МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1974

УДК 533.6.011.55

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ НЕРАВНОВЕСНЫМ ПОТОКОМ ВОЗДУХА

А. В. АНТОНЕЦ

(*Москва*)

Предлагается численный метод расчета неравновесных пространственных сверхзвуковых течений газа в ударном слое около боковой поверхности затупленных тел с изломами контура. Основная идея состоит в разделении исходной системы дифференциальных уравнений на две подсистемы, решаемые последовательно: сначала относительно газодинамических переменных – проекций скорости и давления, затем – относительно релаксирующих параметров и энтальпии. Для вычисления проекций скорости и давления используется итерационный метод прогонки [1, 2] в реализации [3]. Релаксационные уравнения и уравнение для энтальпии интегрируются численно вдоль линий тока.

Обсуждается влияние неравновесности физико-химических превращений на распределение величин в невязком ударном слое и на аэродинамические коэффициенты затупленных тел при гиперзвуковом обтекании их воздухом. Нестационарные аэродинамические коэффициенты вычисляются по методу искривленных тел [4].

Алгоритм расчета реализуется в виде программ на языке «Алгол-60» для ЭЦВМ БЭСМ-6.

1. Постановка задачи. Течение в ударном слое около поверхности затупленного тела химически реагирующей смеси газов описывается следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p,\qquad \frac{d\rho}{dt}=-\rho\operatorname{div}\mathbf{V} \tag{1.1}$$

$$\frac{d\ln i}{dt}=\frac{p}{\rho i}\frac{d\ln p}{dt},\qquad \frac{d\gamma_k}{dt}=\frac{R_0\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty}\frac{w_k}{\rho}\qquad \left(\gamma_k=\frac{\rho_k}{\rho}\Big/\frac{\mu_k}{\mu_\infty}\right) \tag{1.2}$$

$$(\mathbf{V},\mathbf{n}_b)=0$$

$$\mathbf{V}_2=\mathbf{V}_1-[(\mathbf{V}_1,\mathbf{n}_s)-D](1-k)\mathbf{n}_s,\quad p_2=p_1+\rho_1[(\mathbf{V}_1,\mathbf{n}_s)-D]^2(1-k) \tag{1.3}$$

$$i_2=i_1+[(\mathbf{V}_1,\mathbf{n}_s)-D]^2\frac{1-k^2}{2},\quad \gamma_k|_2=\gamma_k|_1,\quad k=\frac{\rho_1}{\rho_2},\quad D=\left(\frac{d\mathbf{R}_s}{dt},\mathbf{n}_s\right)$$

$$\rho=\frac{\mu}{\mu_\infty}\frac{p}{\theta},\quad \frac{\mu}{\mu_\infty}=\left[\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right]^{-1},\ i=\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\mu_\infty}\gamma_k,\quad \frac{h_k}{\mu_\infty}=h_k^0+c_{pk}\theta+e_{vk} \tag{1.4}$$

Молярные теплоемкости компонент при постоянном давлении c_{pk} равны $^5/_2$ для атомов и $^7/_2$ для двухатомных молекул. Колебательные энергии компонент e_{vk} при учете релаксации могут определяться тем же способом, что и концентрации компонент γ_k. В расчетах, однако, e_{vk} вычислялись по равновесным значениям, равным нулю для атомов и $\theta_{vk}/(\exp(\theta_{vk}/\theta)-1)$ – для двухатомных молекул. Замыкают постановку задачи данные об энтальпиях образования компонент h_k^0, характеристических температурах колебаний θ_{vk} и константах скоростей химических реакций, присутствующих в формулах для полных скоростей образования компонент w_k.

Из-за ограниченности объема статьи числовые значения различных констант, характеризующих выбранную модель воздуха (химически реагирующая смесь из девяти компонент: 1 — NO^+; 2 — O_2^+; 3 — N_2^+; 4 — NO; 5 — O_2, 6 — N_2, 7 — O, 8 — N, 9 — e^-), здесь не приводятся и принимаются в соответствии с теми же предположениями, что и в работах [5, 6].

