

гласно указанному критерию ~ 64 мксек. Но если проанализировать характер перемещения ударной волны, видно, что сначала она отходит от капли (до 40 мксек), что связано с уменьшением скорости потока относительно капли, а также с ростом поперечного размера капли, а затем (48 мксек) ударная волна «садится» на облако, свидетельствуя о том, что процесс разрушения завершился. Поэтому время разрушения при сверхзвуковом обтекании определялось по поведению ударной волны. В случае дозвукового потока процесс разрушения считался законченным, когда капля теряла обтекаемую форму. На фиг. 1 время разрушения капли — 152 мксек, на фиг. 2 — 144 мксек.

Нужно отметить, что времена разрушения капель, полученные в данной работе, в 3–4 раза меньше, чем в работе [5]. Это объясняется разницей критериев для определения конца разрушения капли. В пользу критерия, принятого в настоящей работе, можно привести следующие соображения. По данным работы [5] за время, в 3–4 раза меньшее, чем время разрушения, поперечный размер капли возрастает в 4 раза, а сама капля приобретает вид эллипсоида вращения. Размер капли в направлении потока можно оценить, считая, что унос жидкости с поверхности капли отсутствовал. Он оказывается равным ~ 0.1 мм, т. е. сравнимым с толщиной срываемого с капли поверхностного слоя. В это время, по-видимому, уже нельзя говорить о капле как о неразрушившемся целом.

Зависимость числа Струхала $Sh = d(u\tau)^{-1}$, где d — начальный диаметр капли, u — скорость газа за ударной волной, τ — время разрушения капли, от числа Маха M_s ударной волны приведена на фиг. 4. Здесь же показана теоретическая зависимость $Sh = k^{-1} \sqrt{\rho_g/\rho_f}$, взятая из работы [3]; $k = 1.5$, ρ_g и ρ_f — соответственно плотности газа и жидкости. Видно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных данных в широкой области изменения параметров.

Поступила 2 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волинский М. С.* Изучение дробления капель в газовом потоке. Докл. АН СССР, 1949, т. 68, вып. 2.
2. *Gordon G. D.* Mechanism and speed of breakup of drops. Appl. Phys., 1959, vol. 30, No. 11.
3. *Бузуков А. А.* Разрушение капель и струй жидкости воздушной ударной волной. ПМТФ, 1963, № 2.
4. *Mayer E.* Theory of liquid atomization in high velocity gas streams. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 12.
5. *Ranger A. A., Nicholls J. A.* Aerodynamic shattering of liquid drops. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 2.

УДК 532.546

О ПРЯМОТОЧНО-ПРОТИВОТОЧНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ПРОПИТКЕ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Б. В. ШАЛИМОВ, М. И. ШВИДЛЕР

(Москва)

Процесс противоточной капиллярной пропитки изучен достаточно полно [1]. Пример прямооточно-противоточного течения и численный анализ автомоделного решения даны в [2]. Экспериментально на физических моделях прямооточно-противоточную пропитку изучали В. Г. Оганджаниянц и А. А. Мац. В [3] задача о прямооточно-противоточной пропитке сведена к уравнению в частных производных высокого порядка относительно насыщенности. Ниже предлагается иной подход к решению этой задачи, приводятся алгоритм и результаты численного решения.

1. Рассмотрим цилиндрический образец однородной недеформируемой пористой среды, насыщенной смачивающей и несмачивающей несжимаемыми жидкими фазами (например, водой и нефтью), находящимися в капиллярном равновесии. Последнее эквивалентно постоянству капиллярного давления или насыщенности вдоль образца. Будем считать боковую поверхность образца непроницаемой для жидкостей, а к торцам при заданных, в общем случае различных, внешних давлениях подведем смачивающую и несмачивающую фазы соответственно. Дальнейшее перераспределение жидкостей в образце описывается уравнениями неразрывности и обобщенного закона Дарси для смачивающей ($i=1$) и несмачивающей ($i=2$) фаз с учетом капил-

лярного скачка между фазовыми давлениями [4, 5]

$$(1.1) \quad m \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad w_i = -k \frac{f_i(\sigma)}{\mu_i} \frac{\partial p_i}{\partial x}$$

$$p_2 - p_1 = p_c(\sigma) \equiv \gamma \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} J(\sigma) \quad (\sigma_1 + \sigma_2 = 1, \sigma \equiv \sigma_1)$$

Здесь m — пористость, k — абсолютная проницаемость образца, σ_i — насыщенность, μ_i — вязкость, $f_i(\sigma)$ — относительная проницаемость, p_i — давление, w_i — скорость фильтрации i -й фазы, $p_c(\sigma)$ — капиллярное давление, $J(\sigma)$ — функция Леверетта, γ — межфазное натяжение, θ — краевой угол смачивания, x — координата, t — время.

