

На фиг. 3 для двух различных значений безразмерного времени изображены характерные распределения безразмерного давления  $P_2$  в нефтяной фазе (сплошные линии) и  $P_1$  в водной фазе (пунктирные линии). Отметим, что распределение давления в нефтяной фазе имеет немонотонный характер, чем обеспечивается вытеснение нефти через оба торца — в противотоке через левый и в прямотоке через правый. Расходы нефти через левый  $W_2^-$  и правый  $W_2^+$  торцы<sup>1</sup> для разных  $\tau$  приведены ниже

$\tau$	0.1	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0
$-W_2^-$	0.0689	0.0165	0.0087	0.0053	0.0048	0.0045
$W_2^+$	0.2474	0.2372	0.2394	0.0336	0.0144	0.0099

На фиг. 2 показана зависимость нефтеотдачи  $\eta$  от времени  $\tau$  для прямоточно-противоточного вытеснения (сплошная линия) и для противоточной пропитки (пунктирная кривая). После подхода фронта насыщенности к выходному сечению образца (соответствующее значение нефтеотдачи отмечено точкой на кривой) прирост нефтеотдачи резко замедляется, что объясняется быстрым повышением водонасыщенности на правом торце образца.

Численные расчеты показали, что для  $\mu_0 = 1/3$  и 1 динамика процесса прямоточно-противоточной капиллярной пропитки близка к описанной. Задача прямоточно-противоточного вытеснения решалась численно также при  $\Delta P \neq 0$ . И в этом случае характерно наличие противотока нефти на левом торце образца.

Следует отметить, что основные черты численной модели прямоточно-противоточного вытеснения удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов В. Г. Оганджянца и А. А. Маца, изучавшими этот процесс на физических моделях.

Авторы благодарят В. Г. Оганджянца и А. А. Маца за возможность ознакомиться с результатами их экспериментов и полезные обсуждения.

Поступила 13 X 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967 гг.). М., «Наука», 1969.
2. Рахимкулов И. Ф., Швидлер М. И. Автомодельная задача в совместном движении нефти и воды. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
3. Швидлер М. И., Леви Б. И. Одномерная фильтрация несмешивающихся жидкостей. М., «Недра», 1970.
4. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
5. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М., «Мир», 1964.

УДК 532.582.33

### О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОНКОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЛО, ОРИЕНТИРОВАННОЕ ПАРАЛЛЕЛЬНО ДНУ

О. В. ВОИНОВ, М. И. ГУРЕВИЧ

(Москва)

Произвольное тонкое заостренное осесимметричное тело движется в идеальной несжимаемой жидкости в присутствии плоского дна. Глубина потока бесконечна. Ось симметрии параллельна плоскости дна.

Рассмотрены два случая: тело движется поступательно в направлении оси симметрии; тело движется поступательно в направлении, перпендикулярном дну. Рассмотренные задачи могут иметь приложение в судостроении<sup>[1]</sup>, а также при исследовании движения скоростных поездов<sup>[2]</sup>.

Обе задачи решаются методом плоских сечений. Найдены гидродинамические силы и моменты, действующие на тело.

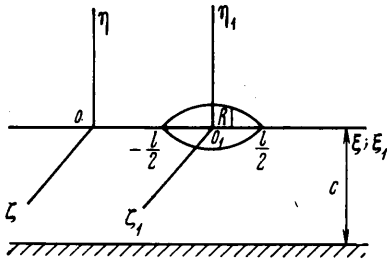
1. Движение тела параллельно дну. Рассмотрим заостренное с обоих концов тонкое осесимметричное тело с осью симметрии, параллельной дну (фиг. 1). Система координат  $\xi, \eta, \zeta$  неподвижна. Система координат  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  связана с телом (фиг. 1). Тело движется поступательно со скоростью  $u$  в направлении оси  $\xi$ . Будем предполагать, что возмущенные скорости течения вдоль оси малы по сравнению

<sup>1</sup> Точнее говоря,  $W_2^\pm$  вычислены в точках, сдвинутых на полшага от соответствующего торца.

с поперечными возмущениями, а расстояние от тела до экрана мало по сравнению с длиной тела. В этом случае можно рассматривать только движение в плоскостях  $\xi = \text{const}$ , то есть использовать гипотезу плоских сечений, которая достаточно обычна в гидромеханике и встречается от корабля Митчелла в прошлом веке до сравнительно недавних работ по гиперзвуковым течениям.

С другой стороны, если длина тела и его расстояние до дна сравнимы по величине, то течение может иметь пространственный характер. Недавно [3] вышла работа, в которой рассматривается тонкое тело в медленно меняющемся пространственном потоке.

На фиг. 2 изображено плоское сечение ( $\xi = \text{const}$ ) тела и стенки. Вся картина течения повернута и оси координат выбраны заново. Стенке соответствует ось  $y$ .



