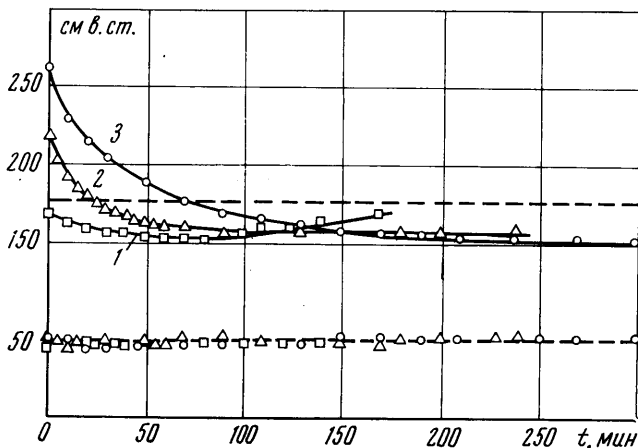


Следовательно, влияние полимерных добавок на сопротивление трения при безотрывном течении в расширяющемся канале проявляется в полной мере в отличие от сужающегося канала, где их влияние на поток не обнаруживается. Но в таком потоке не наблюдаются и вихри переходного слоя. Эти результаты свидетельствуют в пользу того, что при движении у гладкой стенки эффект снижения сопротивления возникает благодаря воздействию полимерных добавок на генерацию и распад пристеночных вихрей.

Наблюдавшаяся в начале опыта с растворами полиоксипропилена большая величина потерь по сравнению с потерями для воды (для приведенных здесь случаев на ~50%



Фиг. 3

при $c=3 \cdot 10^{-4}$ и на ~25% при $c=10^{-4}$) может быть связана с существенными изменениями режима течения под влиянием континуальных вязкоупругих свойств свежих растворов этого полимера (появление вторичных течений и др.). Но исследование этих явлений в данной работе не проводилось.

В заключение автор благодарит В. Н. Калашникова за обсуждение работы.

Поступила 15 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W. The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 30, pt 4.
2. Corino E. R., Brodkey R. S. A visual investigation of the wall region in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 37, pt 1.
3. Баренблатт Г. И., Городцов В. А., Калашников В. Н. Турбулентность аномальных жидкостей. Тепло- и массоперенос, т. 3. Минск, 1968.

УДК 532.501.32

ПРОНИКАНИЕ КЛИНА В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

В. Б. ПОРУЧИКОВ

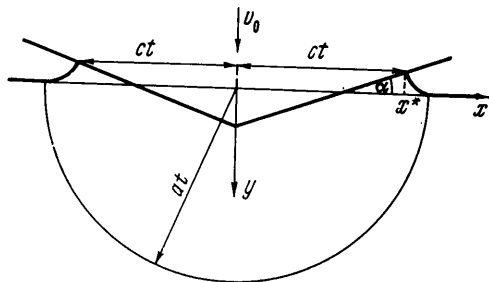
(Москва)

В линейной постановке решена плоская задача о симметричном входе с постоянной скоростью тупого жесткого клина в идеальную сжимаемую жидкость с учетом подъема свободной поверхности. Основные результаты решения этой задачи для случая несжимаемой жидкости получены в [1-3]. При больших скоростях входа и (или) для достаточно затупленных тел необходимо учитывать сжимаемость жидкости. Случаи проникания тонких¹ и тупых клинзев в линейной постановке рассматривались в [9, 10]. В частности, в [9] было получено решение задачи о проникании тупого

¹ Григорян С. С. Некоторые задачи гидродинамики тонких тел. Канд. дисс., МГУ, 1956.

клина в сжимаемую жидкость в дозвуковом случае без учета подъема свободной поверхности в окрестности клина. Однако, как показано ниже, нельзя пренебрегать подъемом жидкости вблизи клина, ибо в большинстве случаев это приводит к ошибке порядка самого решения.