Из уравнения (1.1) имеем

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{w(t)}{m} F'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial p_2}{\partial x} &= F(\sigma) p_c'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{w(t)}{m} \left[\frac{f_1(\sigma)}{\mu_1} + \frac{f_2(\sigma)}{\mu_2} \right]^{-1} \\ w &= w_1 + w_2, \quad F = f_1(f_1 + \mu_0 f_2)^{-1}, \quad \varphi = -J' f_1 f_2 (f_1 + \mu_0 f_2)^{-1} \\ \mu_0 &= \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad a^2 = \frac{\gamma \cos \theta}{\mu_2} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Обратимся к условиям на концах образца. Через левый торец подводимая к нему смачивающая фаза поступает в образец, а несмачивающая фаза под действием капиллярных сил может вытекать в противоположном направлении. Вследствие непрерывности фазовых давлений снаружи и внутри образца будем иметь при $x=+0$

$$(1.3) \quad p_1 = p_2 = p', \quad p_c(\sigma) = 0 \quad (\sigma = \sigma_{**})$$

Как показывают эксперименты [5], на правом торце, контактирующем с несмачивающей жидкостью, имеет место «концевой эффект», т. е. смачивающая жидкость не вытекает через этот торец до тех пор, пока на нем не будет достигнуто критическое значение насыщенности σ_{**} , при котором наступает капиллярное равновесие фаз. Вследствие непрерывности давления в вытекающей несмачивающей фазе снаружи и внутри образца и с учетом непротекания смачивающей фазы будем иметь при $x=l-0$

$$(1.4) \quad p_2 = p'', \quad w_1 = 0, \quad -k \frac{f_2(\sigma)}{\mu_2} p_c'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = w(t)$$

Здесь p' , p'' — заданные внешние давления на торцах, l — длина образца.

Для определения суммарного расхода $w(t)$ проинтегрируем второе соотношение из (1.2) по x от 0 до l с учетом граничных условий (1.3), (1.4)

$$p' - p'' = \frac{w(t)}{m} \int_0^l \left[\frac{f_1(\sigma)}{\mu_1} + \frac{f_2(\sigma)}{\mu_2} \right]^{-1} dx - \int_{\sigma(0,t)}^{\sigma(l,t)} F(\sigma) p_c'(\sigma) d\sigma$$

Окончательная система безразмерных уравнений имеет вид

$$(1.5) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \psi(\sigma, \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\varphi(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right]$$

$$(1.6) \quad \sigma = \sigma^0 \quad (\tau=0, 0 < \xi < 1), \quad \sigma = \sigma_{**} \quad (\xi=0, \tau > 0)$$

$$(1.7) \quad \varphi(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = W(\tau) F(\sigma) \quad (\xi=1, \tau > 0)$$

$$(1.8) \quad W(\tau) \int_0^1 R(\sigma) d\xi = \Delta P + \int_{\sigma(0,\tau)}^{\sigma(1,\tau)} F(\sigma) J'(\sigma) d\sigma$$

$$\psi = W(\tau) F'(\sigma), \quad R = \mu_0 [f_1(\sigma) + \mu_0 f_2(\sigma)]^{-1}$$

$$P_2(\xi, \tau) = \int_{\sigma(0,\tau)}^{\sigma(\xi,\tau)} F(\sigma) J'(\sigma) d\sigma - W(\tau) \int_0^\xi R(\sigma) d\xi$$

$$\begin{aligned}
 W_1(\xi, \tau) &= W(\tau)F(\sigma) - \varphi(\sigma)\partial\sigma/\partial\xi \\
 P_2 - P_1 &= J(\sigma), \quad W_1 + W_2 = W(\tau) \\
 \xi &= \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{a^2 t}{l^2}, \quad W = \frac{w}{m} \frac{l}{a^2}, \quad W_i = \frac{w_i}{m} \frac{l}{a^2} \\
 P_i &= \frac{p_i - p'}{b^2}, \quad \Delta P = \frac{p' - p''}{b^2} \quad \left(b^2 = \gamma \cos \vartheta \sqrt{\frac{m}{k}} \right)
 \end{aligned}$$

