

ПУЛЬСАЦИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ

В. Г. ГАСЕНКО, В. В. СОБОЛЕВ

(Новосибирск)

Рассматривается эволюция радиуса сферического кавитационного пузырька в несжимаемой неньютоновской жидкости под действием внешнего звукового поля. Изучаются неньютоновские жидкости, обладающие релаксационными свойствами, а также псевдопластичные и дилатантные жидкости со степенным уравнением состояния. Выводятся уравнения для пульсаций газового пузырька, рассматривается устойчивость его радиальных осцилляций и сферической формы, приводится выражение для собственной частоты пульсаций кавитационной полости в релаксирующей жидкости. Уравнения интегрируются численно. Показано, что в релаксирующей неньютоновской жидкости вязкость может приводить к неустойчивости радиальных пульсаций и сферической формы кавитационной полости. Проведено сравнение полученных результатов с поведением газового пузырька в ньютоновской жидкости.

1. Газовый пузырек в неньютоновской жидкости. Основные уравнения и соотношения. Поведение сферической кавитационной полости и устойчивость сферической формы и радиальных пульсаций газового пузырька в ньютоновской жидкости исследовались в [1-8]. Рассмотрим эволюцию газовой кавитационной полости в неньютоновской несжимаемой жидкости с релаксационными свойствами. В этом случае тензор напряжений имеет вид [9-11]

$$(1.1) \quad \tau_{ij} = -\delta_{ij}p + \mu \sigma_{ij} + \chi \int_{-\infty}^t \exp \left[-\frac{(t-t')}{\theta} \right] \frac{d}{dt'} \sigma_{ij}(t') dt'$$

$$\chi = \mu(\kappa/\theta - 1), \quad \kappa \ll \theta$$

Здесь τ_{ij} — тензор напряжений, σ_{ij} — тензор скоростей деформации, δ_{ij} — символ Кронекера, p — давление, t — время, μ — коэффициент ньютоновской вязкости, θ — характерное время релаксации, κ — характерное время ретардации.

Рассмотрим также реологическую жидкость, подчиняющуюся степенному уравнению состояния. Для определенности возьмем трехпараметрическую модель Эллиса

$$(1.2) \quad \tau_{ij} = -\delta_{ij}p + \sigma_{ij} [\mu + \mu_0 |\sigma_{m1}\sigma_{lm}|^{(\alpha-1)/2}]$$

где α , μ , μ_0 — положительные константы.

Соотношение (1.2) отличается большой общностью и гибкостью. Оно включает в себя как частные случаи ньютоновскую ($\alpha=1$) и собственно степенную ($\mu=0$) жидкости. При $\alpha < 1$ модель описывает псевдопластичные жидкости. Случай $\alpha > 1$ соответствует дилатантным веществам. Параметры α , μ , μ_0 являются постоянными для данной жидкости в определенных диапазонах сдвиговых скоростей. В дальнейшем будем рассматривать такие скорости сдвига, при которых параметры в (1.2) не меняются для конкретной жидкости. Вводя потенциал скорости и проводя интегрирование уравнения движения в сферически симметричном случае, получим интеграл Лагранжа — Коши, который имеет известный вид [3-5]. Затем обычным путем, используя (1.1) и (1.2) (см., например, [3-5]), полу-

чаем уравнения для радиуса кавитационной полости в звуковом поле. Предполагается, что внутри пузырька находится газ, подчиняющийся адиабатическому закону

$$(1.3) \quad L+L_1=0, \quad L+L_2=0$$

$$(1.4) \quad L=R\dot{R}+3\dot{R}^2/2+\rho^{-1}\{P_0-P_m \sin \omega t-P_0(R_0/R)^{3\gamma}+4\mu\dot{R}/R\}$$

$$L_1 = \frac{4\chi}{\rho} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-t')}{\theta}\right] \left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2}\right) dt'$$

$$L_2 = \rho^{-1} 4\mu_0 \alpha^{-1} 24^{(\alpha-1)/2} \dot{R} |\dot{R}|^{\alpha-1} R^{-\alpha}$$

Здесь P_0 — невозмущенное давление в жидкости, P_m , ω — амплитуда и частота звукового поля, R_0 — невозмущенный радиус полости, γ — показатель адиабаты. Точки в (1.3), (1.4) и далее означают дифференцирование по времени. Уравнения (1.3), (1.4) описывают пульсации газового пузырька в релаксирующей и степенной жидкостях соответственно. При $\theta \rightarrow \infty$ (1.3), (1.4) при $\mu_0=0$ переходят в известное уравнение Нолтинга — Непайраса для колебаний полости в ньютоновской жидкости [2].

