

УДК 532.529

## СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ СТЕРЖНЕВОМ ТЕЧЕНИИ ВОЛОКНИСТОЙ СУСПЕНЗИИ В ТРУБЕ

В. А. БАБКИН

(Петрозаводск)

В постановке, более простой, нежели в работе [1], рассматривается задача о стержневом течении волокнистой суспензии в прямой круглой трубе. Решение ищется методом малого параметра. Найденное первое приближение детально сравнивается с экспериментом.

Получены формулы для коэффициента сопротивления трубы и безразмерной толщины пристеночного слоя. Стержневое течение в первом приближении характеризуется тремя безразмерными комплексами. Как коэффициент сопротивления, так и безразмерная толщина пристеночного слоя зависят лишь от двух комплексов, поэтому возможно неполное моделирование течения.

**1. Постановка задачи и ее решение.** Пусть между сечениями  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_2 - x_1 = l$ ) прямой круглой трубы радиуса  $R$  под действием постоянного перепада давления  $\Delta p = p_1 - p_2$  осуществляется стержневое течение волокнистой суспензии со средней весовой концентрацией  $c_0$ . Определим среднюю скорость движения суспензии  $v$ .

Область, занимаемая суспензией при стержневом течении, состоит из двух частей [1]: из свободного от волокон пристеночного слоя вязкой жидкости толщины  $d$  и ядра течения радиуса  $R - d$ , в котором сосредоточена вся масса волокон.

Движение суспензии считается одномерным и осесимметричным. Отличными от нуля являются лишь продольные составляющие скоростей.

Запишем уравнения движения и состояния в пристеночном слое и ядре течения. Примем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, x$ ; ось  $x$  направим по течению по оси трубы.

Течение жидкости в пристеночном слое описывается равенством [1]

$$(1.1) \quad v_1 = \frac{P}{4\eta}(R^2 - r^2) + C \ln \frac{r}{R}, \quad P = \frac{\Delta p}{l}, \quad R - d < r \leq R$$

где  $v_1$  — скорость жидкости в пристеночном слое,  $\eta$  — вязкость жидкости,  $C$  — константа интегрирования.

Ядро течения рассматривается как насыщенная пористая среда, скелет которой, образованный волокнами, называется сетью волокон. Уравнения движения жидкой и твердой фаз в ядре течения имеют следующий вид [1]:

$$(1.2) \quad a(v_2 - w) = P, \quad a = 3.5\eta m S_v^2 (1 - m)^{3/2} [1 + 57(1 - m)^3]$$

$$(1.3) \quad \frac{d\sigma_{rx}}{dr} - \frac{\sigma_{rx}}{r} = -P, \quad \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0$$

где  $v_2$  — скорость жидкости в ядре течения;  $w$  — скорость точек сети волокон;  $m$  — пористость среды,  $S_v$  — удельная поверхность волокон, константа, определяемая только сортом волокон;  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{rx}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  — эффективные напряжения в сети волокон, рассматриваемой как упругий континуум.

Второе уравнение (1.2) определяет коэффициент сопротивления  $a$  при фильтрации через слой хаотично расположенных цилиндрических волокон [2]. Исследования [3] показали, что оно вполне применимо также и при фильтрации через слой природных волокон, применяемых в бумажной промышленности.

В отличие от работы [1] упругие напряжения в сети волокон определим не уравнением четвертой степени, а квадратичным законом [4]

$$(1.4) \quad \sigma_{ij} = (\lambda \Gamma_1 + \lambda_1 \Gamma_1^2 + \lambda_2 \Gamma_2) \delta_{ij} + [2\mu - (2\lambda + \lambda_2 + 2\mu) \Gamma_1] \varepsilon_{ij} + 4\kappa \varepsilon_{i\alpha} \varepsilon_{\alpha j}$$

$$(1.5) \quad \Gamma_1 = \varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad 2\Gamma_2 = \varepsilon_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\alpha}$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\varepsilon_{ij}$  — малые конечные деформации;  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — инварианты тензора деформаций;  $i, j = r, \varphi, x$ ; по одинаковым индексам в формулах (1.4), (1.5) проводится свертка.

Константы  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu, \kappa$  зависят от сорта волокон и концентрации суспензии с недеформированной сетью волокон  $c_0$ . Ввиду отсутствия других экспериментальных данных их зависимость от концентрации  $c_0$  примем такой же, как зависимость модуля сдвига суспензии  $G$  от концентрации в экспериментах [5]

$$(1.6) \quad \omega = \omega^0 (c_0 - c_s)^n, \quad n > 1, \quad \omega = \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu, \kappa$$

где  $\omega^0$  и  $n$  — параметры, не зависящие от концентрации  $c_0$ ;  $c_s$  — концентрация седиментации.