Фиг. 1

По мере продвижения тела вдоль оси  $\xi$  его сечение в плоскости  $xu$  будет меняться и течение будет неустановившимся. Продолжая симметрично течение через ось  $y$ , можно получить течение, вызванное одновременным изменением радиусов двух одинаковых цилиндров с центрами в точках  $\pm c$ .

Оказывается, что можно получить точное решение задачи, если поместить одинаковые источники в точках  $x = \pm b$ , где

$$(1.1) \quad b^2 = c^2 - R^2$$

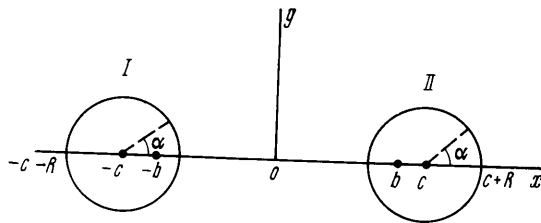
Уравнение  $R = R(\xi_1) = R(\xi - \xi_0)$ , где  $\xi_0 = OO_1$ , известно. Так как  $d\xi_0/dt = u$ , то радиус цилиндров является известной функцией времени  $t$ .

Комплексный потенциал  $w$  и комплексная скорость  $dw/dz$  будут иметь вид

$$(1.2) \quad w = \varphi + i\psi = m \ln(z + b) + m \ln(z - b)$$

$$(1.3) \quad dw/dz = 2mz / (z^2 - b^2)$$

Для доказательства (1.2) и (1.3) и определения постоянной  $m$  найдем с помощью (1.3) нормальную скорость  $v_R = R^*$ , где точка обозначает дифференцирование по времени.



Фиг. 2

Легко видеть, что если  $\alpha$  — угол с осью  $x$  радиуса произвольной точки одного из цилиндров (фиг. 2), то

$$(1.4) \quad v_R = \text{Re} \left( \frac{dw}{dz} e^{i\alpha} \right)$$

Полагая для точек цилиндров  $z = \pm c + R e^{i\alpha}$ , с помощью (1.1), (1.3) и (1.4) находим, что  $v_R = R^* = m/R$ , т. е.  $m = RR^*$ .

Следует отметить любопытный предельный случай  $R = c$  и  $b = 0$ , когда оба источника сливаются в один и цилиндры соприкасаются.

Вычислим результирующую силу  $F_{II}$ , действующую на правый цилиндр II. Сила эта будет направлена вдоль оси  $x$ . Пользуясь интегралом Коши — Лагранжа, получим

$$(1.5) \quad F_{II} = - \oint p \, dy = \rho \oint \left[ \text{Re} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \right] dy$$

где интегрирование ведется по контуру цилиндра.

После довольно длинных, но вполне прозрачных вычислений можно получить

$$(1.6) \quad F_{11} = 2\pi\rho [m^*(c-b) + m^2/2b]$$

Если обозначить дифференцирование по  $\xi_1$  штрихом, то будем иметь

$$(1.7) \quad R^* = -R'u, \quad R^{**} = -R'u^* + R''u^2, \quad m^* = (RR^*)' = u^2(RR'' + R'^2) - RR'u^*$$

Найдя  $(c-b)$  из (1.4), получим результирующую силу  $F_\eta$ , действующую на произвольное тонкое осесимметричное тело в виде

$$(1.8) \quad F_\eta = 2\pi\rho u^2 \int_{-1/2}^{1/2} \left[ (RR')'(c - \sqrt{c^2 - R^2}) + \frac{(RR')^2}{2\sqrt{c^2 - R^2}} \right] d\xi_1 - \\ - 2\pi\rho u^* \int_{-1/2}^{1/2} (c - \sqrt{c^2 - R^2}) RR' d\xi_1$$

Легко видеть, что второй интеграл равен нулю и  $F_\eta$  не зависит от ускорения  $u^*$ . Интегрируя по частям, получим

$$\int_{-1/2}^{1/2} (RR')'(c - \sqrt{c^2 - R^2}) d\xi_1 = - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{R^2 R'^2}{\sqrt{c^2 - R^2}} d\xi_1$$

Таким образом, окончательно имеем

$$(1.9) \quad F_\eta = -\pi\rho u^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{R^2 R'^2}{\sqrt{c^2 - R^2}} d\xi_1$$

Так как  $F_\eta < 0$ , то тонкое осесимметричное тело, движущееся параллельно дну, будет присасываться последним.

