

УДК 532.5:532.135

О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ СТРУКТУРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

В. Е. ПЕРВУШИН

(Москва)

Подробная библиография ранних работ, посвященных исследованию установившихся ламинарных течений ньютоновских и неньютоновских жидкостей с учетом теплоты трения, влияющей на реологические характеристики жидкости, приведена в [1].

Исследовались случаи напорного осевого течения жидкости в трубах [2-6], куэттовского течения в зазоре между двумя бесконечными пластинами и соосными круглыми цилиндрами [4, 7-10], а также более сложные случаи обобщенного течения, вызванного одновременным действием продольного перепада давления и движением одной из граничных поверхностей [11, 12].

Среди наиболее общих результатов термогидродинамики установившихся течений следует отметить проведенное в работе [7] исследование зависимости напряжения сдвига на стенке для куэттовского течения ньютоновской жидкости от скорости стенки при достаточно общей зависимости вязкости от температуры. Для напорных течений ньютоновской жидкости в трубах в [2] установлено существование критических градиентов давления, выше которых стационарный режим течения невозможен.

В ряде работ была показана возможность гидродинамического теплового взрыва при течениях ньютоновской [3] и неньютоновской жидкостей [4, 5].

Значительный интерес представляют решения указанных задач в области параметров, при которых существует устойчивое решение, в частности, для развития теории измерения реологических характеристик жидкости на ротационных и капиллярных вискозиметрах. В работах [1, 3-6, 8-12] принималось, что реологические характеристики жидкости зависят от температуры по гиперболическому или экспоненциальному закону. (Вязкопластичная жидкость характеризуется двумя параметрами — пластичной вязкостью η и предельным напряжением сдвига τ_0 .) Последнее, за исключением работы [5], принималось постоянным [6, 9, 11, 12]. В этих предположениях соответствующая система уравнений движения и теплового баланса допускает точное решение в квадратурах и основную трудность представляет определение констант интегрирования из граничных условий.

В настоящей работе аналогично [5] рассматривается указанный в заголовке тип напорного течения вязкопластичной жидкости. В отличие от [5] преследуется цель выявить зависимости локальных и интегральных характеристик течения и теплообмена от определяющих параметров, при которых существует устойчивый режим течения и теплообмена.

В результате численных решений системы трансцендентных уравнений, к которой приводится определение констант интегрирования точного решения задачи, получены профили скорости и температуры в сечении трубы, а также удобные в вычислениях выражения для коэффициента гидравлического сопротивления и параметра Нуссельта.

Пусть вязкопластичная жидкость течет под действием перепада давления $(-dp/dz)$ в круглой трубе радиуса R вдоль оси z . На стенке поддерживается температура T_0 .

Предполагается, что движение установившееся, неизотермичность течения обусловлена диссипацией энергии, продольный градиент температур равен нулю $(\partial T / \partial z = 0)$, температурная зависимость пластичной вязкости и предельного напряжения сдвига может быть аппроксимирована отрезком гиперболы

$$(1) \quad \eta(T) = \eta_0 T_0 / T, \quad \tau_0(T) = \tau_0 T_0 / T$$

Здесь η_0 и τ_0 — соответственно пластичная вязкость и предельное напряжение сдвига, вычисленные при температуре стенки. Это справедливо, например, для некоторых вязкопластичных нефтей [13]

Аналитическое условие наличия ядра с учетом (1) и значения касательного напряжения сдвига при градиентном течении в трубе, $\tau_0 = -(dp/dz)r/2$, представляется в виде

$$(2) \quad \tau_0 T_0 / T \geq -(dp/dz)r/2 \quad (0 \leq r \leq r_0)$$

где r — текущий радиус, r_0 — радиус ядра.

Система уравнений движения и теплопроводности имеет вид [14]

$$(3) \quad v_{1z} \equiv \text{const}, \quad \frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0$$

$$\frac{d}{dr} \left[-\tau_0(T_2) + \eta(T_2) \frac{dv_{2z}}{dr} \right] + \frac{1}{r} \left[-\tau_0(T_2) + \eta(T_2) \frac{dv_{2z}}{dr} \right] -$$

$$-\frac{dp}{dz} = 0, \quad r_0 \leq r \leq 1$$

$$\frac{d^2 T_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_2}{dr} + \frac{1}{kJ} \left[-\tau_0(T_2) + \eta(T_2) \frac{dv_{2z}}{dr} \right] \left(\frac{dv_{2z}}{dr} \right) = 0,$$

$$r_0 \leq r \leq 1$$

Здесь v_{iz} — продольная скорость, J — механический эквивалент тепла, k — коэффициент теплопроводности жидкости, индекс $i=1$ для ядра, $i=2$ для вязкопластичной области.

