

УДК 532.529.2

ВТОРИЧНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНВЕКТИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Г. З. ГЕРШУНИ, Е. М. ЖУХОВИЦКИЙ, Л. Е. СОРОКИН,
Е. Л. ТАРУНИН

(Пермь)

Исследования устойчивости стационарного плоскопараллельного конвективного движения между вертикальными плоскостями, нагретыми до разной температуры [1-5], показали, что это движение в зависимости от значения числа Прандтля P обнаруживает неустойчивость двух типов. При малых и умеренных числах Прандтля неустойчивость имеет гидродинамическую природу. Она вызывается монотонными возмущениями, которые в надкритической области развиваются в периодическую по вертикали систему стационарных вихрей на границе раздела встречных конвективных потоков. Численному исследованию нелинейных вторичных стационарных течений посвящены работы [6, 7]. Если $P > 11.4$, то появляется новая мода неустойчивости — нарастающие в потоке бегущие тепловые волны; при $P > 12$ эта мода становится более опасной [4]. Эта неустойчивость связана с развитием колебательных возмущений, и можно думать, что в надкритической области возмущения приводят к установлению стационарных колебаний. Линейная теория [4] позволила определить границы областей устойчивости. В настоящей работе проведено численное исследование нелинейных надкритических режимов, развивающихся в результате потери устойчивости стационарного течения относительно колебательных возмущений.

1. Рассмотрим плоское конвективное движение в вертикальном слое, ограниченном изотермическими плоскостями $x=0$, $x=d$ (фиг. 1). Температура на левой границе принята за начало отсчета, а на правой — постоянна и равна Θ . Уравнения конвекции в приближении Буссинеска запишем в безразмерной форме

$$(1.1) \quad \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) = \Delta \Delta \psi - G \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{P} \Delta T$$

$$(1.3) \quad v_x = \partial \psi / \partial y, \quad v_y = -\partial \psi / \partial x$$

Здесь T — температура, ψ — функция тока, v_x , v_y — компоненты скорости. В качестве единиц расстояния, времени, скорости, функции тока и температуры выбраны соответственно d , d^2/ν , ν/d , ν , Θ . Уравнения содержат два безразмерных параметра — числа Грасгофа и Прандтля:

$$G = g\beta\Theta d^3/\nu^2, \quad P = \nu/\chi$$

На вертикальных изотермических границах скорость обращается в нуль; кроме того, имеется в виду замкнутое конвективное движение, при котором расход через любое поперечное сечение равен нулю.

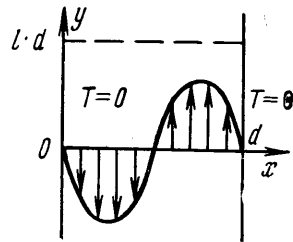
Граничные условия имеют вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} x=0: \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, & T &= 0 \\ x=1: \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, & T &= 1 \end{aligned}$$

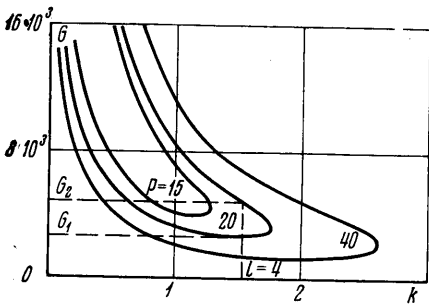
Задача имеет точное решение, описывающее плоскопараллельное течение в достаточно длинном канале. В этом режиме конвекции температура изменяется по сечению линейно, а профиль скорости описывается полиномом третьей степени

$$(1.5) \quad T_0 = x, \quad v_0 = -1/12 Gx(1-x)(1-2x), \quad \psi_0 = 1/24 Gx^2(1-x)^2$$

