем к уравнениям пограничного слоя

в несжимаемой жидкости со следующими граничными условиями:

$$(2.4) \quad \rho_w u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = \rho_w u_3 \frac{\partial}{\partial \psi_3} \left( \rho_w \mu_w u_3 \frac{\partial u_3}{\partial \psi_3} \right)$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \psi_3} = 0, \quad \frac{\partial n_3}{\partial x_3} = \frac{v_3}{u_3}, \quad \frac{\partial n_3}{\partial \psi_3} = \frac{1}{\rho_w u_3}, \quad \frac{\partial h_3}{\partial x_3} = \frac{\rho_w \mu_w}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \psi_3} \left( u_3 \frac{\partial h_3}{\partial \psi_3} \right)$$

$$u_{3w} = 0, \quad h_{3w} = 0, \quad p_2 = p_3$$

величины  $p_2$  и  $p_3$  не зависят от  $\psi_2$  и  $\psi_3$ ,  $v_{3w} = 0$ , так как по порядку величины вертикальная скорость в подслое много больше скорости отсоса,  $v_w^{3/4} \gg v_w$ . Для получения недостающих граничных условий необходимо провести сравнение решений в областях 2 и 3. В результате получим

$$u_3 \rightarrow \sqrt{\frac{2a}{\rho_w}} \psi_3^{1/2} \quad (\psi_3 \rightarrow \infty), \quad a = \left( \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right)_w$$

$$n_{21}(x) \rightarrow \int_0^{\psi_3} \frac{d\psi_3}{\rho_w u_3} - \sqrt{\frac{2\psi_3}{\rho_w a}} \quad (\psi_3 \rightarrow \infty)$$

Тогда из четвертого уравнения системы (2.2) следует, что

$$v_2(x_2, \psi_2) \rightarrow \frac{d}{dx_2} \lim_{\psi_3 \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\psi_3} \frac{d\psi_3}{\rho_w u_3} - \sqrt{\frac{2\psi_3}{\rho_w a}} \right)$$

$$\sqrt{M^2 - 1} p_3 = \frac{d}{dx_3} \lim_{\psi_3 \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\psi_3} \frac{d\psi_3}{\rho_w u_3} - \sqrt{\frac{2\psi_3}{\rho_w a}} \right)$$

Начальные условия получим, срачивая функции течения в области 3 с подслоем в невозмущенном пограничном слое

$$u_3(-\infty, \psi_3) = \sqrt{\frac{2a}{\rho_w}} \psi_3^{1/2}, \quad p_3(-\infty) = 0$$

В силу локального характера течения задача обладает переменными подобия, в которых уравнения не зависят от безразмерных параметров

$$\xi = [2(M^2 - 1)^{1/2} / v_w \rho_w]^{1/2} p, \quad \eta = [2(M^2 - 1)^{1/2} v_w^3 \rho_w^5 / \mu_w^4]^{1/4} \eta \xi^{-1/2}$$

$$\psi = [\mu_w^2 / 2 \rho_w v_w (M^2 - 1)^{1/2}]^{1/2} \xi f(\xi, \eta)$$

переходя к автомодельным переменным получим

$$f''' = \beta \left[ 1 + \frac{1}{2} f'^2 - f f'' + \xi (f' f' - f f'') \right]$$

$$(2.5) \quad \beta = \xi^{1/2} \frac{d\xi}{dx} = \frac{\xi^{3/2}}{(d/d\xi) \{ 2\xi^{1/2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - (2f)^{1/2}] \}}$$

$$(2.6) \quad f(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = 0, \quad f''(\xi, \infty) = 1, \quad f(0, \eta) = \eta^2 / 2$$

Распределение коэффициента давления  $C_p$  определяется по формуле

$$C_p = \xi v_w^{1/2} \rho_w^{1/2} / 2^{1/2} (M^2 - 1)^{1/4}$$

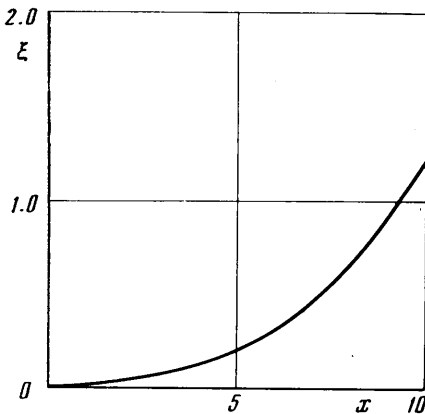
Решение для области 2 легко получить, зная распределение давления  $p_2(x) = p_3(x)$ , так как  $u_2 \sim u_{20}(\psi) + v_w^{1/2} u_{21}(x, \psi)$  и  $u_{21}$  можно определить из уравнения  $p_2 + p_{20} u_{20} u_{21} = 0$ .

**3. Обсуждение результатов.** Как можно видеть в общих чертах структура течения в пограничном слое с отсасыванием и без отсасывания в окрестности точки отрыва одинакова. Эти течения различаются лишь масштабами функций течения и начальными условиями, так как в первом случае это асимптотический профиль отсасывания, а во втором профиль Блазиуса.

В работах [6, 7] проведено численное решение системы (2.5) с начальными и граничными условиями (2.6). Распределение давления в окрестности точки отрыва приведено на фигуре 1. Приведем вычисленный коэффициент давления в точке отрыва

$$C_p = 1.44(\rho_w v_w)^{1/2} / 2^{1/2}(M^2 - 1)^{1/4}$$

В работе [8] была рассмотрена задача об обтекании пластины с отклоненным щитком и вычислен коэффициент давления или соответствующий



ему угол отклонения щитка, перед которым возникает зона отрыва с длиной, равной нулю. Аналогичную задачу можно рассмотреть и для течения с отсосом; используя численные результаты работы [7], выпишем максимальный коэффициент давления, который еще не вызывает отрыв потока

$$C_p = 2.23(\rho_w v_w)^{1/2} / 2^{1/2}(M^2 - 1)^{1/4}$$

В заключение заметим, что для использования полученных результатов или для предотвращения отрыва нет необходимости производить отсос вдоль всей поверхности тела. Достаточно отсасывать расход порядка  $\epsilon$  на длинах  $\sim \epsilon / v_w$ .

Однако необходимо для предотвращения возмущений, связанных с началом и прекращением отсоса, изучить поведение решений в этих местах течения. Эта задача будет изложена в следующей статье.

Поступила 24 XII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Meredith F. W., Griffith A. A. Control with auxiliary power. Diffusers. Modern developments in fluid dynamics. Oxford, Oxford Univ. Press, 1938, vol. 2.
2. Schlichting H. Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. Luftfahrt-Forschg, 1942, Bd. 19, Nr. 5.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969, стр. 364–370.
4. Lew H. G. On the compressible boundary layer over a flat plate with uniform suction. Reissner Annivers. Vol., J. W. Edwards, Ann Arbor, 1949.
5. Young A. D. Note on the velocity and temperature distributions attained with suction on a flat plate of infinite extent in compressible flow. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, vol. 1, No. 1.
6. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
7. Нейланд В. Я. Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
8. Нейланд В. Я. К асимптотической теории взаимодействия сверхзвукового потока с пограничным слоем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.