Система (3) решается при следующих граничных условиях:

$$(4) \quad T_1 \neq \infty, \quad r=0$$

$$v_{1z} = v_{2z}, \quad dv_{2z}/dr = 0, \quad T_1 = T_2, \quad dT_1/dr = dT_2/dr, \quad r=r_0$$

$$v_{2z} = 0, \quad T_2 = T_0, \quad r=R$$

Вводя безразмерные величины: радиальную координату $\xi = r/R$, продольную координату $\zeta = z/R$, скорость $V_i = v_{iz}/\langle v \rangle$ ($\langle v \rangle$ — средняя скорость течения, определяемая отношением секундного объемного расхода к площади сечения трубы), давление $P = p / (\rho \langle v \rangle^2 / 2)$ (ρ — плотность жидкости), температуру $\theta_i = T_i / T_0$, параметр Рейнольдса $Re = 2R \langle v \rangle \rho / \eta_0$, параметр Ильюшина $И = 2\tau_0 R / \langle v \rangle \eta_0$, $\alpha = \langle v \rangle^2 \eta_0 / 2kJT_0$ — параметр, характеризующий интенсивность тепловыделения при вязком трении, задачу (2) — (4) с учетом (1) можно представить в форме

$$(5) \quad И \theta_1^{-1} \geq (Re/4) (-dP/d\zeta) \xi, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0$$

$$(6) \quad V_1 \equiv \text{const}, \quad \frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta_1}{d\xi} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0 \quad (\xi_0 = r_0/R)$$

$$(7) \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\xi \theta_2^{-1} \left(-И + 2 \frac{dV_2}{d\xi} \right) \right] - \frac{Re}{2} \frac{dP}{d\zeta} = 0, \quad \xi_2 \leq \xi \leq 1$$

$$(8) \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\theta_2}{d\xi} \right) + \alpha \theta_2^{-1} \left(-И + 2 \frac{dV_2}{d\xi} \right) \left(\frac{dV_2}{d\xi} \right) = 0, \quad \xi_0 \leq \xi \leq 1$$

$$(9) \quad \theta_1 \neq \infty, \quad \xi = 0$$

$$(10) \quad V_1 = V_2, \quad \frac{dV_2}{d\xi} = 0, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi} = \frac{d\theta_2}{d\xi}, \quad \xi = \xi_0$$

$$(11) \quad V_2 = 0, \quad \theta_2 = 1, \quad \xi = 1$$

В дальнейшем будем считать известной среднюю скорость, или параметры α , Re .

Решением уравнения (6) с учетом (9) является $\theta_1 = A_1$ (A_1 — константа).

Для радиуса ядра из (5) имеем

$$(12) \quad \xi_0 = \frac{\text{И}}{A_1} \frac{1}{(-dP/d\xi)(\text{Re}/4)}$$

Интегрирование (7) с учетом второго граничного условия (10) и выражения для ядра (12) дает

$$(13) \quad \frac{dV_2}{d\xi} = \frac{1}{2} \left[\text{И} + \left(\frac{\text{Re}}{4} \right) \frac{dP}{d\xi} \xi \theta_2 \right]$$

Подстановка (13) в (8) приводит к уравнению

$$(14) \quad \xi^2 \frac{d^2 \theta_2}{d\xi^2} + \xi \frac{d\theta_2}{d\xi} + \frac{\alpha}{2} \kappa^2 \xi^4 \theta_2 - \frac{\alpha}{2} \text{И} \kappa \xi^3 = 0 \quad \left(\kappa = -\frac{\text{Re}}{4} \frac{dP}{d\xi} \right)$$

Общим решением (14) является

$$(15) \quad \theta_2 = Z_0(\beta \xi^2) + \gamma s_{\nu,0}(\beta \xi^2) \quad \left(\beta = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad \gamma = \frac{\text{И}}{2} \sqrt{\frac{2\alpha}{\kappa^2}} \right)$$