2. Уравнение (1.5) с учетом (1.8) есть нелинейное интегродифференциальное уравнение относительно σ . Для численного решения задачи (1.5)–(1.7) воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией уравнений, близкой к использованной в [3] при решении задач вытеснения с заданным суммарным расходом, а также капиллярной пропитки

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & (\Delta\tau)^{-1}(\sigma_i^{j+1} - \sigma_i^j) + (2\Delta\xi)^{-1}\psi_i^j(\sigma_{i+1}^{j+1} - \sigma_{i-1}^{j+1}) = \\
 & = (\Delta\xi)^{-2}[\varphi_{i+1/2}^j(\sigma_{i+1}^{j+1} - \sigma_i^{j+1}) - \varphi_{i-1/2}^j(\sigma_i^{j+1} - \sigma_{i-1}^{j+1})] \\
 & (i=1, \dots, N-1; \quad j=0, 1, \dots)
 \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \sigma_i^0 = \sigma^0 \quad (i=0, 1, \dots, N), \quad \sigma_0^{j+1} = \sigma^{**} \quad (j=0, 1, \dots)$$

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & 0.5\Delta\xi[(\Delta\tau)^{-1}(\sigma_N^{j+1} - \sigma_N^j) + (\Delta\xi)^{-1}\psi_N^j(\sigma_N^{j+1} - \sigma_{N-1}^{j+1})] + \\
 & + (\Delta\xi)^{-1}\varphi_{N-1/2}^j(\sigma_N^{j+1} - \sigma_{N-1}^{j+1}) = W^j F_N^j \quad (j=0, 1, \dots)
 \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad 0.5\Delta\xi W^j \sum_{i=1}^N (R_{i-1}^j + R_i^j) = \Delta P^j + \int_{\sigma_j'}^{\sigma_N^j} F(\sigma) J'(\sigma) d\sigma$$

$$P_{2,i}^j = \int_{\sigma_j'}^{\sigma_i^j} F(\sigma) J'(\sigma) d\sigma - 0.5\Delta\xi W^j \sum_{h=1}^i (R_{h-1}^j + R_h^j)$$

$$W_{1,i-1/2}^j = W^j F_{i-1/2}^j - (\Delta\xi)^{-1}\varphi_{i-1/2}^j(\sigma_i^j - \sigma_{i-1}^j)$$

$$P_{1,i}^j = P_{2,i}^j - J_i^j, \quad W_{2,i-1/2}^j = W^j - W_{1,i-1/2}^j$$

$$\sigma_i^j = \sigma(i\Delta\xi, j\Delta\tau), \quad \sigma_{i\pm 1/2}^j = 0.5(\sigma_{i\pm 1}^j + \sigma_i^j)$$

$$[f(\sigma, \tau)]_i^j = f(\sigma_i^j, j\Delta\tau), \quad [f(\sigma, \tau)]_{i\pm 1/2}^j = f(\sigma_{i\pm 1/2}^j, j\Delta\tau)$$

Для вычисления $W(\tau)$ интеграл по ξ в (1.8) аппроксимирован по формуле трапеций, имеющей погрешность $O((\Delta\xi)^2)$, а интеграл по σ находится по одной из формул численного интегрирования с некоторой погрешностью ϵ . При этом разностное уравнение (2.1) аппроксимирует с порядком $O(\Delta\tau, (\Delta\xi)^2)$ дифференциальное уравнение (1.5), в котором вместо ψ стоит возмущенный коэффициент $\psi + \epsilon a(\sigma, \tau)$, а разностное условие (2.3) с тем же порядком аппроксимирует дифференциальное граничное условие

$$\frac{\Delta\xi}{2} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \psi \frac{\partial\sigma}{\partial\xi} \right) + \left[\varphi \frac{\partial\sigma}{\partial\xi} - \frac{\Delta\xi}{2} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\varphi \frac{\partial\sigma}{\partial\xi} \right) \right] = WF$$

получающееся из уравнений (1.5) и (1.7) при $\xi=1$ ($i=N$).