При достаточно больших значениях числа Грасгофа стационарное движение (1.5) становится неустойчивым. Линейная теория [4] рассматривает поведение в потоке малых плоских нормальных возмущений вида $(\psi, T) \sim \exp(-\lambda t + iky)$, где k — вещественное волновое число, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ — комплексный декремент (в работе [8] показано, что в случае вертикальной ориентации слоя плоские возмущения наиболее опасны). Спектр характеристических декрементов λ определен в [4] путем численного решения соответствующей амплитудной краевой задачи. Как уже указывалось, при $P > 12$ наиболее опасными являются колебательные возмущения. Нейтральные кривые колебательной неустойчивости $\lambda_r = 0$ на плоскости (G, k) приведены на фиг. 2. (Здесь используются единицы, отличные от принятых в [4]; поэтому число Грасгофа G и волновое число k связаны со значениями G' и k' работы [4] соотношениями $G = 16G'$, $k = 2k'$.) Не останавливаясь подробно на обсуждении результатов линейной теории, отметим лишь, что для данного P при фиксированном значении волнового числа, как видно из формы нейтральных кривых, существует интервал значений числа Грасгофа $G_1 < G < G_2$, внутри которого плоскопараллельное течение неустойчиво по отношению к колебательным возмущениям.



Фиг. 1



Фиг. 2

Далее на основе полной нелинейной системы уравнений (1.1), (1.2) будут исследоваться вторичные режимы, возникающие в области колебательной неустойчивости.

2. Как и при исследовании вторичных стационарных движений, возникающих при малых и умеренных

числах Прандтля [6, 7], будем рассматривать решения, обладающие периодичностью вдоль вертикали. Таким образом, дело сводится к решению задачи в ограниченной по вертикали прямоугольной области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq l$, где l — длина волны периодического решения. Условие периодичности записывается в виде

$$(2.1) \quad f(x, y+l, t) = f(x, y, t)$$

где f — любая функция.

Для решения задачи использовался метод конечных разностей. Процедура решения описана в [6]. Отличие состоит в том, что в настоящей работе использовалась неявная схема продольно-поперечной прогонки [9]. Горизонтальные прогонки по x осуществлялись в предположении, что граничные значения для вихря и температуры известны и равны соответствующим значениям на n -м временном слое. Вертикальные прогонки по y проводились дважды с учетом цикличности граничных условий. Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом поточечной верхней релаксации [10]. Точность итераций определялась максимальным относительным изменением функции тока ε . В большинстве расчетов итерации прекращались по достижении значения $\varepsilon=10^{-3}$; контрольные просчеты проводились с $\varepsilon=10^{-5}$. Итерации проводились в предположении, что значения функции тока на границе заданы, но после каждой итерации уточнялись условия периодичности (2.1).