Пусть  $m_0$  — пористость сети волокон в недеформированном состоянии. Изменение пористости сети при деформации описывается уравнением [1]

$$(1.7) \quad 1 - m = (1 - m_0) (1 - 2\Gamma_1 + 4\Gamma_2 - 8\Gamma_3)^{1/2}$$

$$6\Gamma_3 = \varepsilon_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\beta\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} - 3\varepsilon_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\alpha}$$

Принимая во внимание симметрию деформации сети волокон, смещения ее точек будем искать в виде

$$(1.8) \quad u_r = u_r(r), \quad u_x = u_x^*(r) + kx, \quad u_\varphi = 0$$

где  $k$  — постоянная, определяемая при решении задачи.

Выражая конечные деформации через смещения (1.8), получим

$$(1.9) \quad \varepsilon_{rr} = u_{r,r} - (u_{r,r}^2 + u_{x,r}^2)/2, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r/r - u_r^2/2r^2, \quad \varepsilon_{xx} = k - k^2/2 = e$$

$$\varepsilon_{xr} = u_{x,r}(1-k)/2, \quad \varepsilon_{x\varphi} = \varepsilon_{r\varphi} = 0, \quad u_{i,r} = du_i/dr$$

В формулах (1.9) и далее в статье звездочка над  $u_x$  опущена.

Граничные условия [4] при  $r = R - d$

$$(1.10) \quad v_1 = w, \quad \tau_{rx} = \sigma_{rx}, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad u_r = -d$$

где  $\tau_{rx}$  — касательное напряжение в жидкости пристеночного слоя. На оси трубы смещение  $u_r$  и напряжение  $\sigma_{rx}$  должны быть конечны. Поскольку в произвольном живом сечении потока действуют только силы давления, то при любом  $x_1 \leq x \leq x_2$  должно быть выполнено равенство

$$(1.11) \quad \int_0^{R-d} \sigma_{xx} r dr = 0$$

Условие прилипания жидкости к стенке учтено в формуле (1.1).

Из уравнений (1.1) — (1.9) и граничных условий необходимо найти  $v_1, v_2, w, u_x, u_r, e, d$ . Из условия равенства касательных напряжений при  $r = R - d$ , учитывая конечность  $\sigma_{rx}$  при  $r = 0$ , найдем, что константа  $C = 0$

в (1.1). Тогда распределение скоростей фаз суспензии по сечению трубы будет таково:

$$(1.12) \quad v_1 = P(R^2 - r^2)/4\eta, \quad R-d < r \leq R$$

$$w = \frac{PR^2}{4\eta} \left( 2 \frac{d}{R} - \frac{d^2}{R^2} \right), \quad v_2 = w + \frac{P}{a}, \quad 0 \leq r \leq R-d$$

Средняя скорость суспензии  $v$  определяется формулой

$$(1.13) \quad v = \frac{2}{R^2} \left\{ \int_0^{R-d} [mv_2 + (1-m)w]r \, dr + \int_{R-d}^R v_1 r \, dr \right\}$$

Неизвестные величины  $a$  и  $d$  будут найдены ниже.

Введем безразмерный параметр  $\beta = \tau_w/\mu = PR/2\mu$ , где  $\tau_w$  — касательное напряжение на стенке трубы, который определенным образом характеризует деформацию сдвига сети волокон на границе ядра течения (см. (1.4)). Предполагая  $\beta$  малым, перемещения  $u_x$ ,  $u_r$ , деформацию  $e$  и толщину пристеночного слоя  $d$  будем искать в виде степенных рядов по  $\beta$  [6]

$$(1.14) \quad \theta = \theta^{(1)}\beta + \theta^{(2)}\beta^2 + \dots, \quad \theta = u_x, u_r, e, d$$

Подставляя эти ряды в рассматриваемую систему уравнений и приравнявая выражения при одинаковых степенях  $\beta$ , будем получать системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений для определения функций  $u_x^{(i)}(r)$ ,  $u_r^{(i)}(r)$ . Подчиняя общие решения этих систем граничным условиям (1.10), (1.11), найдем константы интегрирования, а также коэффициенты  $e^{(i)}$ ,  $d^{(i)}$  в разложениях (1.14).