2. Метод решения. По способу отыскания искомые функции разбиваются на две группы: проекции вектора скорости частиц газа на оси системы координат u, ϑ, w и давление p; энтальпия i и концентрации компонент γ_k (в общем случае величины, закон изменения которых вдоль траекторий частиц или линий тока установившихся течений задается обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка).

Вычисление u, ϑ, w, p приводится к отработанному ранее алгоритму [3]. Для этого полная производная $d\rho/dt$ записывается в виде

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt}-\rho\frac{\mu}{\mu_\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{d\gamma_k}{dt}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\mu_\infty}\frac{d\gamma_k}{dt}\right)\Big/\left(\frac{\mu}{\mu_\infty}c_p\theta\right)\right] \tag{2.1}$$

$$c_p=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\frac{\partial(h_k/\mu_\infty)}{\partial\theta},\qquad c^2=\varkappa\frac{p}{\rho},\qquad \varkappa=\left[1-1\Big/\left(c_p\frac{\mu}{\mu_\infty}\right)\right]^{-1}$$

Появление второго члена в правой части (2.1), обусловленного химической релаксацией, не выводит, очевидно, за рамки применения расчетной схемы [1], поскольку учет этого члена формально затрагивает лишь корректировку вектора-столбца свободных членов и не накладывает каких-либо ограничений на способ представления производных конечно-разностными отношениями.

Входными величинами к блоку уравнения состояния, по которым при неравновесных физико-химических реакциях определяются плотность ρ, замороженная скорость звука c, температура T и другие параметры, являются давление p, энтальпия i, концентрации компонент γ_k. Температура вычисляется из третьего уравнения (1.4) по методу хорд. Определив в текущей итерации u, ϑ, w, p, получаем энтальпию и концентрации компонент в рассчитываемых узловых точках конечно-разностной сетки из соотношений, порождаемых росписью соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль линий тока.

Формула, связывающая значения энтальпии в соседних точках n и $(n+1)$ на линии тока, используется в виде

$$i|^{n+1}=i|^{n}\left(\frac{p|^{n+1}}{p|^{n}}\right)^{z},\qquad z=\frac{p}{\rho i}\Big|^{n+1/2} \tag{2.2}$$

Ввиду того, что комплекс $p/\rho i$ является слабо меняющейся функцией в поле течения, формула (2.2) является достаточно точной и, в частности, совпадает с точным решением для совершенного газа с постоянным отношением теплоемкостей γ. При численном счете имеет значение и тот факт, что (2.2) сохраняет положительность энтальпии независимо от величины приращения $\Delta p=(p|^{n+1}-p|^{n})$. Представляет интерес также формула

$$i|^{n+1}=i|^{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\Big|^{n+1}+\frac{1}{\rho}\Big|^{n}\right)(p|^{n+1}-p|^{n}) \tag{2.3}$$

Совпадение (2.3) с соотношением между величинами до и после скачка уплотнения (см. (1.3)) служит основанием для предположения о целесообразности применения (2.3) при сквозном счете разрывов. По-видимому, (2.2) следует использовать при счете в областях разрежения, а (2.3) – в областях сжатия.

Построение схемы счета концентраций компонент основывается на замене на каждом шаге численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений системой нелинейных алгебраических уравнений, заменяемых, в свою очередь, в окрестности предыдущего приближения линейными

$$f_k(\gamma_1,\ldots,\gamma_N)\approx f_k(\gamma_1^\circ,\ldots,\gamma_N^\circ)+\frac{\partial f_k}{\partial\gamma_1}(\gamma_1-\gamma_1^\circ)+\ldots+\frac{\partial f_k}{\partial\gamma_N}(\gamma_N-\gamma_N^\circ)=0 \tag{2.4}$$