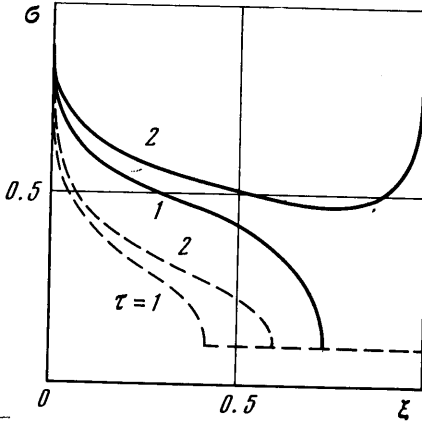
Для контроля точности численного решения использовалось следующее балансовое соотношение и его конечно-разностная аппроксимация:

$$\eta = \int_{\Delta\xi/2}^{1-\Delta\xi/2} (\sigma - \sigma^0) d\epsilon = \int_0^\tau \left[W_2 \left(\tau, 1 - \frac{\Delta\xi}{2} \right) - W_2 \left(\tau, \frac{\Delta\xi}{2} \right) \right] d\tau$$

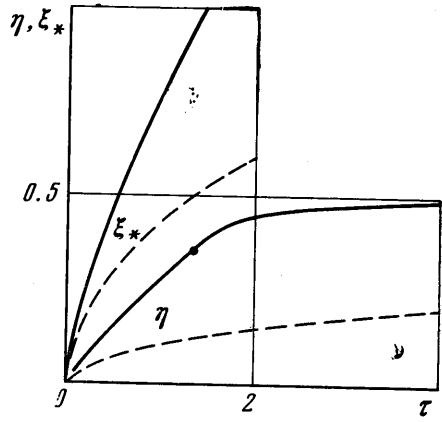
$$\eta^{j+1} = \Delta \xi \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_i^{j+1} - \sigma_i^j) = \Delta \tau \sum_{l=0}^j (W_{2,1-\Delta \xi/2}^l - W_{2,\Delta \xi/2}^l)$$

где η — коэффициент нефтеотдачи (отношение вытесненного из образца за время τ объема нефти к поровому объему образца).

3. Описанный алгоритм был применен для численного анализа процесса капиллярного прямоточно-противоточного вытеснения при одинаковых внешних давлениях



Фиг. 1

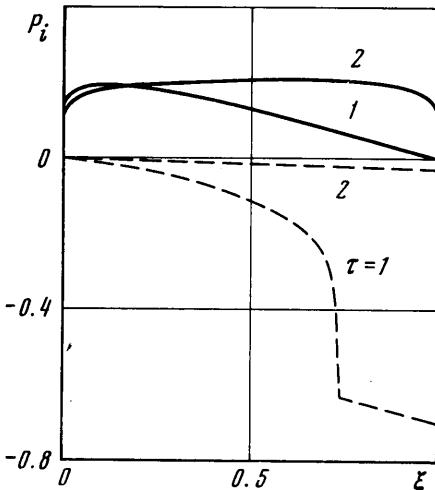


Фиг. 2

на торцах ($\Delta P=0$). В расчетах приняты следующие типичные зависимости $f_i(\sigma)$ и $J(\sigma)$

$$f_1(\sigma) = \left(\frac{\sigma - 0.1}{0.9} \right)^3, \quad f_2(\sigma) = \left(\frac{0.9 - \sigma}{0.8} \right)^3, \quad J(\sigma) = \frac{0.2(0.9 - \sigma)}{\sigma(2 - \sigma)(1.2 - \sigma)^2}$$

Начальное распределение насыщенности $\sigma(\xi, 0) = \sigma_* = 0.1$. Насыщенность на левом торце $\sigma(0, \tau) = \sigma_{**} = 0.9$. Отношение вязкостей варьировалось. Для иллюстрации приведены результаты расчетов при $\mu_0 = 0.1$. Счет проводился на ЭВМ БЭСМ-3М с $\Delta \xi = 0.01$ и $\Delta \tau = 0.0025$, при этом относительная погрешность в балансе не превышала 1%.



Фиг. 3

При тех же исходных данных для сравнения были проведены расчеты процесса капиллярного впитывания через левый торец образца при закрытом для жидкости правом торце (противоточная капиллярная пропитка).