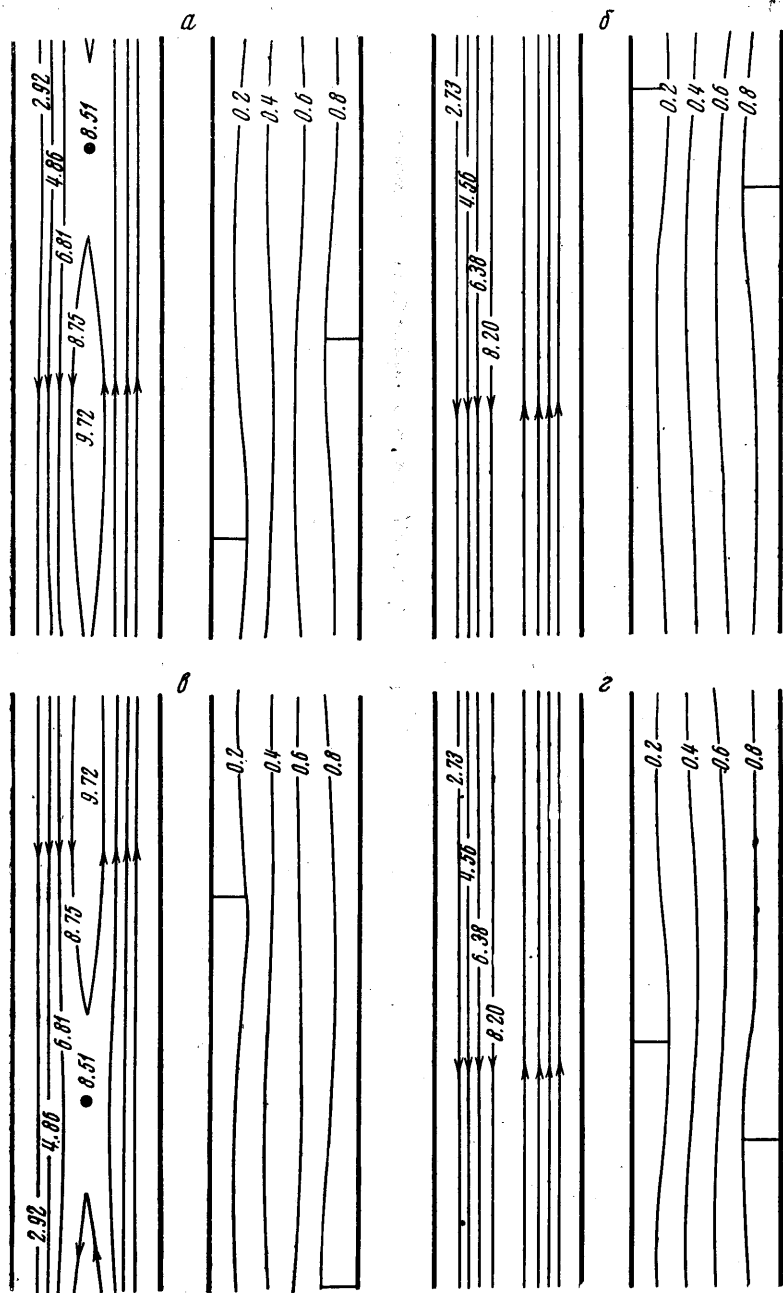
Использовались сетки с шагом $h_1=1/20$, $1/12$ и $h_2=l/36$, $l/70$. Шаг по времени обычно выбирался равным $\Delta t=0.001$. Порядок аппроксимации схемы $O(\Delta t+h^2)$, где $h=\max(h_1, h_2)$.

3. Перейдем к рассмотрению численных результатов. Обсудим сначала результаты, относящиеся к одному типичному разрезу на карте устойчивости (фиг. 2, вертикальная штриховая прямая), соответствующему значениям параметров $P=20$, $l=4$ (волновое число $k=2\pi/l=\pi/2$). Согласно линейной теории [4] при этих значениях параметров стационарное течение неустойчиво относительно колебательных возмущений внутри области $G_1 < G < G_2$, где $G_1=2550$, $G_2=4600$. При $G < G_1$ и $G > G_2$ колебательные возмущения затухают. Заметим, что при $G \geq 8 \cdot 10^3$ плоскопараллельное течение (для указанных значений P и l) становится неустойчивым относительно монотонных возмущений. Эти области G в данной работе не рассматриваются.

При проведении численных расчетов методом конечных разностей выбирались различные начальные состояния. Один из вариантов состоял в задании в начальный момент полей температур и скоростей, соответствующих вихрю на границе встречных потоков. В другом варианте задавались поля, соответствующие какой-либо фазе режима колебательных возмущений. В частности, установившийся колебательный режим (в области $G_1 < G < G_2$) при некоторых значениях параметров G , P , l использовался в качестве начального состояния для получения стационарных колебаний при других значениях этих параметров. Использовались также другие варианты начальных условий, применявшиеся с целью возбуждения возмущений в одном из потоков — восходящем или нисходящем.

