УДК 532.526

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ОКОЛО ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА ПРИ ВДУВЕ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

А. А. МАРКОВ

(*Москва*)

Рассматривается сверхзвуковое обтекание затупленного гладкого тела потоком вязкого газа при дозвуковом вдуве с поверхности тела.

Влияние различных режимов вдува на физические характеристики потока перед телом изучается в работах [1, 2]; задача рассматривается в приближении пограничного слоя; учитывается неоднородный состав газа перед телом, химические реакции между различными компонентами, влияние излучения.

Для ряда практически важных режимов течения представляет интерес учесть высшие приближения по степеням ε ($\varepsilon=1/\sqrt{\mathrm{Re}}$, см. ниже (1.1)) в ударном слое перед телом, в частности выяснить влияние эффекта вытеснения, а также пределы применимости приближения пограничного слоя, принятого в работах [1, 2].

Асимптотике задачи обтекания затупленного тела вязким газом при больших числах Рейнольдса посвящена обширная литература (см., например, книгу Ван-Дайка [3]). Исследование задачи, основанное на методе М. И. Вишика и Л. А. Люстерника, содержится в работах [4–6]. (Целесообразность применения метода М. И. Вишика и Л. А. Люстерника в сравнении с методом внутренних и внешних разложений обсуждается в работе [4].) В перечисленных работах влияние вдува на течение не рассматривалось.

В данной работе построены приближенные решения с погрешностью порядка ε и ε^2, учитывающие влияние вдува f ($f=(\rho_w v_w)/(\rho_\infty v_\infty)$, $f=O(1)$) на поток. Приближенные решения складываются из уточненного невязкого течения (внешнего решения) и погранслойных поправок. Погранслойные поправки строятся на ударной волне и контактной границе таким образом, чтобы решение было непрерывным и достаточно гладким. Для внешнего решения на контактной границе получены условия, учитывающие эффекты вязкости.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское и осесимметричное сверхзвуковое обтекание затупленного тела потоком однородного по составу совершенного вязкого газа при заданном дозвуковом вдуве. Излучение не учитывается.

В качестве исходной системы уравнений принимаются уравнения Навье — Стокса для сжимаемого газа, записанные в характерных для гиперзвуковых течений безразмерных переменных [7].

Систему Навье — Стокса запишем в виде

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div}\rho_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon=0, \quad \rho_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla\mathbf{v}_\varepsilon+\nabla p_\varepsilon-\varepsilon^2\operatorname{div}\tau_\varepsilon=0\\
\rho_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla(c_pT_\varepsilon+\mathbf{v}_\varepsilon^2/2)+\varepsilon^2\operatorname{div}(\boldsymbol{q}_\varepsilon-\tau_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon)=0\\
\mathbf{q}_\varepsilon=-\frac{\lambda}{Pr_\infty}\nabla T_\varepsilon, \qquad \tau_{\varepsilon ij}=-\frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon\delta_{ij}+\left(\frac{\partial v_{\varepsilon i}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{\varepsilon j}}{\partial x_i}\right)\\
p_\varepsilon=R\rho_\varepsilon T_\varepsilon\\
\varepsilon^2=1/\mathrm{Re}, \quad \mathrm{Re}=\rho_\infty L v_\infty/\mu^*, \quad \mu^*=\mu(T^*)\\
T^*=(\gamma-1)M_\infty^2T_\infty, \quad \mu_\infty=\mu(T_\infty), \quad \mathrm{Pr}_\infty=\mu_\infty c_p/\lambda_\infty
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Для краткости используем символическую запись системы (1.1) в виде (ср. [6])

$$
L_\varepsilon\mathbf{w}_\varepsilon=0, \quad \mathbf{w}_\varepsilon=\{\rho_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, T_\varepsilon\}
$$

Систему (1.1) дополним граничными условиями. На поверхности тела

(1.2) $T_\varepsilon = T_w / (v_\infty^2 c_p), \quad u_\varepsilon = 0, \quad \rho_\varepsilon v_\varepsilon = (\rho_w v_w) / (\rho_\infty v_\infty)$

Здесь v — нормальная, u — касательная составляющие скорости потока по отношению к телу, T_w, ρ_w, v_w — размерные значения температуры, плотности и нормальной компоненты скорости потока на теле. В дальнейшем предполагаем, что вдув дозвуковой, $v_w^2 / (\gamma R T_w) < 1$ и $(\rho_w v_w) / (\rho_\infty v_\infty) = f$, f — не зависит от ε.