1. Рассматривается плоская задача о симметричном проникании тупого жесткого клина с углом раствора $\pi - 2\alpha$ ($\alpha \ll 1$) в идеальную сжимаемую жидкость, занимающую в состоянии покоя область $y \geq 0$ (фиг. 1). В момент $t=0$ вершина клина достигает свободной поверхности в точке $x=0, y=0$, где x, y — неподвижная декартова система координат. Предполагается, что скорость клина v_0 постоянна, $v_0 \ll a$ и $v_0 \operatorname{ctg} \alpha < a$ (дозвуковой случай), где a — скорость звука в покоящейся жидкости. Так как с течением времени свободная поверхность в окрестности клина будет подниматься, то для правильной физической постановки задачи нужно учесть этот подъем, благодаря которому из-за малости угла α может существенно увеличиться смоченная поверхность клина. Обозначим неизвестную ширину смоченной поверхности $2ct$ (фиг. 1), где c — скорость движения границы смоченной поверхности вдоль оси абсцисс, которая будет постоянной вследствие автомодельности задачи. Влиянием брызговой



Фиг. 1

струи пренебрегаем, так как при малом α вертикальная составляющая количества движения, уносимого брызговой струей, будет мала [2]. Линеаризуя уравнения движения жидкости и граничные условия, с учетом симметрии задачи получим для скорости $v\{v_x, v_y\}$ следующую задачу внутри четверти круга:

$$(1.1) \quad \Delta v = \partial^2 v / a^2 \partial t^2 \quad (x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < a^2 t^2, t > 0)$$

$$(1.2) \quad v_y = v_0 \quad (y = 0, 0 \leq x < ct), \quad v_x = 0 \quad (y = 0, ct < x < at)$$

$$v_x = 0 \quad (x = 0, 0 < y < at), \quad v_x = v_y = 0 \quad (x^2 + y^2 = a^2 t^2, x > 0, y > 0)$$

$$(1.3) \quad v = \partial v / \partial t = 0 \quad (t = 0)$$

Давление p связано со скоростью v линеаризованным уравнением Эйлера

$$(1.4) \quad \partial v / \partial t = -\rho^{-1} \operatorname{grad} p$$

где ρ — плотность невозмущенной жидкости.

Кроме того, для единственности решения потребуем, чтобы p и v были интегрируемы в окрестности края смоченной поверхности клина $x=ct, y=0$ и у вершины $x=0, y=0$.

Параметр c , который войдет в решение задачи для функций v и p , должен быть определен по методу Вагнера [2] из кинематического соотношения, связывающего движение клина с движением частицы, которая лежит на свободной поверхности и имеет абсциссу $x^* = ct$ (фиг. 1)

$$(1.5) \quad - \int_0^t v_y(\tau, ct, 0) d\tau + v_0 t = ct \operatorname{tg} \alpha$$

где $v_y(t, x, y)$ берется из решения системы (1.1) — (1.3).

2. Переходя к безразмерным независимым переменным r и θ цилиндрической системы координат $x/(at) = r \cos \theta, y/(at) = r \sin \theta$ и применяя преобразование Чаплыгина к радиальной координате ($r = 2\epsilon (1 + \epsilon^2)^{-1}$), приводим волновое уравнение (1.1) в переменных x, y, t к уравнению Лапласа в переменных ϵ, θ цилиндрической системы координат. Вводя комплексную плоскость z по формуле $z = \epsilon \exp(i\theta)$ и переходя к плоскости ζ с помощью формулы $\zeta = (z^2 + 1)^2 (z^2 - 1)^{-2}$, где $\zeta = \xi + i\eta$, получаем смешанную задачу для определения аналитической функции $w(\zeta) = v_x + if$ в области $\operatorname{Im} \zeta > 0$ по значениям ее действительной и мнимой частей v_x и f на действительной оси. При этом для определения граничных условий используется зависимость между действительными функциями v_x, v_y и f

$$(2.1) \quad [1 - y^2 / (at)^2] dv_y = xy a^{-2} t^{-2} dv_x - (1 - \epsilon^2) (1 + \epsilon^2)^{-1} df$$

которую можно получить так же, как в [10], при решении аналогичных задач. В результате с помощью формулы Келдыша – Седова [11] сразу выписываем решение этой задачи

$$(2.2) \quad w(\xi) = -iv_0\lambda^{1/2} \{1 - [\xi - 1]/(\xi - \lambda)\}^{1/2} / E(\lambda^{-1/2})$$

где $\lambda = (1 - c^2 a^{-2})^{-1}$, $E(\lambda^{-1/2})$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $\lambda^{-1/2}$. Для выделения однозначной ветви радикала $[(\xi - 1)/(\xi - \lambda)]^{1/2}$ в плоскости ξ вдоль отрезка действительной оси $[1, \lambda]$ проведен разрез, и радикал считается положительным при $\xi = 0$.