Численные результаты свидетельствуют о затухании колебательных возмущений за пределами области неустойчивости и их нарастании до стационарного уровня внутри этой области. Удобно следить за поведением возмущений по изменению со временем температуры в фиксированной точке потока. В режиме стационарного плоскопараллельного движения температура в этой точке постоянна. При наличии колебательных возмущений температура осциллирует около среднего значения, причем характер переходного процесса определяется (при фиксированных P и l) числом Грасгофа. При $G < G_1$ и $G > G_2$ начальное колебательное возмущение затухает и переходный процесс приводит к стационарному плоскопараллельному режиму. Внутри области неустойчивости ($G_1 < G < G_2$) переходный процесс приводит к установлению стационарных колебаний конечной амплитуды. При значениях G , близких к пороговым G_1 или G_2 , процесс установления продолжается весьма долго. Так, при $G=4000$ ($P=20$, $l=4$) переход от колебаний большой амплитуды к установившемуся режиму происходит к моменту $t=10$, а при значении $G=2800$, близком к пороговому G_1 , полного установления не происходит даже к моменту $t=15$.

Многочисленные расчеты показали, что амплитуда и форма установившихся колебаний не зависят от начальных условий и определяются только числом Грасгофа. При уменьшении шага по времени от 0.001 до 0.0002 пе-



Фиг. 3

риод и амплитуда стационарных колебаний не изменяются. При переходе с координатной сетки 12×36 на более мелкие 20×36 и 12×70 изменение периода колебаний и амплитуд функции тока и температуры не превышает нескольких процентов.

Из результатов линейной теории следует, что вещественная часть декремента λ_r , определяющая скорость нарастания возмущений в области не-

устойчивости, относительно мала. Именно с этим обстоятельством и связана большая длительность процесса установления нелинейных колебаний, замеченная в численном эксперименте. Естественно при этом, что по сравнению со случаем стационарных надкритических движений [6, 7] резко возрастают затраты машинного времени, необходимого для получения установившихся режимов.

Переходя к обсуждению формы установившихся надкритических колебаний, напомним, что согласно линейной теории кризис плоскопараллельного стационарного движения связан с ростом пары критических возмущений, отличающихся знаком мнимой части декремента, т. е. направлением фазовой скорости. Одна из критических волн распространяется вверх и локализована преимущественно в восходящем потоке; другая, связанная с нисходящим потоком, распространяется вниз с той же по величине фазовой скоростью. Критическое возмущение, вообще говоря, является суперпозицией этих волн, причем их относительные веса в линейном приближении не определяются. Эти веса, по-видимому, могут быть найдены аналитически в нелинейной теории из соображений устойчивости конечно-амплитудных колебательных движений. В численном же эксперименте установившийся режим представляет собой суперпозицию двух встречных волн с одинаковыми весами.

Расчеты показали, что независимо от формы начального возмущения (стационарный вихрь на границе потоков; колебательный режим, соответствующий некоторой комбинации параметров; локальные возмущения в одном из встречных потоков) переходный процесс приводит во всех случаях к симметричной суперпозиции встречных волн.

В режиме установившихся колебаний движение имеет следующую форму. Как и в случае монотонной неустойчивости, на границе встречных потоков образуется периодическая по вертикали система вихрей. Эти вихри, однако, не являются стационарными; их интенсивность периодически меняется со временем. На длине волны l формируются два вихря, осцилляции которых происходят в противофазе. Центры вихрей, расположенные на оси, остаются при этом неподвижными. Таким образом, в результате сложения встречных волн, имеющих на осевой линии одинаковые амплитуды, образуется стоячая (на оси) волна функции тока. На линиях, отстоящих от оси на некоторое расстояние, амплитуды встречных волн различны, и потому вдоль восходящего и нисходящего потоков распространяются волны с периодически зависящей от времени скоростью и пространственно модулированные по амплитуде. Иллюстрацией могут служить кадры, представленные на фиг. 3, где изображены линии тока и изотермы для моментов времени, отстоящих друг от друга на четвертую часть периода ($P=20$, $l=4$, $G=3500$). На картах изотерм отчетливо видно, что в обеих половинах канала фаза волнового процесса перемещается вдоль по потоку.

Имеется заметное отличие в структуре волновых полей функции тока и температуры. Тепловая волна слабо модулирована по амплитуде вдоль координаты y . Это, очевидно, связано с тем, что она возникает в результате наложения двух встречных бегущих волн, каждая из которых локализована в восходящем или нисходящем потоке. Встречные волны функции тока, напротив, обладают малой асимметрией относительно середины канала. Их суперпозиция приводит к сильно модулированной по амплитуде волне, и структура суммарного поля близка к стоячей волне.