Рассмотрим устойчивость радиальных пульсаций кавитационного газового пузырька в неньютоновской жидкости. Подставим в (1.3), (1.4) возмущенный радиус полости

$$(1.5) \quad \xi(t) = R(t) + \varepsilon(t)$$

где $\varepsilon(t)$ — возмущение радиального движения, $|\varepsilon(t)| \ll R(t)$. Линеаризуя по ε , получаем

$$(1.6) \quad M+M_1=0, \quad M+M_2=0$$

$$(1.7)$$

$$M = \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} (3\dot{R} + 4\mu\rho^{-1}/R)/R + \varepsilon [\ddot{R} + 3\gamma\rho^{-1}P_0(R_0/R)^{3\gamma+1}/R_0 - 4\mu\rho^{-1}\dot{R}/R^2]/R$$

$$M_1 = \frac{4\chi}{\rho R} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-t')}{\theta}\right] \left(\varepsilon + \frac{2\varepsilon\dot{R}}{R} - \frac{\varepsilon\dot{R}}{R} + \frac{2\varepsilon\dot{R}^2}{R^2}\right) \frac{dt'}{R}$$

$$M_2 = 4\mu_0\rho^{-1} 24^{(\alpha-1)/2} / R^{\alpha+1} |\dot{R}|^{\alpha-1} (\dot{\varepsilon} - \varepsilon/R)$$

Проводимое рассмотрение справедливо в предположении неизменности сферической формы кавитационной полости. Однако, как известно [6,7], в некоторых случаях сферическая форма неустойчива. Поэтому представляет интерес рассмотреть устойчивость сферической формы пузырька в неньютоновской жидкости.

Пусть возмущенный радиус полости r_s имеет вид

$$(1.8) \quad r_s = R + a_n Y_n$$

где Y_n — сферические гармоники порядка n , a_n — амплитуда сферических гармоник. Предполагается, что $|a_n(t)| \ll R(t)$.

Следуя работе [6], с учетом (1.3) получим уравнение для амплитуд сферических гармоник возмущения формы пузырька в релаксирующей жидкости

$$(1.9) \quad \ddot{a}_n + F\dot{a}_n + Ea_n + G = 0$$

$$(1.10) \quad F = 3\dot{R}/R + 2\mu n(n+1)(n+2)/(R^2\Delta)$$

$$E = \Delta^{-1} \{ \dot{R} [\rho_2(n+1)(n+2) - \rho n(n-1)] / R + 4\mu\dot{R} n(n+1)(n-1) / R^3 \}$$

$$G = \frac{4\chi}{R\Delta} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-t')}{\theta}\right] n(n+1)/2R\{\ddot{a}_n(n+2) + \dot{a}_n(n-4)\dot{R}/R +$$

$$+ 2a_n(n-1)(\dot{R}-\dot{R}^2/R)/R\} dt'$$

$$\Delta = n\rho + (n+1)\rho_2$$

где ρ_2 — плотность газа. Если $\mu=0$, то уравнение (1.9) принимает известный вид [6].

Аналогично (1.9) выводится уравнение, описывающее поведение амплитуд a_n сферических гармоник в случае степенной жидкости

$$(1.11) \quad \ddot{a}_n + B\dot{a}_n + Aa_n = 0$$

$$(1.12) \quad B = \frac{3\dot{R}}{R} + \frac{2\mu_0 24^{(\alpha-1)/2} |\dot{R}|^{\alpha-1}}{3(n+3\alpha)R^{\alpha+1}\Delta} n(n+1) [(n+3\alpha)(2n\alpha+6\alpha+n) -$$

$$- (2n^2+9n+6n\alpha+18\alpha)(\alpha-1)\alpha]$$

$$A = \Delta^{-1} \left\{ \dot{R}R^{-1} [\rho_2(n+1)(n+2) - \rho n(n-1)] + \right.$$

$$+ \frac{4\mu_0 24^{(\alpha-1)/2} |\dot{R}|^\alpha}{3(n+3\alpha)R^{\alpha+2}} n(n+1) [(2n\alpha-3\alpha+n) \times$$

$$\left. \times (n+3\alpha) - 2(n^2+3n\alpha-18\alpha)(\alpha-1)\alpha] \right\}$$

При $\alpha=1$ (1.11) переходит в уравнение для амплитуд сферических гармоник в ньютоновской жидкости.