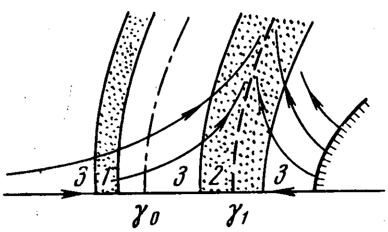
В набегающем потоке

(1.3) $\rho_\varepsilon = 1, \quad \mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{i}, \quad T_\varepsilon = 1 / ((\gamma - 1) M_\infty^2)$

Здесь $\mathbf{i}$ — единичный вектор в направлении течения.

Задачу (1.1) — (1.3) будем называть «невырожденной», если $\varepsilon \neq 0$. Рассмотрим сначала вырожденную задачу, $\varepsilon = 0$.

2. Вырожденная задача. Пусть $\mathbf{W}_0 = \{G_0, \mathbf{V}_0, T_0\}$; $L_0 \mathbf{W}_0 = 0$ — символическая запись уравнений Эйлера движения невязкого сжимаемого газа (ср. (1.1) при $\varepsilon = 0$)



(2.1) $$\operatorname{div}(G_0 \mathbf{V}_0) = 0, \quad G_0 \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}_0 + \nabla P_0 = 0, \quad G_0 \mathbf{V}_0 \cdot \nabla (c_p T_0 + \mathbf{V}_0^2 / 2) = 0, \quad P_0 = G_0 R T_0$$

Систему (2.1) дополним граничными условиями на теле и в набегающем потоке

(2.2) $$T_0 = T_w / (v_\infty^2 c_p), \quad U_0 = 0, \quad G_0 V_0 = (\rho_w v_w) / (\rho_\infty v_\infty)$$

(2.3) $$G_0 = 1, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{i}, \quad T_0 = (\gamma - 1)^{-1} M_\infty^{-2}$$

Известно, что при сверхзвуковом обтекании затупленного тела потоком невязкого газа в случае дозвукового вдува в области течения перед телом образуется отошедшая ударная волна и отошедшая контактная граница [8, 9]. Будем фронт ударной волны обозначать через γ_0, а контактный разрыв через γ_1. Расположение γ_0 и γ_1 приведено на фиг. 1.

На γ_0 компоненты вектор-функции $\mathbf{W}_0$ удовлетворяют соотношениям Ренкина — Гюгонио. На γ_1 выполняются соотношения контактного разрыва

(2.4) $$[\mathrm{P}_0]_{\gamma_1} = 0, \quad V_0 |_{\gamma_1} = 0$$

где V_0 — нормальная составляющая скорости потока по отношению к γ_1. Символ $[\varphi]_\gamma$ означает везде скачок величины φ на границе γ, а именно:

$$[\varphi]_\gamma = \lim_{n \geqslant 0,\, n \to 0} \varphi(n, s) - \lim_{n < 0,\, n \to 0} \varphi(n, s)$$

где n, s — нормальная и касательная координаты по отношению к γ. Нормали на линиях γ_0, γ_1 и на теле ориентируем одинаково.

Предполагается, что решение вырожденной задачи существует, единственно и является достаточно гладкой функцией в некоторой области перед телом (см. фиг. 1) всюду вне γ_0 и γ_1. Линии γ_0 и γ_1 также предполагаются достаточно гладкими.

3. Характерные зоны решения невырожденной задачи. При достаточно малом ε в области течения можно выделить следующие основные зоны (ср. [5, 6]):

1) зона ударного сжатия (окрестность γ_0), ширина которой имеет порядок ε^2. Градиенты искомых величин в этой зоне порядка ε^{-2}. Зона смещена на величину $O(\varepsilon)$ по отношению γ_0 (см. фиг. 1);

2) зона пограничного слоя на контактной границе (окрестность γ_1). Ширина этой зоны порядка ε. Градиенты искомых величин порядка ε^{-1}.

3) промежуточная маловязкая зона, состоящая из трех частей, расположенных соответственно между телом и зоной 2, между зонами 1 и 2 и перед зоной 1 (см. фиг. 1). Ширина каждой части имеет порядок $O(1)$. Локальные эффекты вязкости имеют порядок ε^2, но искомые величины отличаются на порядок ε от соответствующих величин вырожденной задачи вследствие эффекта вытеснения пограничного слоя на γ_1. (Исключение составляет область перед ударной волной (зоной 1), где искомые величины экспоненциально близки к параметрам набегающего потока.)