На фиг. 1 представлены распределения водонасыщенности σ для двух значений безразмерного времени τ : сплошными линиями — при прямоточно-противоточной капиллярной пропитке, пунктирными — при противоточной. Для первой фазы (до момента достижения фронтом правого торца образца) характерно некоторое качественное сходство распределений σ . Наблюдаются четкие фронты насыщенности. Однако при противоточной пропитке фронт насыщенности движется медленней (закон движения фронтов $\xi_*(\tau)$ изображен на фиг. 2). Во второй фазе (после достижения фронтом правого торца образца) распределение σ при противоточной капиллярной пропитке, как известно [3], остается моно-

тонно убывающим, а при прямоточно-противоточной сказывается влияние концевго эффекта на открытом правом торце — в распределении σ появляется минимум.

На фиг. 3 для двух различных значений безразмерного времени изображены характерные распределения безразмерного давления P_2 в нефтяной фазе (сплошные линии) и P_1 в водной фазе (пунктирные линии). Отметим, что распределение давления в нефтяной фазе имеет немонотонный характер, чем обеспечивается вытеснение нефти через оба торца — в противотоке через левый и в прямотоке через правый. Расходы нефти через левый W_2^- и правый W_2^+ торцы¹ для разных τ приведены ниже

τ	0.1	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0
$-W_2^-$	0.0689	0.0165	0.0087	0.0053	0.0048	0.0045
W_2^+	0.2474	0.2372	0.2394	0.0336	0.0144	0.0099

На фиг. 2 показана зависимость нефтеотдачи η от времени τ для прямоточно-противоточного вытеснения (сплошная линия) и для противоточной пропитки (пунктирная кривая). После подхода фронта насыщенности к выходному сечению образца (соответствующее значение нефтеотдачи отмечено точкой на кривой) прирост нефтеотдачи резко замедляется, что объясняется быстрым повышением водонасыщенности на правом торце образца.

Численные расчеты показали, что для $\mu_0 = 1/3$ и 1 динамика процесса прямоточно-противоточной капиллярной пропитки близка к описанной. Задача прямоточно-противоточного вытеснения решалась численно также при $\Delta P \neq 0$. И в этом случае характерно наличие противотока нефти на левом торце образца.

Следует отметить, что основные черты численной модели прямоточно-противоточного вытеснения удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов В. Г. Оганджаниянца и А. А. Маца, изучавшими этот процесс на физических моделях.

Авторы благодарят В. Г. Оганджаниянца и А. А. Маца за возможность ознакомиться с результатами их экспериментов и полезные обсуждения.

Поступила 13 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967 гг.). М., «Наука», 1969.
2. Рахимкулов И. Ф., Швидлер М. И. Автомодельная задача в совместном движении нефти и воды. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
3. Швидлер М. И., Леви Б. И. Одномерная фильтрация несмешивающихся жидкостей. М., «Недра», 1970.
4. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
5. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М., «Мир», 1964.

УДК 532.582.33

О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОНКОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЛО, ОРИЕНТИРОВАННОЕ ПАРАЛЛЕЛЬНО ДНУ

О. В. ВОИНОВ, М. И. ГУРЕВИЧ

(Москва)

Произвольное тонкое заостренное осесимметричное тело движется в идеальной несжимаемой жидкости в присутствии плоского дна. Глубина потока бесконечна. Ось симметрии параллельна плоскости дна.

Рассмотрены два случая: тело движется поступательно в направлении оси симметрии; тело движется поступательно в направлении, перпендикулярном дну. Рассмотренные задачи могут иметь приложение в судостроении^[1], а также при исследовании движения скоростных поездов^[2].

Обе задачи решаются методом плоских сечений. Найдены гидродинамические силы и моменты, действующие на тело.

1. Движение тела параллельно дну. Рассмотрим заостренное с обоих концов тонкое осесимметричное тело с осью симметрии, параллельной дну (фиг. 1). Система координат ξ, η, ζ неподвижна. Система координат ξ_1, η_1, ζ_1 связана с телом (фиг. 1). Тело движется поступательно со скоростью u в направлении оси ξ . Будем предполагать, что возмущенные скорости течения вдоль оси малы по сравнению

¹ Точнее говоря, W_2^\pm вычислены в точках, сдвинутых на полшага от соответствующего торца.