Первые ненулевые члены рядов (1.14) таковы (первое приближение):

$$(1.15) \quad d = d^{(2)}\beta^2 = \frac{P^2 R^3}{32E^2}, \quad \frac{1}{E^2} = \frac{2\mu\kappa - \lambda\kappa - \mu\lambda_2}{\mu(3\lambda + 2\mu)} - 1$$

$$u_x = u_x^{(1)}\beta = -\frac{r^2 P}{4\mu} + C_1,$$

$$u_r = u_r^{(2)}\beta^2 = \frac{P^2}{32\mu^2} \left[ \frac{r^3}{q} + \frac{r(R-d)^2}{s} \right] - \frac{\lambda e r}{2(\lambda + \mu)}$$

$$e = e^{(2)}\beta^2 = -\frac{P^2(R-d)^2[\kappa(\lambda + 2\mu) - 0.5\mu\lambda_2]}{16\mu^3(3\lambda + 2\mu)}$$

$$q = (\lambda + 2\mu)/(\lambda + 0.5\lambda_2 + 3\mu - 3\kappa)$$

$$s = (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)/[2\lambda\kappa - \mu(\lambda - 0.5\lambda_2 + \mu - \kappa)]$$

где  $C_1$  — постоянная интегрирования.

Величина  $E$ , имеющая размерность напряжения, будет называться эффективным упругим модулем суспензии в стержневом течении.

Подставляя выражения (1.15) в формулы (1.2), (1.7), (1.6), (1.12), после интегрирования (1.13) получим, что искомая зависимость  $v = v(P)$  в первом приближении имеет вид

$$(1.16) \quad v = P^3 R^4 / 64\eta E^2 + m_0 P / a_0$$

где  $m_0$ ,  $a_0$  — первые члены разложений  $m = m(\beta)$ ,  $a = a(\beta)$ , представляющие собой пористость и коэффициент сопротивления при фильтрации недеформированной сети волокон.

Аналогично решение задачи можно найти во втором и в более высоком приближении.

**2. Сравнение с экспериментальными результатами.** Вводя касательное напряжение на стенке трубы  $\tau_w$  в первую формулу (1.15) и в формулу (1.16), перепишем их в виде

$$(2.1) \quad d = \frac{\eta v}{\tau_w} - \frac{2\eta m_0}{a_0 R}, \quad \frac{v}{D} = \frac{\tau_w^3}{16\eta E^2} + \frac{m_0 \tau_w}{a_0 R^2}$$

Толщину пристеночного слоя и среднюю скорость суспензии определяют два фактора: деформация сети волокон, вызванная касательными напряжениями на поверхности стержня и силами взаимодействия фаз (первое слагаемое), и разница скоростей сети волокон и жидкости в ядре течения.

Выделим предельный случай формул (2.1). Если

$$(2.2) \quad \omega = \frac{4m_0}{a_0} \left( \frac{\eta E^2}{v^2 R^4} \right)^{1/3} \ll 1$$

то влияние разницы скоростей фаз на  $v$  и  $d$  будет мало и зависимости (2.1) упрощаются

$$(2.3) \quad d = \eta v / \tau_w, \quad \tau_w = (16\eta v E^2 / D)^{1/3}$$

Такое течение суспензии будем называть односкоростным. На практике, очевидно, следует ожидать лишь приближенного выполнения равенств (2.3).

Легко видеть, что с точностью до вида формулы, определяющей упругий модуль  $E$ , (2.1) – (2.3) совпадают с соответствующими формулами работы [1], полученными иначе. Вследствие этого все рассуждения, проведенные в [1] относительно указанных формул, можно без изменения перенести в данную работу. Однако количество экспериментальных данных, использованных в работе [1], невелико. Для большей убедительности теоретических формул приведем еще ряд опытных результатов.

Экспериментальные зависимости  $\tau_w = \tau_w(v/D)$  в области стержневого течения хорошо аппроксимируются формулами вида [7–12]

$$(2.4) \quad \tau_w = K' (8v/D)^{n'}$$

где  $K'$  и  $n'$  – эмпирические константы, зависящие от сорта волокон, концентрации суспензии и диаметра трубы.

