УДК 532.5 : 517.5

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ И ОДНО ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В ГИДРОМЕХАНИКЕ

Г. М. МОРГУНОВ

(*Москва*)

Известно фундаментальное значение формулы Коши в теории аналитических функций комплексного переменного (см., например, [1]). На ее основе построено решение ряда классических задач механики (см., например [2, 3]).

Дальнейшее развитие теории функций комплексного переменного получено в классе псевдоаналитических функций [4]. При определенных условиях [4] для этих функций имеет место обобщенная формула Коши.

В статье дается вывод трехмерного аналога обобщенной формулы Коши для функций и областей интегрирования, удовлетворяющих некоторым общим свойствам.

В качестве приложения рассматривается внутренняя задача определения поля вектора **v** по его расхождению и вихрю. Схема решения и его структура оказывается удобной для практической реализации на ЭВМ. Вектор **v** можно трактовать как скорость течения идеальной жидкости.

1. Пусть V – односвязная область трехмерного пространства, ограниченная замкнутой поверхностью Ляпунова S. Следовательно, на S имеем

$$\vartheta \leqslant a r_{1,2}^{\alpha}, \qquad \alpha \leqslant 1 \tag{1.1}$$

где ϑ – острый угол, образованный внешними нормалями $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ к S в двух ее точках; $r_{1,2}$ – расстояние между этими точками и a – положительное число, не зависящее от их выбора.

Пусть далее $P(\xi_i)$, $P_0(x_i)$ и $Q(\xi_i)$, $Q_0(x_i)$ – текущая и фиксированная точки области V и поверхности S соответственно; $(x_i)=(x_1, x_2, x_3)$ – декартова система координат; $v_i(P)$ – непрерывные вместе со своими первыми производными функции в замкнутой области $\bar V$; $W(P_0, P)$ – гармоническая функция.

Тогда из первой формулы Грина следует:

$$\int\limits_V (\nabla v_1(P)\cdot\nabla W(P_0,P))\,dV = \oint\limits_S v_1(Q)\frac{\partial W(Q_0,Q)}{\partial n}\,dS \tag{1.2}$$

где ∇ – оператор Гамильтона.

Введем еще функции $W_{12}(P_0, P)$, $W_{21}(P_0, P)$ и $W_{13}(P_0, P)$, $W_{31}(P_0, P)$ такие, чтобы выполнялись соотношения

$$\partial W/\partial\xi_1=\partial W_{12}/\partial\xi_2, \qquad \partial W/\partial\xi_2=-\partial W_{21}/\partial\xi_1 \tag{1.3}$$

$$\partial W/\partial\xi_1=\partial W_{13}/\partial\xi_3, \qquad \partial W/\partial\xi_3=-\partial W_{31}/\partial\xi_1 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\,\partial\xi_2}(W_{12}-W_{21})=-\frac{\partial^2 W}{\partial\xi_3{}^2}, \qquad \frac{\partial^2 W_{12}}{\partial\xi_2{}^2}+\frac{\partial^2 W_{21}}{\partial\xi_1{}^2}=0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\,\partial\xi_3}(W_{13}-W_{31})=-\frac{\partial^2 W}{\partial\xi_2{}^2}, \qquad \frac{\partial^2 W_{13}}{\partial\xi_3{}^2}+\frac{\partial^2 W_{31}}{\partial\xi_1{}^2}=0 \tag{1.6}$$

Составим равенства

$$\begin{gathered}\int\limits_V \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(v_k\frac{\partial W_{ji}}{\partial\xi_i}\right)dV=\oint\limits_S v_k\frac{\partial W_{ji}}{\partial\xi_i}\cos(\widehat{n,\xi_i})\,dS\\ \begin{pmatrix} k=2; & i=1,2; & j=1,2; & i\neq j\\ k=3; & i=1,3; & j=1,3; & i\neq j\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{1.7}$$