Здесь $Z_0(t) = A_2 J_0(t) + A_3 Y_0(t)$, $J_0(t)$, $Y_0(t)$ — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, $s_{\nu,0}(t)$ — функция Ломмеля, A_2 , A_3 — константы интегрирования. После подстановки (15) в (13) и интегрирования, принимая во внимание первое краевое условие (11), получим выражения для профиля скорости течения в вязкопластичной области

$$(16) \quad V_2 = \frac{1}{2} \text{И}(\xi - 1) + \frac{\kappa}{4\beta} \left[\int_{\beta \xi^2}^{\beta} Z_0(t) dt + \gamma \int_{\beta \xi^2}^{\beta} s_{\nu,0}(t) dt \right]$$

Можно видеть, что при постоянной температуре жидкости $\theta_1 = \theta_2 = 1$ (это имеет место, как следует из (15) и третьего граничного условия (10), при $\alpha = 0$) формула (16) переходит в известную формулу Букингама [14]

$$V_2 = \frac{1}{2} \text{И}(\xi - 1) + \frac{1}{4} \kappa (1 - \xi^2)$$

С целью упрощения (16) воспользуемся полученным в работе [9] выражением для интегралов типа

$$\int_0^t t^\mu Z_\nu(t) dt = t g_{\mu,\nu}(t) Z_\nu(t) - t s_{\mu,\nu}(t) Z_{\nu-1}(t)$$

при $\mu \pm \nu$ не равным нечетному положительному числу, в виде функции Ломмеля $s_{\mu,\nu}(t)$ и функции

$$g_{\mu,\nu}(t) = t^{\mu-2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\mu + \nu + 2m + 1) \Gamma(1/2 \mu - 1/2 \nu + 1/2) \Gamma(1/2 \mu + 1/2 \nu + 1/2)}{\Gamma(1/2 \mu - 1/2 \nu + m + 3/2) \Gamma(1/2 \mu + 1/2 \nu + m + 3/2)} \times \\ \times \left(\frac{1}{2} t \right)^{2m+2}$$

После несложных преобразований с учетом известной рекуррентной формулы [15]

$$Z_{\nu-1}(t) + Z_{\nu+1}(t) = 2\nu Z_\nu(t) / t$$

выражение (16) принимает вид, более удобный при вычислениях

$$(17) \quad V_2 = \frac{1}{2} \text{И}(\xi_0 - 1) + \frac{\kappa}{4\beta} \{F_1(\beta) - F_1(\beta\xi_0^2) + \gamma[F_2(\beta) - F_2(\beta\xi_0^2)]\}$$

$$F_1(t) = t \{A_2[J_0(t)g_{0,0}(t) + J_1(t)s_{0,0}(t)] + A_3[Y_0(t)g_{0,0}(t) + Y_1(t)s_{0,0}(t)]\}$$

$$F_2(t) = t^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+5/2)(3/4)^2(3/4+1)^2 \dots (3/4+m)^2} \left(\frac{1}{2}t\right)^{2m+2}$$

где $J_1(t)$, $Y_1(t)$ — функции Бесселя первого и второго рода первого порядка.

Из (17) и первого краевого условия (10) для скорости ядра получается выражение

$$V_1 = \frac{1}{2} \text{И}(\xi_0 - 1) + \frac{\kappa}{4\beta} \{F_1(\beta) - F_1(\beta\xi_0^2) + \gamma[F_2(\beta) - F_2(\beta\xi_0^2)]\}$$

Для определения констант интегрирования и радиуса ядра ξ_0 , принимая во внимание (12), третье и четвертое краевые условия (10), а также второе краевое условие (11), получим следующую систему трансцендентных уравнений:

$$(18) \quad A_1 \kappa \xi_0 - \text{И} = 0$$

$$-A_1 + A_2 J_0(\beta\xi_0^2) + A_3 Y_0(\beta\xi_0^2) + \gamma s_{1/2,0}(\beta\xi_0^2) = 0$$

$$A_2 J_1(\beta\xi_0^2) + A_3 Y_1(\beta\xi_0^2) + 1/2 \gamma s_{-1/2,1}(\beta\xi_0^2) = 0$$

$$-1 + A_2 J_0(\beta) + A_3 Y_0(\beta) + \gamma s_{1/2,0}(\beta) = 0$$

При выводе (18) производные функций $J_0(t)$, $Y_0(t)$, вычислялись по известным рекуррентным формулам [15]. Для определения κ выпишем выражение безразмерного объемного расхода жидкости

$$(19) \quad V_1 \xi_0^2 + \frac{1}{\beta} \int_{\beta\xi_0^2}^{\beta} V_2(t) dt = 1, \quad t = \beta\xi^2$$