Момент гидродинамических сил, действующих на тело относительно оси  $\xi_1$  (фиг. 1), равен

$$(1.10) \quad M_{\xi_1} = 2\pi\rho \int_{-1/2}^{1/2} \xi_1 \left\{ u^2 \left[ (RR')'(c - \sqrt{c^2 - R^2}) + \frac{(RR')^2}{2\sqrt{c^2 - R^2}} \right] - \right. \\ \left. - u^*(c - \sqrt{c^2 - R^2}) RR' \right\} d\xi_1$$

Если тело симметрично относительно плоскости  $\xi_1 = 0$ , т. е.  $R(\xi_1) = R(-\xi_1)$ , то интеграл, содержащий  $u^2$ , пропадает

$$(1.11) \quad M_{\xi_1} = -2\pi\rho u^* \int_{-1/2}^{1/2} \xi_1 (c - \sqrt{c^2 - R^2}) RR' d\xi_1$$

Из (1.11) следует, что при  $u^* < 0$ , т. е. при торможении,  $M_{\xi_1} < 0$  и гидродинамический момент стремится повернуть тело по часовой стрелке, т. е. носом к дну. При  $u^* > 0$ , наоборот,  $M_{\xi_1} > 0$  и момент стремится повернуть тело кормой к дну.

2. Движение тела перпендикулярно к дну. Рассмотрим теперь случай, когда осесимметричное тело движется перпендикулярно к стенке со скоростью  $u$ . На фиг. 1 это будет движение, параллельное оси  $\eta_1$ , а на фиг. 2 оба круга будут двигаться в разные стороны вдоль оси  $x$ . Примем, что  $u > 0$ , когда цилиндры сближаются.

Точное решение задачи о движении цилиндра около стенки получено в [4], однако оно неудобно для исследования поставленной задачи о движении осесимметричного тела. Поэтому далее изложение ограничивается случаем малых значений  $R/c$ . Помещая в центрах цилиндров диполи и мультиполи, можно представить по-

тенциал скоростей  $w$  и комплексную скорость в виде

$$(2.1) \quad w = \frac{Q}{z-c} - \frac{Q}{z+c} + \frac{Q_1}{(z-c)^2} + \frac{Q_1}{(z+c)^2}$$

$$(2.2) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{Q}{(z+c)^2} - \frac{Q}{(z-c)^2} - \frac{2Q_1}{(z-c)^3} - \frac{2Q_1}{(z+c)^3}$$

где постоянные  $Q$  и  $Q_1$  подлежат определению из граничных условий на поверхности цилиндров. Рассмотрим правый цилиндр, для которого  $z=c+Re^{i\alpha}$ . Пользуясь (2.2) и пренебрегая малыми величинами  $R/c$  порядков выше третьего, находим нормальную скорость на цилиндре

$$(2.3) \quad v_R = \operatorname{Re} \left( e^{i\alpha} \frac{dw}{dz} \right) = Q \left( \frac{1}{4c^2} - \frac{1}{R^2} \right) \cos \alpha - \left( \frac{RQ}{4c^3} + 2 \frac{Q_1}{R^3} \right) \cos 2\alpha$$

С другой стороны, эта скорость должна равняться  $v_R = -u \cos \alpha$ . Приравняв друг к другу оба выражения  $v_R$ , находим

$$(2.4) \quad Q = -\frac{u}{1/4c^2 - 1/R^2} \approx uR^2 \left( 1 + \frac{R^2}{4c^2} \right), \quad Q_1 = -\frac{R^4 Q}{8c^3} = -\frac{uR^6}{8c^3}$$

Рассмотрение левого цилиндра I дает тот же результат.

Зная  $Q$  и  $Q_1$ , с помощью (1.5) рассчитаем силу  $P_{11}$ , действующую на правый цилиндр. После выполнения довольно длинного интегрирования и несложных преобразований, в которых учитываются малые величины  $R/c$  до третьего порядка включительно, сила оказывается равной

$$(2.5) \quad P_{11} = \rho \pi \left\{ u^2 R^2 \left( 1 + \frac{R^2}{2c^2} \right) + \frac{u^2}{2} \frac{R^4}{c^3} \right\}$$

Суммарная сила, действующая на тонкое осесимметричное тело, получается интегрированием по  $\xi_1$  от  $-l/2$  до  $l/2$ .

Если  $u^* = 0$ , то

$$P_{\eta} = \frac{\pi}{2} \rho \frac{u^2}{c^3} \int_{-l/2}^{l/2} R^4 d\xi_1 > 0$$

т. е., как и в случае шара (см., например, [1] или [3]) и при движении ко дну, и при движении от него тонкое осесимметричное тело отталкивается дном. Для симметричного тела  $R(\xi_1) = R(-\xi_1)$  момент  $M_{\xi_1} = 0$ .

Поступила 1 III 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Костюков А. А. Взаимодействие тел, движущихся в жидкости. Л., «Судостроение», 1972.
2. Гуревич М. И. Обзор работ по аэродинамике скоростных поездов. В сб. «Исследования в области транспортной и строительной механики». М., «Транспорт», 1970, стр. 3-9.
3. Бондаренко Л. А., Якимов Ю. Л. Сила, действующая со стороны потока жидкости на тонкое изогнутое тело кругового поперечного сечения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
4. Мазур В. Ю. Движение кругового цилиндра вблизи вертикальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
5. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964, стр. 655.