Сложим левые и правые части (1.2) и (1.7). После простых преобразований с учетом (1.3) – (1.6) окончательно найдем

$$\int\limits_V \left[\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial\xi_i}\right)\frac{\partial W}{\partial\xi_1}-\left(\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}-\frac{\partial v_1}{\partial\xi_2}\right)\frac{\partial W}{\partial\xi_2}+\left(\frac{\partial v_1}{\partial\xi_3}-\frac{\partial v_3}{\partial\xi_1}\right)\frac{\partial W}{\partial\xi_3}\right]dV= \tag{1.8}$$

$$= \oint_S \left\{ v_1 \frac{\partial W}{\partial n} + v_2 \left[\frac{\partial W}{\partial \xi_1} \cos(\widehat{n, \xi_2}) - \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \cos(\widehat{n, \xi_1}) \right] + \right.$$

$$\left. + v_3 \left[\frac{\partial W}{\partial \xi_1} \cos(\widehat{n, \xi_3}) - \frac{\partial W}{\partial \xi_3} \cos(\widehat{n, \xi_1}) \right] \right\} dS$$

Записывая формулу (1.2) для функций $v_2(P)$, $v_3(P)$, после аналогичных построений с учетом циклической перестановки нижних индексов получим еще два соотношения, которые следуют из (1.8) также при циклической перестановке индексов.

Эти равенства можно записать компактно в векторной форме, если под $v_i(P)$ понимать составляющие некоторого вектора $\mathbf{v}(P)$. Именно

(1.9) $$\int_V [\nabla W(\nabla\cdot\mathbf{v}) + (\nabla\times\mathbf{v})\times\nabla W] dV = \oint_S [\mathbf{v}(\nabla W\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{v}\times(\nabla W\times\mathbf{n})] dS$$

Примем теперь в качестве функции $W(P_0, P)$ фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$W(P_0, P) = 1/r(P_0, P) = [(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2]^{-1/2}$$

Выделяя точку P_0 сферой бесконечно малого радиуса ε и переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получим

(1.10) $$\mathbf{v}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\nabla \frac{1}{r} (\nabla\cdot\mathbf{v}) + (\nabla\times\mathbf{v})\times\nabla\frac{1}{r} \right] dV -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\mathbf{v}\left(\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{n} \right) + \mathbf{v}\times\left(\nabla\frac{1}{r}\times\mathbf{n} \right) \right] dS$$

Уравнение (1.10) представляет собой трехмерный аналог обобщенной формулы Коши.

Заметим, что запись обобщенной формулы Коши в векторной форме также имеет вид (1.10) с заменой функции r^{-1} на $\ln r$ и коэффициента 4π на 2π.

Дифференцируя (1.10) по x_i ($i=1, 2, 3$), составим выражения для расхождения и компонент вихря вектора $\mathbf{v}(P_0)$. Совершим далее в интеграле по V предельный переход при $P\to P_0$. Тогда с учетом

$$\Delta_{P_0, P} \frac{1}{r}(P_0, P) = \delta(P_0-P)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\delta(P_0-P)$ – трехмерная дельта-функция, найдем, что (1.10) является решением системы дифференциальных уравнений эллиптического типа

(1.11) $$\operatorname{div}\mathbf{v}(P) = R(P), \qquad \operatorname{rot}\mathbf{v}(P) = \Omega(P)$$

правые части которых удовлетворяют условиям

(1.12) $$\operatorname{div}\Omega(P) = 0, \qquad \int_V R(P)\,dV = \oint_S v_n(Q)\,dS$$

Здесь v_n – нормальная составляющая вектора $\mathbf{v}$ на S.

Уравнения (1.11) с правыми частями, удовлетворяющими соотношениям (1.12), естественно назвать трехмерным аналогом неоднородной системы Коши – Римана.

Найдем предельное выражение $\mathbf{v}$ на S. Для этого в (1.10) устремим $P_0\to Q_0$. Учитывая скачок потенциала двойного слоя на границе области [1], имеем

(1.13) $$\mathbf{v}(Q_0) = \frac{1}{2\pi} \int_V \left[\nabla \frac{1}{r} (\nabla\cdot\mathbf{v}) + (\nabla\times\mathbf{v})\times\nabla\frac{1}{r} \right] dV -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \oint_S{}' \left[\mathbf{v}\left(\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{n} \right) + \mathbf{v}\times\left(\nabla\frac{1}{r}\times\mathbf{n} \right) \right] dS$$

В (1.13) интеграл по S рассматривается в смысле главного значения [5].