После подстановки (16) в (19), интегрирования по частям с учетом формулы [15]

$$\int t^{v+1} Z_v(t) dt = t^{v+1} Z_{v+1}$$

и громоздких преобразований, которые здесь не приводятся, получается более удобное для вычислений представление уравнения (19)

$$(20) \quad \frac{\text{И}}{6} (\xi_0^3 - 1) - 1 + \frac{\kappa}{4\beta} [Z_1(\beta) - \xi_0^2 Z_1(\beta\xi_0^2)] +$$

$$+ \frac{\gamma\kappa}{4\beta^2} [F_3(\beta) - F_3(\beta\xi_0^2)] = 0$$

$$Z_1(t) = A_1 J_1(t) + A_2 Y_1(t)$$

$$F_3(t) = t^{3/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+7/2)(3/4)^2(3/4+1)^2 \dots (3/4+m)^2} \left(\frac{1}{2}t\right)^{2m+2}$$

Можно показать, что в пределе при $\beta \rightarrow 0$ последнее уравнение (с учетом выражения $\xi_0 = \text{И} / \kappa$ при $\beta \rightarrow 0$) переходит в уравнение, определяющее

радиус ядра в изотермическом случае [14], которое в принятых переменных имеет вид

$$(21) \quad \xi_0^4 - 3\chi\xi_0 + 3 = 0 \quad (\chi = \alpha/3 + 8/I)$$

Это уравнение имеет только один положительный корень, меньший единицы [14].

Система уравнений (18), (20) решалась численно методом Ньютона на ЭЦВМ при различных значениях параметров I и α . Абсолютная погрешность вычислений корня системы не превышала 10^{-6} . В качестве начального приближения принимались значения, соответствующие изотермическому случаю: $A_1 = A_2 = 1$, $A_3 = 0$, $\kappa = I / \xi_0$ (ξ_0 , являющееся решением (21)).

На фиг. 1 представлены полученные в результате численных решений характерные кривые распределения температуры по сечению потока. Все кривые рассчитаны при одном значении параметра $I=6$ и различных α . Кривым 1, 2, 3 соответствуют следующие значения α : 0.2, 0.7, 1.2. Пунктирными кривыми на фиг. 1 изображены профили температуры, соответствующие точному решению [14] для случая течения вязкопластичной жидкости с постоянными реологическими характеристиками. В принятых переменных оно имеет вид

$$(22) \quad \theta_2 = -(\kappa^2 \alpha / 288) (9\xi^4 - 16\xi_0 \xi^3 + 12\xi_0^2 \ln \xi - 9 + 16\xi_0) + 1$$

Верхняя пунктирная кривая рассчитана при $I=6$, $\alpha=1.2$, нижняя — при $I=6$, $\alpha=0.2$. Из представленных кривых отчетливо видно влияние

переменности реологических характеристик на температурное поле потока, приводящее к понижению температуры. Этот эффект объясняется уменьшением внутреннего трения в жидкости вследствие уменьшения ее вязкости и предельного напряжения сдвига и поэтому становится особенно заметным при больших значениях параметра α .

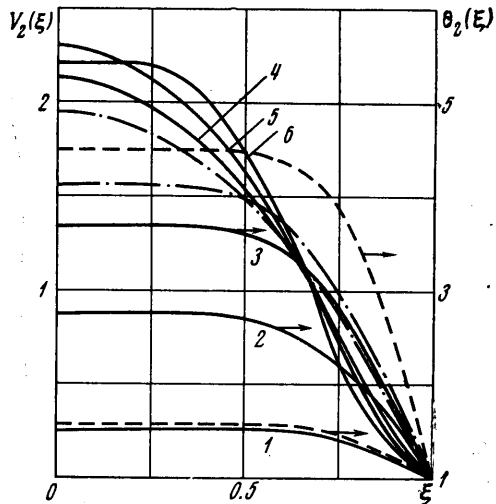
При малых α , как это видно из сравнения нижней пунктирной кривой и кривой 1, различия между решениями (15) и (22) несущественны.

На фиг. 1 представлены характерные профили скорости (кривой 4 соответствует $I=0.5$,

$\alpha=0.5$; кривой 5 — $I=0.5$, $\alpha=1.2$; кривой 6 — $I=6$, $\alpha=1.2$). Штрихпунктирными кривыми изображены профили скорости при изотермическом режиме, рассчитанные по уравнению Букингама. Верхняя штрихпунктирная кривая рассчитана при $I=0.5$, нижняя — при $I=6$.