Используя формулы (1.4), (2.1) и (2.2), окончательно получаем следующее выражение для распределения давлений на клине:

$$(2.3) \quad p = \rho v_0 c [1 - x^2/(ct)^2]^{-1/2} / E(\lambda^{-1/2})$$

Из (2.3) следует, что минимум давления достигается в центре смоченной поверхности — в вершине клина. У края смоченной поверхности давление имеет интегрируемую особенность. Для случая проникания в несжимаемую жидкость формула для распределения давлений на поверхности клина получается из (2.3) при $a \rightarrow \infty$

$$(2.4) \quad p = \rho v_0 c [1 - x^2/(ct)^2]^{-1/2}$$

Формула (2.3) отличается от (2.4) множителем $1/E(\lambda^{-1/2})$, который меняется в пределах от $2/\pi$ до 1 при изменении c/a от 1 до 0, и, следовательно, давление на клине в сжимаемой жидкости всегда меньше давления в несжимаемой жидкости при одних и тех же значениях ρ , v_0 , c , x/t .

Подставляя в формулу (1.5) значение v_y , найденное из (2.1) и (2.2), получаем трансцендентное уравнение для определения c

$$(2.5) \quad 2E(\lambda^{-1/2}) c \operatorname{tg} \alpha = \pi v_0$$

Исследуя зависимость $cv_0^{-1} \operatorname{tg} \alpha$ от M ($M = a^{-1} v_0 \operatorname{tg} \alpha$) из (2.5), легко показать, что $cv_0^{-1} \operatorname{tg} \alpha$ является монотонно убывающей функцией M в диапазоне $0 < M < 1$. В предельном случае несжимаемой жидкости ($M \rightarrow 0$) получаем известный результат [2]: $cv_0^{-1} \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \pi/2$. В предельном случае $M \rightarrow 1$ имеем $cv_0^{-1} \operatorname{tg} \alpha \rightarrow 1$, т. е. свободная поверхность жидкости вне клина остается невозмущенной, что соответствует физической картине течения.

Если c определяется из уравнения (2.5), то для распределения давлений на поверхности тупого клина получаем из (2.3) следующее выражение:

$$(2.6) \quad p_1 = 2\pi^{-1} c^2 \rho \operatorname{tg} \alpha [1 - x^2/(ct)^2]^{-1/2}$$

Полагая в (2.3) $c = v_0 \operatorname{tg} \alpha$, получаем формулу для распределения давлений на клине в сжимаемой жидкости без учета подъема свободной поверхности, полученную ранее в [9]

$$(2.7) \quad p_2 = \rho v_0^2 \operatorname{ctg} \alpha [1 - (x \operatorname{tg} \alpha)^2 / (v_0 t)^2]^{-1/2} / E(\sqrt{1 - M^2})$$

При $M \rightarrow 0$ ($c \rightarrow 2^{-1} \pi v_0 \operatorname{ctg} \alpha$) получаем из (2.6) формулу для случая несжимаемой жидкости с учетом подъема

$$(2.8) \quad p_3 = 2^{-1} \pi \rho v_0^2 \operatorname{ctg} \alpha [1 - (2x \operatorname{tg} \alpha)^2 / (\pi v_0 t)^2]^{-1/2}$$