Заметим, что рассматриваемая задача имеет общие черты с задачей обтекания затупленного тела в отсутствие вдува ($v_w=0$). Общими моментами (ср. [5, 6]) является разбиение области течения на характерные зоны, аналогичные зонам 1—3. Основное отличие состоит в том, что вдув с поверхности тела приводит к появлению внутреннего пограничного слоя на контактной границе γ_1 и промежуточной маловязкой зоны, расположенной между телом и γ_1. Напомним, что в отсутствие вдува контактная граница отсутствует. Пограничный слой расположен на теле.

4. Асимптотика функции $\mathbf{w}_\varepsilon$. Асимптотическое представление решения $\mathbf{w}_\varepsilon$ невырожденной задачи (1.1) — (1.3), следуя методу М. И. Вишика и Л. А. Люстерника ищем в виде (ср. [5])

$$\mathbf{w}_\varepsilon \sim \Sigma\varepsilon^k \mathbf{W}_k + \Sigma\varepsilon^k \tilde{\mathbf{w}}_k^{\pm} + \Sigma\varepsilon^k \mathbf{w}_k^{\pm}, \quad k \geqslant 0 \tag{4.1}$$

В формуле (4.1) функции $\mathbf{W}_k$ ($k\geqslant 1$) представляют собой поправки к «невязкому течению» $\mathbf{W}_0$ и получаются стандартным разложением уравнений Навье — Стокса по малому параметру вязкости (см. [7, 5]) $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon^k \mathbf{W}_k\right.$ является внешним решением порядка $\left.\varepsilon^{n+1}\right)$. Функции $\mathbf{W}_k$ ($k\geqslant 1$) удовлетворяют линеаризованным уравнениям невязкого течения (2.1) и являются гладкими функциями вне γ_0, γ_1. Граничные условия для $\mathbf{W}_k$ ($k\geqslant 1$) ставятся на теле, на «бесконечности», а также на γ_0 и γ_1.

Условия на теле и на «бесконечности» для $\mathbf{W}_k$ ($k\geqslant 1$) соответствуют (2.2), (2.3) и являются однородными.

На γ_0 ставятся модифицированные условия Ренкина — Гюгонио. Эти условия получаются при построении погранслойных поправок $\tilde{\mathbf{w}}_k^+$ (слева от γ_0) $\tilde{\mathbf{w}}_k^-$ (справа от γ_0). При этом требуется, чтобы для приближенных решений выполнялись законы сохранения массы, энергии и импульса с определенной точностью по ε. Вывод соотношений на γ_0 дан в работе [6] для задачи «без вдува» ($v_w=0$ см. (1, 2)) и переносится на рассматриваемую задачу без изменений.

Условия на контактной границе γ_1 для $\mathbf{W}_k$ ($k\geqslant 1$) получим при построении погранслойных поправок $\mathbf{w}_k^+$ (слева от γ_1) и $\mathbf{w}_k^-$ (справа от γ_1).

5. Назначение погранслойных поправок $\tilde{\mathbf{w}}_k^{\pm}$, $\mathbf{w}_k^{\pm}$ ($\mathbf{k}\geqslant 0$).

Первая сумма в разложении (4.1) является гладкой функцией лишь вне γ_0 и γ_1. На γ_0 и γ_1 функции $\mathbf{W}_k$ терпят разрывы первого рода, так как, вообще говоря,

$$[G_k]_{\gamma_0}\neq 0, \quad [T_k]_{\gamma_0}\neq 0, \quad [V_k]_{\gamma_0}\neq 0, \quad [P_k]_{\gamma_0}\neq 0$$

$$[G_k]_{\gamma_1}\neq 0, \quad [U_k]_{\gamma_1}\neq 0, \quad [T_k]_{\gamma_1}\neq 0$$

Здесь V — нормальная компонента скорости на γ_0, U — касательная компонента скорости на γ_1.

Подстановка суммы $\Sigma\varepsilon^k\mathbf{W}_k$ в уравнения Навье — Стокса приводит к появлению в невязке сингулярных членов типа δ-функций и их производных, сосредоточенных на γ_0 и γ_1.

Погранслойные поправки $\tilde{\mathbf{w}}_k^\pm$, $\mathbf{w}_k^\pm$ регуляризуют невязку и делают приближенное решение (см. (4.1)) непрерывным и достаточно гладким (ср. [5, 6]).

6. Погранслойные поправки на ударной волне построены в работе [6] для задачи «без вдува» ($v_w=0$). Результаты переносятся на рассматриваемую задачу.

Функции $\tilde{\mathbf{w}}_k^\pm$ находятся интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений по переменному $\zeta=n/\varepsilon^2$, где n — нормаль к γ_0. Уравнения для $\tilde{\mathbf{w}}_k^\pm$ линейны при $k\geqslant1$, а при $k=0$ задача построения $\tilde{\mathbf{w}}_0^\pm$ сводится к интегрированию одномерных стационарных уравнений Навье — Стокса, зависящих от координаты s вдоль γ_0 как от параметра.