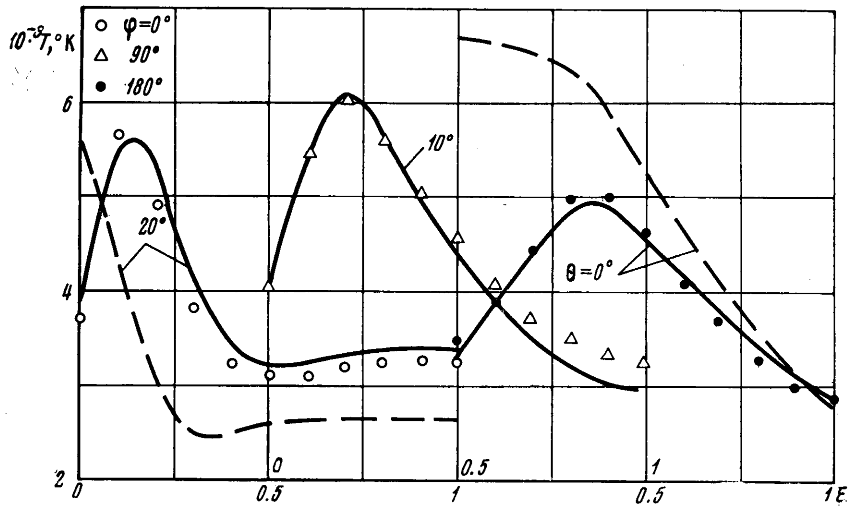
где через f_k обозначены левые части исходных уравнений после замены в них $d\gamma_k/dt$ конечно-разностными отношениями и переноса всех членов из правых частей уравнений в левые.

Производные $\partial f_k/\partial \gamma_i$ рассчитываются численным дифференцированием. Решение системы линейных алгебраических уравнений (2.4) достаточно просто находится, например, по методу [7].

Величины в точках пересечения с n-плоскостью линий тока, выпускаемых из узловых точек $(n+1)$-плоскости, определяются линейной интерполяцией по известным значениям величин в узловых точках n-плоскости. Заметим для сравнения, что в единственной известной до настоящего времени работе по расчету сверхзвуковых областей пространственного обтекания тел неравновесным потоком воздуха [8] интегрирование релаксационных уравнений вдоль линий тока осуществляется лишь в двух полуплоскостях симметрии течения, а зависимость соответствующих функций от меридионального угла аппроксимируется законом косинуса.

Начальные данные для расчетов сверхзвуковой области течения около тел со сферическим затуплением доставляются численными расчетами неравновесного обтекания сферы по программе [6]. Поскольку течение в окрестности затупления рассчитывается в сферической системе координат, а на боковой поверхности – в цилиндрической, то требуется пересчет от первой системы координат ко второй. Разворот начальных данных со «сферического» луча на «цилиндрический» осуществляется отдельной программой расчета неравновесного обтекания сферы в сферической системе координат с центром, располагаемым на начальном луче в точке под поверхностью сферы. Последующий пересчет величин на плоскость сопряжения носка и боковой поверхности аналогичен [3].

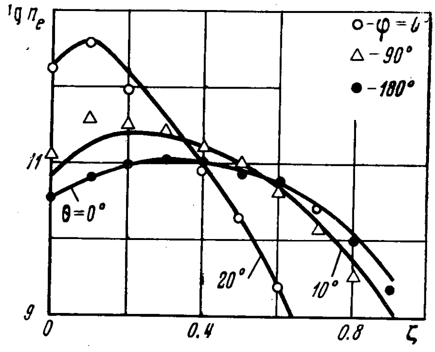
3. Обсуждение результатов. Многопараметрические задачи, трудности табличного описания решений которых достаточно очевидны, с одной стороны, создают потребность в разработке длительно функционирующих программ для ЭВМ, а с другой – усиливают интерес к различного рода