Рассмотрим вопрос о собственной частоте ω_0 пульсаций кавитационной полости в релаксирующей жидкости. В работе [12] найдено выражение для ω_0 в случае несжимаемой ньютоновской жидкости

$$(1.13) \quad \omega_0 = \frac{1}{R_0} \left[\frac{3\gamma P_0}{\rho} - \left(\frac{2\mu}{\rho R_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$

При малых колебаниях кавитационного пузырька, когда $R=R_0 + \varepsilon_0 \exp(\lambda t)$, где ε_0 — амплитуда малых колебаний, собственная частота определяется мнимой частью λ . В случае релаксирующей жидкости трудно показать, что для λ получается кубическое уравнение

$$(1.14) \quad \lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0, \quad b = 1/\theta + 4\mu\chi/\rho R_0^2\theta \quad c = \frac{1}{R_0^2\rho} \left(3\gamma P_0 + \frac{4\mu}{\theta} \right)$$

$$d = \frac{3\gamma P_0}{\rho R_0^2\theta}$$

Выражение для собственной частоты имеет вид

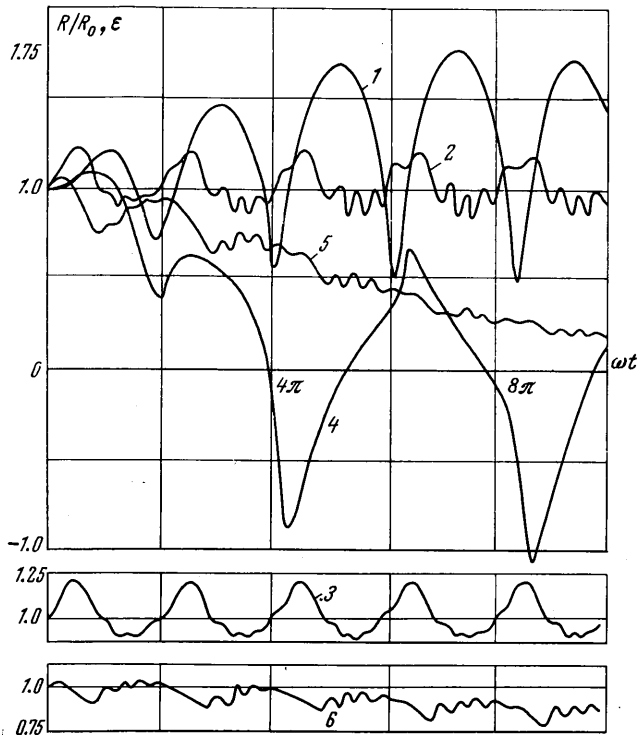
$$(1.15) \quad \omega_0 = 1/2 \sqrt[3]{3} |(\beta_1 + \beta_2^{1/2})^{1/2} - (\beta_1 - \beta_2^{1/2})^{1/2}|$$

$$\beta_1 = b(c/6 - b^2/27) - d/2, \quad \beta_2 = c^2(c/27 - b^2/108) + d[d/4 + b(b^2/27 - c/6)]$$

2. Численное исследование пульсаций кавитационной полости в релаксирующей жидкости. Изучим поведение радиуса газового пузырька и устойчивость его радиальных пульсаций и сферической формы с помощью численного интегрирования уравнений (1.3), (1.6) и (1.9). В этих интегрированных дифференциальных уравнениях при нахождении решения в мо-

мент времени t интегральная часть вычислялась по значениям решения в предыдущие моменты времени и система уравнений решалась методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования по t , который обеспечивал относительную точность 10^{-5} . Решения систем, полученные после второй итерации, практически совпадали с результатами первой итерации.

Рассматривались газовые пузырьки с $R_0=10^{-4}$ см в резонансном ($\omega=\omega_0$), зарезонансном ($\omega=5\omega_0$) и дорезонансном ($\omega=0.2\omega_0$) случаях. Везде $P_0=1$ атм, $\gamma=1.4$, $\mu=10^{-2}$ см²/сек.