Из фиг. 1 видно, что внутренний разогрев приводит вследствие резкого уменьшения вязкости и предельного напряжения сдвига к увеличению скорости течения, особенно в зоне ядра, и деформированию профиля. При больших значениях параметров I и α наблюдается перегиб профиля и изменение знака его кривизны в пристеночной зоне.

На фиг. 2 представлен график изменения безразмерной границы ядра в координатах (ξ_0, I) в виде семейства кривых с параметром α . Кривым 1-3 соответствуют следующие значения α : 0.1, 0.5, 1.



Фиг. 1

Значению $\alpha=0$ соответствует зависимость размера ядра от параметра Ильюшина, рассчитанная по уравнению (21). Она изображена пунктирной кривой. Экстраполяция при $I \rightarrow 0$ для всех кривых семейства определяет одно значение ($\xi_0=0$).

Из уравнений (18), (20) следует, что введенный ранее параметр κ является функцией двух независимых параметров (I и α). Из этого и выражения (14), а также из определения коэффициента гидравлического сопротивления круглой трубы

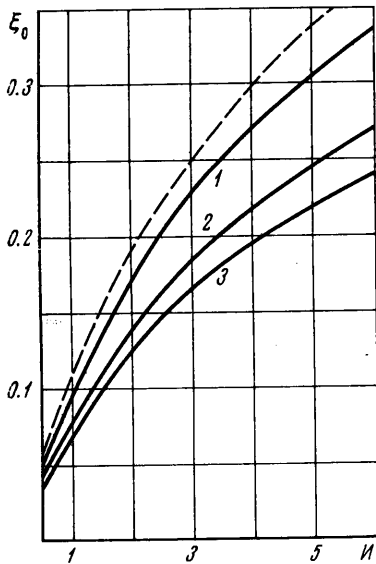
$$(-dp/dz) = (\lambda/2R)(\rho\langle v \rangle^2/2)$$

следует, что

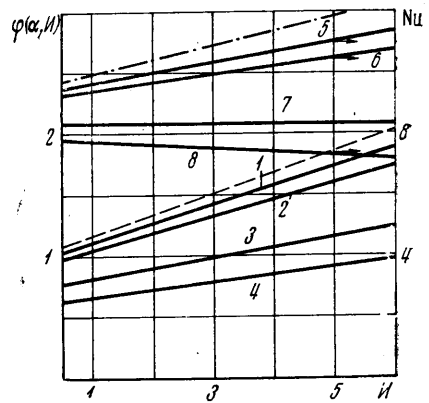
$$(23) \quad \lambda = (64/Re)\varphi(\alpha, I), \quad \varphi(\alpha, I) = \kappa/8$$

Расчеты, проведенные в диапазоне изменения параметров $0.5 \leq I \leq 8$; $0.05 \leq \alpha \leq 1.8$, показали, что функция $\varphi(\alpha, I)$ представляет собой семейство прямых с параметром α , изображенных на фиг. 3. Прямым 1–4 соответствуют следующие значения α : 0.05, 0.1, 0.5, 1. Пунктирной прямой на фиг. 3 представлена функция $\varphi(0, I)$, являющаяся решением изотермического уравнения (21), в котором необходимо учесть соответствие $\xi_0 = I/\kappa$

при $\alpha \rightarrow 0$. Экстраполяция $\varphi(\alpha, I)$ при $\alpha \rightarrow 0$ показала, что $\varphi(0, I)$ — предельная прямая семейства. Поэтому (23) можно рассматривать как обобщение закона сопротивления течению вязкопластичных жидкостей



Фиг. 2



Фиг. 3

по трубам круглого сечения [¹⁶, ¹⁷] для случая неизотермического течения. Другим частным случаем (23) при $I \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ является результат, известный в гидравлике вязких ньютоновских жидкостей

$$\lambda = 64/Re$$

Как видно из фиг. 3, коэффициент гидравлического сопротивления при течении с диссипативным разогревом оказывается ниже, чем при изотермическом течении или в предположении постоянства реологических характеристик жидкости. Этот вывод, ранее сделанный в [⁶], согласуется с результатами экспериментов, приведенных в [¹⁸]. Заметим, что это обстоятельство должно учитываться при точных измерениях на капиллярных

вискозиметрах. Для этой цели могут быть использованы результаты, полученные в данной статье.