Фиг. 1

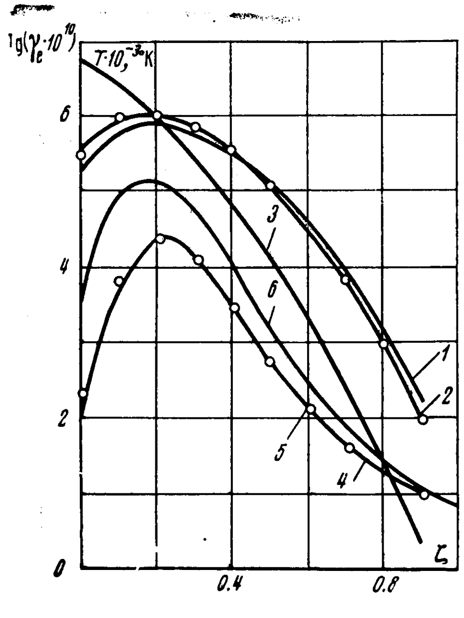
приближенным, полуэмпирическим зависимостям, сокращающим набор определяющих параметров или же с известной оценкой погрешности заменяющим трудоемкие расчеты менее сложными. Практическая ценность многих из полуэмпирических зависимостей состоит также и в том, что область их применимости оказывается более широкой, чем это удается обосновать. Проиллюстрируем, например, на фиг. 1–2 применение правила местных конусов [9] к определению распределения температуры и электронной концентрации поперек ударного слоя около затупленного конуса, ориентированного под углом атаки в неравновесном потоке воздуха. Результаты расчетов на фиг. 1–2 соответствуют следующим условиям: угол полураствора при вершине конуса $\theta=10°$; угол атаки $\alpha=10°$; высота полета в атмосфере Земли $H=60$ *км* ($p_\infty=2.4597$ *кг/м*^{2}, $T_\infty=253.4°$ K); скорость полета $V_\infty=7.4$ *км/сек*; радиус сферического носка $R_0=0.155$ *м*. Профили величин между поверхностью тела r_b и головной ударной волной r_s по координате $\zeta=(r-r_b)/(r_s-r_b)$ показаны для поперечной плоскости, расположенной на расстоянии $(x-x_c)=10R_0$ от плоскости сопряжения носка с боковой поверхностью.

Правило местных конусов ($\sin\theta_m=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha\cos\varphi$) несколько завышает давление на наветренной стороне конуса ($\varphi\sim 0$), занижает на подветренной ($\varphi\sim 180°$) и дает менее удовлетворительное согласование с давлением на образующих конуса, в окрестности которых существенно окружное перетекание газа ($\varphi\sim 90°$). Наибольшие погрешности величин в рассматриваемом случае использования правила местных конусов имеют значения: по давлению — до 30%, по температуре — до 20%, по электронной концентрации — менее одного порядка. Вполне удовлетворительная точность метода местных конусов, обнаруживаемая при расчете пространственных распределений n_e, позволяет сделать вывод о возможности широкого применения для этих целей простых, эффективных программ расчета двумерных течений, например, по методу линий тока [10].



Фиг. 2

Пунктирной кривой на фиг. 1 отмечены результаты для равновесно-диссоциирующего воздуха. Сравнение распределений давления в ударном слое около тела для неравновесного и равновесного течений свидетельствует о их близости, причем неравновесное давление больше равновесного на наветренной стороне тела и меньше — на подветренной. Вследствие этого в неравновесном потоке воздуха коэффициент нормальной силы c_n у затупленных конусов получается на несколько процентов больше, чем при равновесном обтекании.

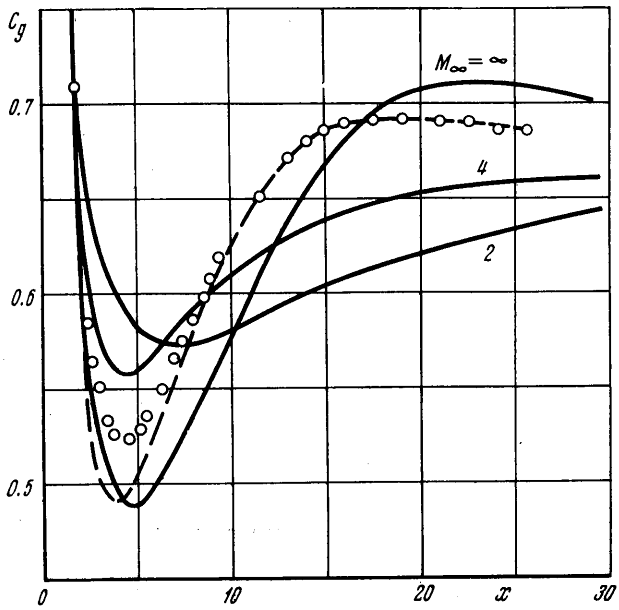


Фиг. 3

Некоторую информацию о влиянии параметра бинарного подобия $k=\rho_\infty[г/см^{-3}]\ R_0[М]\ 10^6$ на распределение температуры T и электронной концентрации γ_e в ударном слое содержит фиг. 3, где сопоставляются результаты из трех расчетов, соответствующих кривым *1*, *2*, *3* (H=60, 80, 80, R_0=0.08, 0.94, 0.08 (где H в *км*, R_0 в *м*), k=0.0264, 0.0197, 0.001675 при $\alpha=0$, $V_\infty=7.4$ *км/сек*, $\theta=10^6$, $x=10.8264\ R_0$).