Фиг. 1

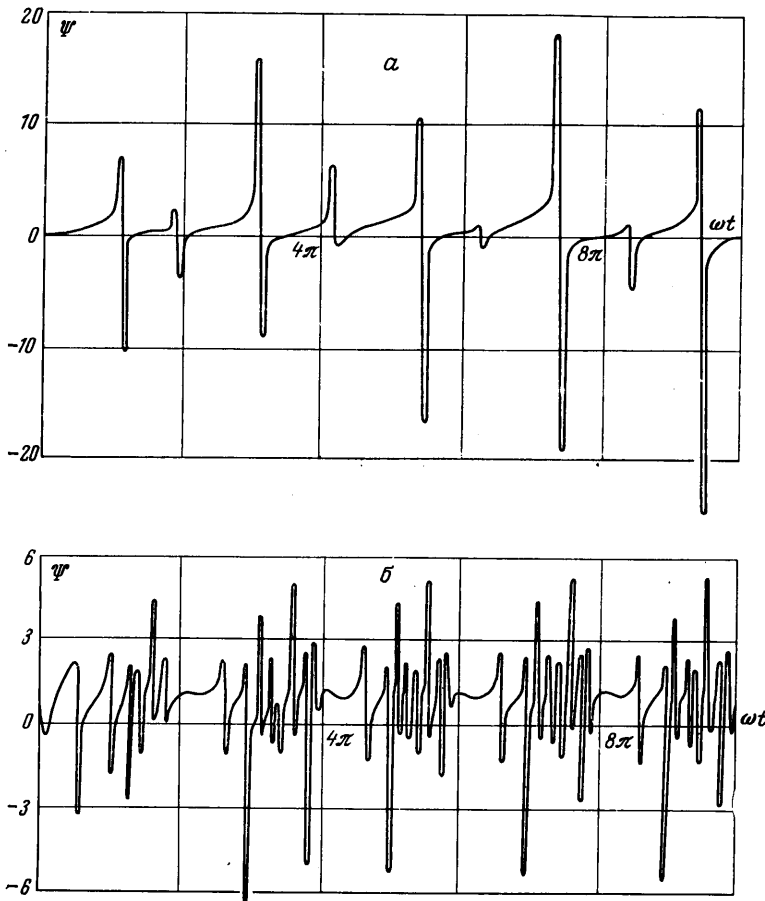
В зарезонансном и дорезонансном случаях амплитуда внешнего звукового поля $P_m=0.5$ атм, в резонансном случае $P_m=100$ атм. Параметры выбирались так, чтобы схлопывание кавитационной полости происходило как можно позднее.

Как известно [13], ньютоновская вязкость существенно влияет на устойчивость радиальных пульсаций и сферической формы полости. Соответствующий член в выражении для вязкого давления пропорционален \dot{R} , поэтому увеличение μ всегда приводит к более устойчивому поведению кавитационного пузырька. Отношение компоненты вязкого давления, обусловленной релаксационными свойствами неньютоновской жидкости, к \dot{R} есть, вообще говоря, знакопеременная интегральная функция t . Поэтому можно предположить, что релаксационная вязкость в некоторых случаях приводит к неустойчивости радиальных пульсаций и сферической формы полости.

Численные эксперименты показывают, что поведение радиуса пузырька и его устойчивость зависят от соотношения между временем релакса-

ции θ и периодом $T = \omega_0^{-1}$ собственных колебаний кавитационной полости. Устойчивость сферической формы пузырька возрастает при уменьшении отношения θ/T .

На фиг. 1 кривая 1 изображает поведение радиуса $R(t)$ в резонансном случае, кривые 2, 3 — в дорезонансном. Здесь и далее $\kappa/\theta = 0.1$. Кривой 1 соответствует $\theta = \omega_0^{-1}$ (случай I), кривой 2 — $\theta = 10\omega_0^{-1}$ (случай II), кривой 3 — $\theta = 0.1\omega_0^{-1}$ (случай III). Кривыми 4, 5, 6 показано поведение возмущения радиального движения $\varepsilon(t)$ в случаях I, II, III соответственно.



Фиг. 2

Отметим, что в ньютоновской жидкости радиальные пульсации в приведенных случаях устойчивы [13].

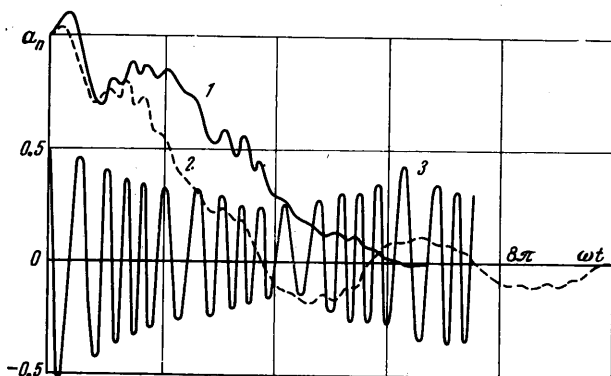
На фиг. 2, а, б приведена эволюция $\Psi(t)$ отношения общего вязкого давления к ньютоновскому

$$(2.1) \quad \Psi(t) = 1 + \frac{\chi R}{\mu R} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-t')}{\theta}\right] (R/R - \dot{R}^2/R^2) dt'$$

Кривая на фиг. 2, а соответствует случаю I, на фиг. 2, б — случаю III. Из приведенных графиков видно, что $\Psi(t)$ есть осциллирующая знакопе-

ременная функция t . Ее вид существенно определяется эволюцией радиуса полости. Это хорошо видно из сравнения соответствующих кривых на фиг. 1, 2.