Для параметра Нуссельта после простых преобразований получим выражение

$$Nu = 4\beta [Z_1(\beta) + \nu/2 s_{-1/2, 1}(\beta)] (\langle \theta \rangle - 1)^{-1}$$

Здесь $\langle \theta \rangle$ — средняя температура потока

$$(24) \quad \langle \theta \rangle = \left(A_1 V_1 \xi_0^2 / 2 + \int_{\xi_0}^1 V_2(\xi) \theta_2(\xi) \xi d\xi \right) \left(V_1 \xi_0^2 / 2 + \int_{\xi_0}^1 V_2(\xi) \xi d\xi \right)^{-1}$$

Интегралы, входящие в (24), могут быть сравнительно легко вычислены приближенно. Расчеты показали, что, как и $\phi(\alpha, \text{II})$, в том же диапазоне изменения параметров II и α функция $Nu(\alpha, \text{II})$ представляет собой семейство прямых с параметром α .

На фиг. 3 представлены результаты некоторых вычислений числа Нуссельта, проведенных на ЭЦВМ. Прямым 5–8 соответствуют $\alpha = 0.05, 0.1, 0.5, 1$. Штрихпунктирная прямая изображает зависимость $Nu(\text{II})$, рассчитанную для неизотермического течения вязкопластичной жидкости с диссипативным разогревом, реологические характеристики которой не зависят от температуры [14]

$$\begin{aligned} Nu &= 1680 f_1^2 f_2^{-1} \\ f_1 &= \xi_0^4 - 4\xi_0 + 3 \\ f_2 &= 1575 - 4752\xi_0 + 3584\xi_0^2 + 2520\xi_0^4 - 3920\xi_0^5 - \\ &\quad - 1008\xi_0^6 + 2016\xi_0^7 - 15\xi_0^8 - 840\xi_0^8 \ln \xi_0 \end{aligned}$$

Как видно из фиг. 3, параметр Нуссельта уменьшается при увеличении α , при этом различия со случаем течения жидкости с постоянными реологическими характеристиками очень значительны даже при сравнительно небольших значениях диссипативного параметра.

Автор благодарит В. И. Марона, Г. Д. Розенберг, А. П. Юфина за интерес к работе и полезные замечания.

Поступила 2 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении вязкой жидкости. ПМТФ, 1965, № 5.
2. Каганов С. А. Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. ПМТФ, 1962, № 3.
3. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. О гидродинамическом тепловом взрыве. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 1.
4. Бостанджиян С. А., Черняева С. М. О гидродинамическом тепловом «взрыве» неньютоновской жидкости. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 2.
5. Беломытцев В. П., Гвоздков Н. Н. О потере тепловой устойчивости движения вязко-пластического материала. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 2.
6. Расизаде Я. М., Мамедов Р. М. О влиянии теплоты внутреннего трения на гидравлические характеристики структурного режима движения вязкопластических сред в трубах. Изв. вузов, Сер. Нефть и газ, 1968, № 12.
7. Регирер С. А. Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
8. Бостанджиян С. А., Черняева С. М. Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении неньютоновской жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
9. Бостанджиян С. А., Горлов Л. П. Неизотермическое стационарное течение вязкопластической жидкости между двумя соосными вращающимися цилиндрами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
10. Martin B. Some analytical solutions for viscometric flows of power-law fluids with heat generation and temperature dependent viscosity. Internat. J. Non-Linear Mech., 1967, vol. 2, No. 4.

11. *Бостанджиян С. А., Столин А. М.* Неизотермическое стационарное течение вязко-пластической жидкости между двумя параллельными пластинами. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3. Минск, «Наука и техника», 1968.
12. *Бостанджиян С. А., Столин А. М.* Обобщенное течение в кольцевом зазоре вязко-пластической жидкости с вязкостью, зависящей от температуры. В сб. «Реофизика и реодинамика текучих систем». Минск, «Наука и техника», 1970.
13. *Аббасов А. А., Алиев В. А., Рагимов О. П., Расизаде Я. М.* Влияние температуры, давления и растворенного газа на структурно-механические свойства нефтей. Тр. Азерб. ин-та нефти и химии, 1967, вып. 26.
14. *Мирзаджанзаде А. Х.* Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, Азнефтеиздат, 1959.
15. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.
16. *Мигельман Б. И., Розенберг Г. Д.* О структурном режиме течения вязко-пластической жидкости по цилиндрической трубе кругового сечения. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
17. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
18. *Polak P.* Spontaneous hot zone formation in oil flow. J. Mech. Engng Sci., 1971, vol. 13, No. 4.