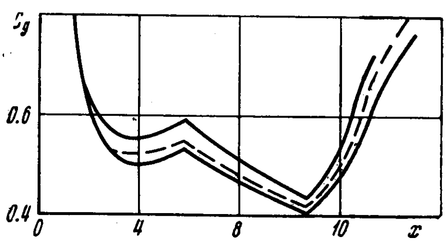
При близких значениях k даже в отсутствие строгого соблюдения условий бинарного подобия результаты сближаются (варианты 1 и 2).

Из имеющихся результатов расчетов, раскрывающих влияние неравновесности физико-химических превращений в воздухе на аэродинамические коэффициенты затупленных тел, приведем лишь вызывающие наибольший интерес данные о положении центра давления. На фиг. 4 показана зависимость коэффициента центра давления c_g от длины тела для затупленного конуса с углом полураствора $\theta=10°$ под углом атаки $\alpha=5°$ при обтекании



Фиг. 4

совершенным газом (кривые *1–3* для $M_\infty=2$, 4, ∞; $\gamma=1.4$) и с учетом равновесных (пунктир) и неравновесных (кружочки) физико-химических превращений ($H=60$ *км*, $V_\infty=7.4$ *км/сек*, $R_0=0.155$ *м*). Заметное отличие значений c_g для равновесного и неравновесного обтеканий локализуется в окрестности минимума c_g для длин конусов $2\leqslant L/R_0\leqslant 8$. Неравновесные значения c_g здесь лежат выше равновесных, а максимальное расхождение в точке минимума ~5%. Аналогичная зависимость $c_g(x)$ для тела с ломаной образующей ($\theta_1=10°$, $\theta_2=0$, $\theta_3=\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}\theta_1)$, $x_1=0.8264$, $x_2=5.8264$, $x_3=10.8264$) показана на фиг. 5 при $H=60$ *км*, $V_\infty=7.4$ *км/сек*, $R_0=0.155$ *м*, кривые *1–3* для $\alpha=1$, 5, 10°. Общие выводы относительно проявлений неравновесных эффектов на телах с изломами образующей близки здесь к сделанным для гладких тел. Некоторое представление о соответствии расчетных и экспериментальных значений c_g можно получить из работы [11].

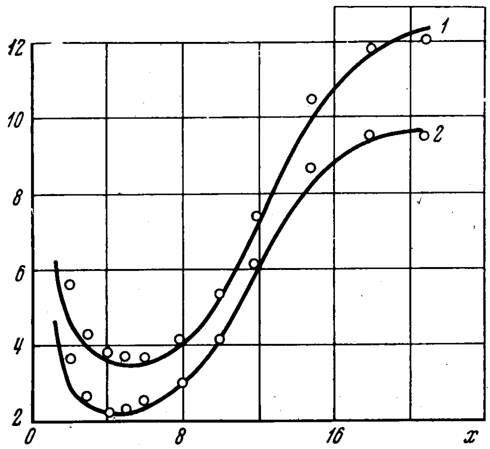


Фиг. 5

Продемонстрируем в заключение применение метода искривленных тел [4] к расчету нестационарных характеристик $c_{n\alpha}{}^{\omega}$ и $m_{z\alpha}{}^{\omega}$ тел при гиперзвуковом неравновесном обтекании их воздухом. Отметим, что первые результаты по методу [4] получены в работе [12] для случая пространственного обтекания затупленных конусов совершенным газом и равновесно-диссоциирующим воздухом. Удобно пользоваться формулами расчета нестационарных характеристик в следующих обозначениях:

$$c_{n\alpha}^{\omega}=x^{-1}[c_n^{\varepsilon}(p)-c_n^{\alpha}(xp)-(x_0-1)c_n^{\alpha}(p)]$$
$$m_{z\alpha}^{\omega}=x^{-1}[m_z^{\varepsilon}(p)-m_z^{\alpha}(xp)-(x_0-1)m_z^{\alpha}(p)] \tag{3.1}$$

где верхний значок обозначает величину, по которой проводится дифференцирование, а величины в скобках указывают переменную, заменяющую давление p в соответствующих интегралах c_n и m_z.