Перейдем к рассмотрению устойчивости сферической формы кавитационной полости в релаксирующей жидкости. Как показывают результаты численного интегрирования уравнений (1.3) и (1.9), релаксационная вязкость существенно влияет на поведение амплитуд $a_n(t)$ сферических гармоник возмущения. Оказывается, что релаксационные диссипативные эффекты сильнее влияют на эволюцию низших гармоник, делая их более устойчивыми по сравнению с высшими. Отметим, что в ньютоновской жидкости наблюдается обратная ситуация [13]. На фиг. 3 показано поведение $a_n(t)$ в дорезонансном случае II. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $n=2, 3, 4$.



Фиг. 3

Отсюда видно, что низшие гармоники затухают быстрее (масштаб кривой 3 для наглядности уменьшен в два раза).

Влияние релаксации на поведение $a_n(t)$ можно объяснить видом функции $\Psi(t)$, которой определяется вязкое давление. Как правило, $\Psi(t)$ есть осциллирующая функция времени (см. фиг. 2). На низшие гармоники возмущения действует главным образом осредненное вязкое давление, которое в большинстве случаев является положительной величиной. Для высших гармоник более существенным является детальный вид $\Psi(t)$. Таким образом, низшие гармоники менее чувствительны к осциллирующей структуре $\Psi(t)$ и поэтому они более устойчивы.

Поведение амплитуд $a_n(t)$ сферических гармоник при различных соотношениях между собственной частотой кавитационной полости и частотой звукового поля качественно то же, что и в ньютоновской жидкости [13]. Поэтому соответствующие кривые для $a_n(t)$ не приводятся.

В случае степенной жидкости, как видно из (1.4) при реальных значениях параметров α , μ , μ_0 , вязкое давление увеличивается как для псевдопластичных ($\alpha < 1$), так и для дилатантных ($\alpha > 1$) жидкостей по сравнению с ньютоновской жидкостью ($\alpha = 1$). Кроме того, его отношение к \dot{R} всегда положительно. Естественно предположить, что поведение $R(t)$ в степенной жидкости будет качественно аналогично изменению радиуса пузырька в ньютоновской жидкости, а радиальные пульсации и сферическая форма кавитационной полости будут более устойчивы. Это подтверждают численные эксперименты.

Авторы благодарят И. Р. Шрейбера за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rayleigh*. On pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Philos. Mag. Ser. 6*, 1917, vol. 34, No. 200.
2. *Nolting B. E., Neppiras E. A* Cavitation produced by ultrasonics. *Proc. Roy. Soc.*, 1950, vol. 63B, p. 674.
3. *Флинн Х. Г.* Физика акустической кавитации в жидкостях. *Физическая акустика*, т. 1Б. М., «Мир», 1967.
4. *Черник А. Д.* Проблемы кавитации. Ленинград, «Судостроение», 1966.
5. *Физика и техника мощного ультразвука. Мощные ультразвуковые поля.* М., «Наука», 1968.
6. *Plesset M. S.* On the stability of fluid flows with spherical symmetry. *J. Appl. Phys.*, 1954, vol. 25, No. 1, p. 96.
7. *Plesset M. S., Mitchell T. P.* On the stability of the spherical shape of vapor cavity in a liquid. *Quart. Appl. Math.*, 1956, vol. 13, No. 4.
8. *Eller Antony, Flynn H. G.* Generation of a subharmonics of order onehalf by bubbles in a sound field. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1969, vol. 46, No. 3, pt. 2, p. 722.
9. *Рейнер М.* Реология. М., «Наука», 1965.
10. *Реология. Теория и приложения.* М., Изд-во иностр. лит., 1962.
11. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров. *Докл. АН СССР*, 1971, т. 200, № 4, стр. 809.
12. *Houghton G.* Theory of bubble pulsation and cavitation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1963, vol. 35, No. 9, p. 1387.
13. *Гасенко В. Г., Колесников В. Е., Соболев В. В.* Исследование устойчивости сферической кавитационной полости в звуковом поле. *ПМТФ*, 1973, № 6.
14. *Metzner A. B.* Non-Newtonian technology: fluid mechanics, mixing, and heat transfer. In: *Advances Chem. Engng*, vol. 1, N. Y., 1956.