Описанная картина течения имеет место во всей исследованной области изменения параметров ($16 \leq P \leq 50$, $2000 < G < 5000$, $l=3, 4, 6$).

Если горизонтальные границы области $y=0$ и l выбраны проходящими через центры вихрей, то поля функции тока, вихря скорости и температуры в режиме установившихся колебаний обладают следующими свойствами

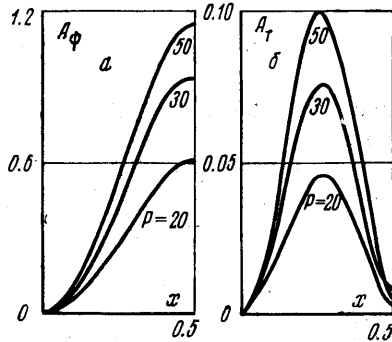
симметрии

$$\psi(x, y, t) = \psi(1-x, l-y, t), \quad \varphi(x, y, t) = \varphi(1-x, l-y, t)$$

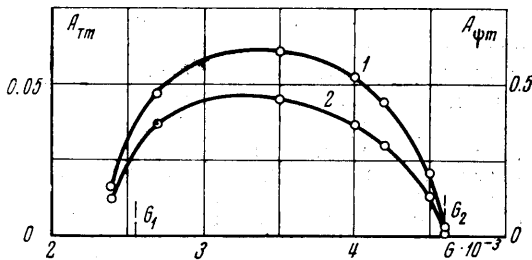
$$T(x, y, t) = 1 - T(1-x, l-y, t)$$

С учетом этих соотношений можно решать задачу в области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq l/2$, что приводит к существенной экономии машинного времени. Часть результатов, относящихся к установившемуся режиму, была получена таким путем.

На фиг. 4, а и б представлены распределения амплитуд колебаний функции тока A_ψ и температуры A_T поперек слоя в поперечном сечении, проходящем через центр вихря, для фиксированных параметров $l=4$, $G=3500$ (распределения амплитуд симметричны относительно середины канала $x=0.5$). Как видно, колебания функции тока наиболее интенсивны на осевой линии, тогда как колебания температуры имеют наибольшую амплитуду в тех местах, где достигаются экстремумы скорости основного потока. Последнее обстоятельство согласуется с результатами экспериментов [11], в которых наблюдалась колебательная неустойчивость конвективного движения в жидкостях с достаточно большими значениями числа Прандтля (количественное сопоставление вряд ли оправдано, поскольку эксперименты [11] проводились в слое конечной высоты, когда кроме поперечной разности температуры имеется также продольный градиент температуры).

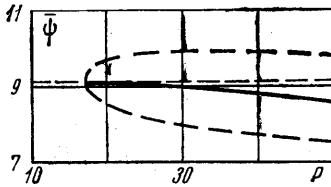


Фиг. 4



Фиг. 5

О распределении амплитуд установившихся колебаний внутри области неустойчивости можно судить по результатам, представленным на фиг. 5. Здесь изображены в зависимости от числа Грасгофа максимальные (по x) амплитуды колебаний функции тока $A_{\psi m}$ (кривая 1) и температуры A_{Tm} (кривая 2) для $P=20$, $l=4$. На оси абсцисс отмечены границы устойчивости G_1 и G_2 , определяемые линейной теорией. Как видно, интенсивность конечно-амплитудных колебаний максимальна в середине области неустойчивости и убывает по мере приближения к границам. Экстраполяция зависимостей $A_{\psi m}(G)$ и $A_{Tm}(G)$ на нуль позволяет (разумеется, в предположении, что неустойчивость возбуждается «мягко») определить границы области неустойчивости. При этом положение верхней границы хорошо согласуется со значением G_2 , найденным по линейной теории. На нижней же границе



Фиг. 6

получается расхождение порядка 10%. Это расхождение, возможно, связано с погрешностями метода сеток. Не исключено, впрочем, что вблизи нижней границы возможны подкритические движения («жесткая» неустойчивость). Для установления численным методом характера возбуждения требуется достаточно большое число точек, соответствующих установившимся состояниям. Получение же таких состояний крайне затруднено, поскольку из-за малости декрементов нарастания

переходный процесс продолжается в течение весьма длительного промежутка времени, особенно вблизи границы устойчивости.