Фиг. 6

Форма искривленного тела в цилиндрической системе координат (x, φ, r) описывается выражениями

$$r=-(y_0\cos\varphi-z_0\sin\varphi)+\sqrt{r'^2-(y_0\sin\varphi+z_0\cos\varphi)^2} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi}=r\left[(y_0\sin\varphi+z_0\cos\varphi)+(r+y_0\cos\varphi-z_0\sin\varphi)\frac{1}{r'}\frac{\partial r'}{\partial\varphi'}\right]\Big/\Delta\quad\frac{\partial r}{\partial x}=$$

$$=\left[r'\frac{\partial r'}{\partial x}-y_0'(y_0+r\cos\varphi)+z_0'(r\sin\varphi-z_0)-\right.$$

$$\left.-[y_0'(r\sin\varphi-z_0)+z_0'(r\cos\varphi+y_0)]\frac{1}{r'}\frac{\partial r'}{\partial\varphi'}\right]\Big/\Delta$$

$$\Delta=(r+y_0\cos\varphi-z_0\sin\varphi)-(y_0\sin\varphi+z_0\cos\varphi)1/r'\partial r'/\partial\varphi'$$

где r', $\partial r'/\partial\varphi'$, $\partial r'/\partial x$ – величины для исходного тела, например для затупленного конуса

$$\frac{r'}{R_0}=\cos\theta+\operatorname{tg}\theta\frac{x-x_c}{R_0},\qquad\frac{\partial r'}{\partial\varphi'}=0,\qquad\frac{\partial r'}{\partial x}=\operatorname{tg}\theta$$

На фиг. 6 для условий $\theta=10°$, $\alpha=5°$, $H=60$ *км*, $V_\infty=7.4$ *км/сек*, $R_0=0.155$ *м* показано сравнение коэффициентов вращательных производных $c_{n\alpha}^{\omega}$ и $m_{z\alpha}^{\omega}$ (кривые *1* и *2*), полученных для центра колебаний в носке тела $x_0=0$ с учетом равновесных (кружочки) и неравновесных (сплошные линии) физико-химических превращений. Совпадение результатов в целом по длине конуса $0\leqslant(x-x_c)/R_0\leqslant20$ свидетельствует о том, что влияние в данном случае на нестационарные коэффициенты неравновесных физико-химических превращений мало.

Автор благодарит В. В. Лунева за внимание к работе и содействие ее завершению и Ю. В. Лесину за помощь в оформлении рукописи статьи.

Поступила 28 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко К. И., Воскресенский Г. П.* Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
2. *Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В.* Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
3. *Антонец А. В.* Расчет пространственного сверхзвукового обтекания затупленных тел с изломами с учетом равновесного и замороженного состояния газа в ударном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
4. *Лунев В. В.* Метод искривленных тел в задачах о нестационарном гиперзвуковом обтекании тонких тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
5. *Стулов В. П., Теленин Г. Ф.* Неравновесное обтекание сферы сверхзвуковым потоком воздуха. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
6. *Шкадова В. П.* Трехмерное обтекание затупленных тел неравновесным потоком воздуха. Тр. Научн.-исслед. ин-та МГУ, 1970.
7. *Кузнецов В. Г.* О решении систем линейных уравнений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 1.
8. *Бурдельный А. К., Миносцев В. Б.* Расчет сверхзвуковой области пространственного обтекания тел неравновесным потоком воздуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
9. *Лунев В. В., Мурзинов И. Н., Остапович О. Н.* Движение тонкого затупленного конуса под малым углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3.
10. *Воронкин В. Г.* О распределении давления на притупленных конусах при неравновесном обтекании. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
11. *Антонец А. В., Красильников А. В., Лагутин В. И.* Экспериментальное определение положения центра давления при обтекании затупленных конусов под углом атаки гиперзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
12. *Антонец А. В., Красильников А. В.* Расчет нестационарных характеристик тонких притупленных тел при пространственном их обтекании гиперзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.