Кроме случая, приведенного в [1], существуют еще достаточно многочисленные случаи, когда показатель  $n'$  либо равен либо близок  $1/3$ . Так, в работе [8] получена эмпирическая формула для определения потерь напора при течении ряда волокнистых суспензий, в которой  $n' = 0.364$ . Для белой сульфитной целлюлозы при  $c_0 = 2-6\%$ ,  $D = 161$  мм показатель  $n' = 1/3$ . Результаты обработки некоторых графиков работы [10] приведены

	$c_0$	$K'$	$n'$	$E$	$E/G$	$E/\tau_w$
I	2.58	2.6	0.33	95	0.20	6.3
	2.84	3.0	0.33	125	0.17	6.2
	3.19	4.3	0.33	210	0.19	6.8
II	0.72	0.27	0.33	3.2	0.11	3.7
	1.41	0.62	0.33	11	0.10	4.4
	1.70	0.93	0.33	21	0.10	4.4

в таблице (I — еловая сульфитная целлюлоза; II — сильно беленая еловая сульфитная целлюлоза;  $K'$  в  $n \cdot c^n / m^2$ ,  $c_0$  в процентах).

Из сравнения формул (2.4) и (2.3) следует, что  $K' = (2\eta E^2)^{1/3}$  при  $n' = 1/3$ . Отсюда по  $K'$ , найденным при течении суспензии в трубе, можно определить эффективный упругий модуль  $E$ . Значения  $E$  в  $n/m^2$  для двух суспензий [10] даны в таблице.

Для суспензий, представленных в таблице, в [10] даются не только характеристики течения в трубе, но и значения модуля сдвига  $G$ , полученные при испытаниях суспензий в эластовискозиметре. Поскольку условия деформации сети волокон в трубе и эластовискозиметре различны, значения  $E$  и  $G$  также должны быть различны. Однако вследствие того, что степенная зависимость упругих констант от концентрации принята здесь такой же, как в [5, 10], отношение  $E/G$  не должно зависеть от концентрации. Таблица подтверждает этот вывод.

Первая формула (2.4) хорошо согласуется с результатами оптических измерений толщины пристеночного слоя, проведенными в работе [13].

Решение (2.1), очевидно, должно быть дополнено условием, обеспечивающим целостность ядра течения  $\sigma_{\tau \max} < \tau_*$ , где  $\sigma_{\tau \max}$  — максимальное касательное напряжение в сети волокон,  $\tau_*$  — предельное напряжение сдвига в сети волокон. Из уравнений состояния (1.4) и решения (1.15) следует, что в первом приближении это условие таково:  $\tau_w < \tau_*$ .

Именно в этом виде условие стержневого течения было найдено опытами [7].

3. Критерии подобия. Введем следующие безразмерные величины:

$$(3.1) \quad Re^d = \nu d_0 / \nu, \quad H = ED / \eta \nu$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости и  $Re^d$  — число Рейнольдса, в котором характерный размер взята толщина пристеночного слоя  $d_0$  в одностороннем течении, определяемая формулой (2.3). Из формулы (2.3) следует:

$$(3.2) \quad d_0 = (\eta^2 \nu^2 D / 16 E^2)^{1/3}$$

Внося безразмерные комплексы (3.1) в формулы (2.1), получим выражения для коэффициента сопротивления  $f$  и безразмерной толщины пристеночного слоя  $\delta$

$$(3.3) \quad f = 8A / Re^d, \quad f = 8\tau_w / \rho \nu^2$$

$$(3.4) \quad \delta = B / 2^{1/3} H^{2/3}, \quad \delta = d / R$$

где  $\rho$  — плотность жидкости, а  $A$  и  $B$  — соответственно корни уравнений

$$(3.5) \quad x^3 + \omega x = 1, \quad x(x + \omega)^2 = 1$$

Параметр  $\omega$  определен формулой (2.2). Он характеризует отношение средней разности скоростей сети волокон и жидкости к средней скорости суспензии. В одностороннем течении, когда  $\omega = 0$ , формулы (3.3), (3.4) упрощаются

$$(3.6) \quad f = 8 / Re^d, \quad \delta = (2H^2)^{-1/3}$$

Графики функций  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  приведены на фиг. 1. Из графиков видно, что толщина пристеночного слоя  $\delta$  более «чувствительна» к влиянию разности скоростей фаз в ядре течения, нежели коэффициент сопротивления  $f$ . Может случиться так, что коэффициент  $f$  уже следует первой предельной формуле (3.6), тогда как  $\delta$  второй предельной формуле (3.6) еще не удовлетворяет.

Комплексы  $Re^d$ ,  $H$ ,  $\omega$  (в одностороннем течении  $Re^d$ ,  $H$ ) представляют собой критерии, с помощью которых в первом приближении можно проводить механическое моделирование стержневого течения. Благодаря тому что  $f$  и  $\delta$  зависят только от двух комплексов, можно проводить частичное моделирование течения.