а из (2.7) — формулу для случая несжимаемой жидкости без подъема

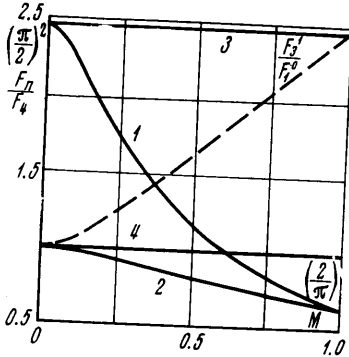
$$(2.9) \quad p_4 = \rho v_0^2 \operatorname{ctg} \alpha [1 - (x \operatorname{tg} \alpha)^2 / (v_0 t)^2]^{-1/2}.$$

Для результирующих сил F_n ($n=1-4$), действующих на проникающий клин в момент t , соответственно от распределения давлений p_n из (2.6) — (2.9) получаем

$$(2.10) \quad F_1 = 2c^3 \rho t \operatorname{tg} \alpha, \quad F_2 = \pi \rho v_0^3 t \operatorname{ctg}^2 \alpha / E(\sqrt{1 - M^2}) \\ F_3 = 2^{-2} \pi^3 \rho v_0^3 t \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad F_4 = \pi \rho v_0^3 t \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

Графики зависимостей F_n/F_4 ($n=1-4$) от M , обозначенные соответственно номерами $n=1-4$, представлены на фиг. 2. Отсюда видно, что в предельном случае $M \rightarrow 0$ кривая 1, построенная с учетом сжимаемости и подъема жидкости, дает результат из теории несжимаемой жидкости с подъемом: $F_1/F_4 = F_3/F_4 = \pi^2/4$. В другом предельном случае, $M \rightarrow 1$, кривая 1 дает результат $F_1/F_4 = 2/\pi$, совпадающий с аналогичным предельным результатом, который легко получить из сверхзвукового случая ($M > 1$) при $M \rightarrow 1$ [10]. Как видно из графиков, теория несжимаемой жидкости с учетом подъема (кривая 3) значительно завывает силу, найденную по теории сжимаемой

жидкости с подъемом (кривая 1) при числах M , не близких к нулю. При $M \rightarrow 1$ для отношения этих сил получаем: $F_3/F_1 = \pi^3/8 \approx 3.9$. С другой стороны, решение, полученное по теории сжимаемой жидкости без учета подъема (кривая 2), существенно занижает полученный результат (кривая 1) при числах M , не близких к единице. При $M \rightarrow 0$ их отношение достигает максимальной величины: $F_1/F_2 = \pi^2/4 \approx 2.5$. Следовательно, для правильного вычисления сил на всем интервале $0 < M < 1$ необходимо учитывать как сжимаемость, так и подъем свободной поверхности, т. е. пользоваться кривой 1.



Фиг. 2

пунктиром на фиг. 2. Отсюда видно, что при числе M , не близких к нулю, максимальная сила, вычисленная по теории несжимаемой жидкости, существенно превышает аналогичный результат для сжимаемой жидкости. С увеличением M величина F_3^1/F_1^0 растет и при $M \rightarrow 1$ достигает значения $\pi^2/4 \approx 2.5$.

Автор признателен М. Р. Ярмаркову за выполненные численные расчеты.

Поступила 18 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman T. The impact of seaplane floats during landing. NASA TN 321, 1929.
2. Wagner H. Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. ZAMM, 1932, Bd 12, Nr 4, S. 193–215.
3. Седов Л. И. Падение клина на поверхность воды. Техн. заметки ЦАГИ, 1935, вып. 52.
4. Garabedian P. R. Oblique water entry of a wedge. Commun. Pure and Appl. Math., 1953, vol. 6, No. 2, pp. 157–165.
5. Mackie A. G. A linearized theory of the water entry problem. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1962, vol. 15, pp. 137–151.
6. Dobrovolskaya Z. N. On some problems of similarity flow of fluid with a free surface. J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, pt. 4, pp. 805–829.
7. Hughes O. F. Solution of the wedge entry problem by numerical conformal mapping. J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt. 1, pp. 173–192.
8. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
9. Скалак Р., Фейт Д. Удар о поверхность сжимаемой жидкости. Тр. амер. о-ва инж.-мех., Сер. Б. Конструирование (русский перевод), 1966, № 3, стр. 97–104.
10. Сагомонян А. Я., Поручиков В. В. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. М., Изд. МГУ, 1970.
11. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.