Погранслой $\tilde{\mathbf{w}}_0^\pm(s, \zeta)$ определяется с точностью до параметрической функции $X(s;\, \varepsilon)=O(\varepsilon^{-1})$, которая уточняется в следующих приближениях при построении внешнего решения с использованием законов сохранения массы, энергии и импульса (см. подробнее [6]).

Граничные условия для $\mathbf{W}_1$ на γ_0 представляют собой обобщение условий Ренкина — Гюгонио на ударной волне. Приведем результат (см. [6])

$$
\begin{gathered}
\left[\langle GUV\rangle_1-\frac{\partial}{\partial s}(X_1(s)\langle P+GU^2\rangle_0)\right]_{\gamma_0}=0\\
\left[\langle P+GV^2\rangle_1-\frac{\partial}{\partial s}(X_1(s)\langle GUV\rangle_0)\right]_{\gamma_0}=0\\
\left[\langle GVE\rangle_1-\frac{\partial}{\partial s}(X_1(s)\langle GUE\rangle_0)\right]_{\gamma_0}=0\\
\left[\langle GV\rangle_1-\frac{\partial}{\partial s}(X_1(s)\langle GU\rangle_0)\right]_{\gamma_0}=0\\
E=c_pT+(U^2+V^2)/2
\end{gathered}
\tag{6.1}
$$

Здесь U, V—касательная и нормальная составляющие скорости на γ_0; s — координата вдоль γ_0; $X_1(s)$ — параметрическая функция, учитывающая смещение ударной волны за счет влияния пограничного слоя на γ_1. Символ $\langle\Phi\rangle_k$ означает член порядка ε^k в разложении

$$
\Phi(a_0+\varepsilon a_1+\varepsilon^2a_2+\ldots,\, b_0+\varepsilon b_1+\varepsilon^2b_2+,\ldots,\ldots)=
$$
$$
=\sum_{k=0}^{\infty}\langle\Phi(a_0, a_1, a_2,\ldots, b_0, b_1,\ldots)\rangle_k\varepsilon^k
$$

так, например,

$$\langle P+GU^2\rangle_0=P_0+G_0U_0^2,$$
$$\langle GUV\rangle_1=U_0V_0G_1+G_0U_1V_0+G_0U_0V_1 \text{ и т. д.}$$

Соотношения (6.1) можно интерпретировать (см. [6]) как классические условия Ренкина — Гюгонио для суммы $\mathbf{W}_0+\varepsilon\mathbf{W}_1$ на границе $\gamma_{0\varepsilon}$, получаемой смещением γ_0 на величину $\varepsilon X_1(s)$ вдоль нормалей к γ_0. Граничные условия для $\mathbf{W}_1$ на γ_1 получим при выводе погранслойных поправок $\mathbf{w}_0^\pm$ на контактной границе.

7. Погранслойные поправки на контактной границе. Вывод уравнений для погранслойных поправок $\mathbf{w}_k^\pm$ на $\gamma_1(k\geqslant 0)$ аналогичен работе [4] (см. также [10]). Введем в окрестности γ_1 местную систему координат (n, s), n — нормаль к γ_1, s — координата вдоль γ_1. Пусть v, u — нормальная и касательная составляющие скорости в системе координат (n, s).

Ввиду того, что на контактной границе нормальная составляющая скорости и давление непрерывны, соответствующие погранслойные поправки $v_0^\pm$, $p_0^\pm$ полагаем равными нулю. (Здесь несколько отступаем от обозначений, принятых в работе [4].) Погранслойные поправки для функций G_0, U_0, T_0, терпящих разрыв на γ_1, отличны от нуля.

Запишем уравнения Навье — Стокса в координатах (η, s), где $\eta=n/\varepsilon$ и подставим в полученные уравнения следующие величины:

$$
\begin{aligned}
(7.1)\qquad & \rho=G_0(s, \varepsilon\eta)+\rho_0^\pm(s, \eta)+\varepsilon G_1+\varepsilon\rho_1^\pm+\ldots,\\
& u=U_0(s, \varepsilon\eta)+u_0^\pm+\varepsilon U_1+\varepsilon u_1^\pm+\ldots\\
& v=V_0(s, \varepsilon\eta)+\varepsilon v_1^\pm(s, \eta)+\varepsilon V_1(s, \varepsilon\eta)+\ldots,\\
& T=T_0+t_0^\pm+\varepsilon T_1+\varepsilon t_1^\pm+\ldots
\end{aligned}
$$