Если поле $\mathbf{v}$ является потенциальным и соленоидальным, то в формулах (1.10), (1.13) будет отсутствовать интегрирование по V.

2. Применим полученные результаты к решению следующей задачи гидромеханики: в замкнутой области $\bar{V}$ определить поле вектора скорости $\mathbf{v}$, если заданы его расхождение $R(P)$, вихрь $\Omega(P)$ и значения нормальной составляющей $v_n(Q)$ на S.

Предполагается, что функции $R(P)$, $\Omega(P)$ и $v_n(Q)$ удовлетворяют условиям (1.12). При этом решение поставленной задачи существует и оно единственно.

Составляющие вектора $\mathbf{v}(P)$ определяются сразу по формуле (1.10), если только известны компоненты $\mathbf{v}(Q)$ на S. Значения $v_i(Q)$ могут быть найдены с помощью формулы (1.13).

Действительно, введем на S локальную триортогональную систему координат (s_1, s_2, n). Пусть v_{s1}, v_{s2}, v_n – проекции $\mathbf{v}(Q)$ на соответствующие направления, а (s_{10}, s_{20}, n_0) – координаты фиксированной точки Q_0 на S в новой системе. Тогда из (1.13) получим

$$v_{si}(Q_0)-\sum_{j=1}^{2}\oint_S K_{ij}(Q_0,Q)\,v_{sj}(Q)\,dS=f_i(Q_0)\qquad(i=1,2)\tag{2.1}$$

$$K_{ij}(Q_0,Q)=(\cos(\widehat{n,s_{i0}})\cos(\widehat{r,s_j})-\cos(\widehat{s_j,s_{i0}})\cos(\widehat{r,n}))/2\pi r^2\tag{2.2}$$

Правые части (2.1) являются известными функциями и записываются в виде

$$f_i(Q_0)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_V\left[\nabla\frac{1}{r}(\nabla\cdot\mathbf{v})+(\nabla\times\mathbf{v})\times\nabla\frac{1}{r}\right]dV\right\}_i-\tag{2.3}$$

$$-\oint_S{}'\frac{\cos(\widehat{r,s_{i0}})}{2\pi r^2}v_n(Q)\,dS$$

Здесь нижний индекс i в интеграле по V означает, что берется проекция вектора в фигурных скобках на направление s_{i0}. Сингулярный интеграл в (2.3) существует, если его плотность удовлетворяет условию Липшица [5]. Поскольку принято (см. п. 1), что $v_n(Q)$ обладает непрерывными первыми производными, это условие выполнено с показателем, равным единице.

Дадим теперь верхнюю оценку ядер K_{ij}. В силу (1.1) в малой окрестности точки Q_0 имеем [1]

$$|\cos(\widehat{n,s_{i0}})\cos(\widehat{r,s_j})-\cos(\widehat{s_j,s_{i0}})\cos(\widehat{r,n})|\leqslant c_{ij}ar^{\alpha}\tag{2.4}$$

Отсюда для всех $r\leqslant h$, где h – диаметр области $\bar{V}$, получим

$$|K_{ij}(Q_0,Q)|<C_{ij}ar^{\alpha-2}\tag{2.5}$$

В (2.4), (2.5) c_{ij}, C_{ij} – ограниченные положительные числа.

Из (2.5) следует, что равенства (2.1) представляют собой систему двух интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода со слабой особенностью.

Если конфигурация и мера $\bar{\mathbf{V}}$ такова, что выполняется неравенство [5]

$$(2-\alpha)/2\pi Cah^{2-\alpha}>1,\qquad C=\sup C_{ij}\tag{2.6}$$

то система (2.1) имеет заведомо единственное решение и его можно получить методом последовательных приближений.

Поступила 10 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, т. 4. М.– Л., Гостехиздат, 1953.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
3. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
4. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
5. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я.* Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.