Частота установившихся колебаний линейно растет с увеличением числа Грасгофа. Для разреза, указанного на фиг. 2, имеет место формула

$$1/\tau = 0.33 + 0.0017G$$

(τ — период). Эта зависимость сохраняется и за пределами области неустойчивости, где колебания становятся затухающими.

В режиме установившихся колебаний функция тока и температура в каждой точке осциллируют со временем около средних значений. Эти средние, вообще говоря, отличаются от значений, соответствующих стационарному плоскопараллельному режиму, в силу нелинейности установившихся колебаний в области неустойчивости. При значениях параметров $P=20$, $l=4$ область неустойчивости занимает сравнительно узкий интервал чисел Грасгофа (см. фиг. 2 и 5) и потому нелинейные эффекты выражены слабо. С увеличением P , как видно из формы семейства нейтральных кривых, область неустойчивости расширяется и нелинейные эффекты становятся значительнее. Это иллюстрируется численными результатами, представленными на фиг. 6.

Сплошной линией изображена зависимость среднего по времени значения функции тока в центре вихря $\bar{\psi}$ от числа Прандтля при фиксированных значениях $l=4$ и $G=3500$. Горизонтальная штриховая прямая — максимальное значение функции тока в невозмущенном плоскопараллельном движении ($\bar{\psi}_0 = G/384$). При указанных l и G колебательная неустойчивость возникает при $P=16.5$. Как видно, при больших P среднее значение $\bar{\psi}$ меньше $\bar{\psi}_0$ и с ростом P убывает. Это значит, что в режиме установившихся колебаний продольное течение менее интенсивно, чем при плоскопараллельном режиме. На фиг. 6 изображены также максимальное и минимальное (по времени) значения функции тока в центре вихря (пунктирные кривые).

С возникновением колебательной неустойчивости режим чисто теплопроводного переноса тепла поперек слоя испытывает кризис. Наличие поперечной составляющей скорости (при $P=20$, $l=4$ и $G=3500$ она составляет ~2% максимальной продольной скорости невозмущенного течения) приводит к появлению конвективного поперечного теплопереноса. Для характеристики поперечного переноса тепла введем безразмерную плотность теплового потока, усредненную по длине ячейки l

$$N = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} dy$$

В плоскопараллельном течении $N=1$. В режиме установившихся колебаний N осциллирует с удвоенной частотой около среднего значения $\langle N \rangle$. С увеличением числа Прандтля и соответственно с расширением области

неустойчивости усредненный конвективный поперечный теплопоток возрастает. Для $l=4$ и $G=3500$ зависимость $\langle N \rangle$ от P в обследованной области ($P \leq 50$) оказывается линейной

$$\langle N \rangle = 1 + 0.00746(P - P_*), \quad P_* = 16.5$$

Увеличение числа Прандтля, как видно из фиг. 4, приводит также к увеличению интенсивности колебаний скорости и температуры.

Поступила 13 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. вузов, Физика, 1958, № 4.
2. Бирих Р. В. О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
3. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
4. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. О колебательной неустойчивости плоскопараллельного конвективного движения в вертикальном канале. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
5. Gill A. E., Kirkham C. C. A note on the stability of convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, No. 1.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
7. Тарунин Е. Л. О вторичных стационарных конвективных течениях в вертикальном слое. Сб. «Гидродинамика», вып. 4. Пермь, 1972.
8. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
10. Вазов В., Форсайт Д. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
11. Кирдяшкин А. Г., Леонтьев А. И., Мухина Н. В. Устойчивость ламинарного течения жидкости в вертикальных слоях при естественной конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.