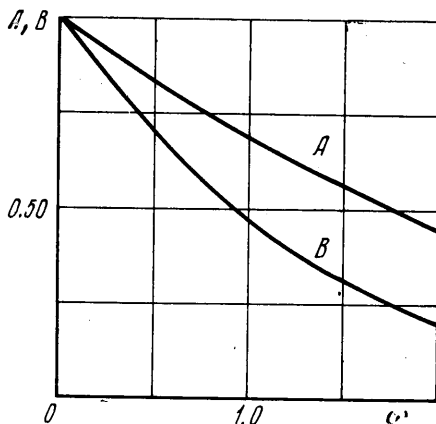
Ввиду отсутствия критериев подобия моделирование стержневого течения в настоящее время фактически не проводится. Результаты лабораторных испытаний представляются в виде графиков  $f - \nu$  [9],  $f - Re$  [7], где  $Re = \nu D / \nu$ ;  $\tau_w - \nu$  [7, 11-13]. Использование этих графиков для инженерных расчетов, очевидно, весьма затруднено.

Следует отметить, что число  $Re^d$  и первая формула (3.6) были получены в работах [7, 9, 13]. Однако вследствие того что вид зависимости  $d_0$  от параметров потока был неизвестен, число  $Re^d$  в практику исследователей не вошло.

Переписывая неравенство  $\tau_w < \tau_*$  в безразмерном виде, получим, что стержневое течение существует при

$$(3.7) \quad H > H_*, \quad H_* = 2(2AE/\tau_*)^3$$

где  $H_*$  будет называться критическим значением числа  $H$ . Значения  $E/\tau_*$  для двух суспензий [10] приведены в таблице. Для суспензий одного сорта волокон это отношение от концентрации не зависит.



В определение области стержневого течения число  $Re^d$  не входит. Определим  $Re_*^d$ , т. е.  $Re^d$  для конца стержневого течения. Полагая  $\tau_w = \tau_*$ , из формул (2.3) (3.1), (3.7) получим

$$(3.8) \quad Re_*^d = \rho v^2 H_*^h / 2^{1/2} AE$$

Из (3.8) видно, что даже для суспензий одного сорта, когда  $H_* = \text{const}$ , число  $Re_*^d \neq \text{const}$ . Именно этим можно объяснить тот факт, что исследователи, пытавшиеся определить область стержневого течения с помощью  $Re^d$ , получали различные значения критического числа  $Re_*^d$  ( $Re_*^d = 200-450$  [7],  $Re_*^d = 340$  [9],  $Re_*^d = 364$  [13]).

Поступила 28 XII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабкин В. А. Стержневое течение волокнистой суспензии. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
2. Han S. T., Ingmanson W. L. A simplified theory of filtration. Tappi, 1967, vol. 50, No. 4.
3. Labreque R. L. The effects of fiber-cross sectional shape on the resistance to the flow of fluids through fiber mats. Tappi, 1968, vol. 51, No. 1.
4. Зеолинский Н. В., Риз П. М. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. ПИММ, 1939, т. 2, вып. 4.
5. Thalén N., Wahren D. Shear modulus and ultimate shear strength of some paper pulp fibre networks. Svensk Papperstidning, 1964, vol. 67, Nr 7.
6. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
7. Bugliarello G., Daily J. Rheological models and laminar shear flow of fiber suspensions. Tappi, 1961, vol. 44, No. 12.
8. Riegel P. S. Flow losses in stock lines - a graphical simplification. Paper Trade Journal, 1968, vol. 152, No. 27.
9. Форгес О. Л., Робертсон А. А., Мэзон С. Г. Гидродинамическое поведение волокон, применяемых для выработки бумаги. Сб. «Основные представления о волокнах, применяемых в бумажном производстве». М., Гослесбумиздат, 1962.
10. Raij U., Wahren D. An experimental investigation of paper pulp stock flow in a straight pipe. Svensk Papperstidning, 1964, vol. 67, Nr 5.
11. Giese E., Janke. Rohrreibungsprobleme. Zellstoff und Papier, 1965, Nr 7, 8.
12. Durst R. E., Jenness L. C. The flow properties of paper pulp stock, II. Tappi, 1955, vol. 38, No. 4.
13. Baines W. D. Laminar flow of dilute fibre suspensions. Svensk Papperstidning, 1959, vol. 62, Nr 22.