Разложим $G_k(s, \varepsilon\eta)$, $U_k(s, \varepsilon\eta)$, $V_k(s, \varepsilon\eta)$, $T_k(s, \varepsilon\eta)$ $(k=0, 1, \ldots)$ в ряд Тейлора в окрестности $\eta=0$. Учитывая уравнения невязкого течения, приравняем нулю в каждом из уравнений системы Навье — Стокса члены главного порядка по ε. В результате получим уравнения для погранслойных поправок $\rho_0^\pm(s, \eta)$, $u_0^\pm(s, \eta)$, $t_0^\pm(s, \eta)$, $v_1^\pm(s, \eta)$; так, например, уравнение для касательной составляющей по отношению к γ_1 имеет вид

$$
\begin{aligned}
(7.2)\qquad & \bar\rho_0\bar u_0\frac{\partial u_0^\pm}{\partial s}+(\bar\rho_0\bar u_0-G_0(s,\pm0)\,U_0(s\pm0))\frac{\partial U_0}{\partial s}(s,\pm0)+\\
& +\bar\rho_0\left(v_1^\pm+V_1(s,\pm0)+\eta\frac{\partial V_0}{\partial n}(s,\pm0)\right)\frac{\partial u_0^\pm}{\partial\eta}-\\
& -\frac{\partial}{\partial n}\left(\mu(\bar T_0)\frac{\partial u_0^\pm}{\partial\eta}\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
(7.3)\qquad \bar\rho_0=\rho_0^\pm+G_0(s,\ \pm0),\quad \bar u_0=u_0^\pm+U_0(s,\ \pm0),\quad \bar t_0=t_0^\pm+T_0(s,\ \pm0)
$$

Если положить

$$
(7.4)\qquad \bar v_0=v_1^\pm+V_1(s,\ \pm0)+(\eta\partial V_0/\partial n)\,(s,\ \pm0)
$$

то задача построения погранслойных поправок $\rho_0^\pm$, $u_0^\pm$, $t_0^\pm$ сводится к краевой задаче для уравнения Прандтля (сжимаемого пограничного слоя) при следующих условиях:

$$
(7.5)\qquad \eta\to\pm\infty,\quad \bar u_0\to U_0(s,\ \pm0),\quad \bar t_0\to T_0(s,\ \pm0)
$$

Предположим, что найдено некоторое гладкое решение $\bar{\mathbf{w}}_0=\{\bar\rho_0, \bar u_0, \varepsilon\bar v_0, \bar t_0\}$ уравнений пограничного слоя с краевыми условиями (7.5) (внутреннее решение), тогда по формулам (7.3), (7.4) найдем погранслойные поправки $\rho_0^\pm$, $u_0^\pm$, $t_0^\pm$ (напомним, что $v_0^\pm=p_0^\pm=0$), а также определим сумму $v_1^\pm+V_1(s, \pm0)$. При этом сумма $\mathbf{W}_0+\mathbf{w}_0^\pm$ согласно методу погранслойных поправок (ср. [4–6]) будет непрерывной на γ_1 и достаточно гладкой (возможный скачок в производных по нормалям к γ_1 у суммы $\mathbf{W}_0+\mathbf{w}_0^\pm$ является величиной порядка единицы, в то время как сами производные имеют порядок $1/\varepsilon$).

8. Нормировка внутреннего решения. Нетрудно показать (ср. [11]), что если функции $\rho(s, \eta)$, $u(s, \eta)$, $v(s, \eta)$, $t(s, \eta)$ удовлетворяют граничным условиям (7.5) и уравнениям Прандтля (сжимаемого пограничного слоя), записанным в координатах (s, η), которые связаны с γ_1, то функции $\rho'(s', \eta')$, $u'(s', \eta')$, $v'(s', \eta')$, $t'(s', \eta')$ удовлетворяют тем же условиям и уравнениям, что и ρ, u, v, t, если только

$$s'=s, \quad \eta'=\eta+Y(s), \quad \rho'(s', \eta')=\rho(s, \eta), \quad u'(s', \eta')=u(s, \eta)$$

$$v'(s', \eta')=v(s, \eta)+\frac{dY}{ds}u(s, \eta), \qquad t'(s', \eta')=t(s, \eta)$$

где $Y(s)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Чтобы выделить некоторое решение $\mathbf{w}_0(s, \eta)$, а следовательно, и некоторые погранслойные поправки на контактной границе γ_1, воспользуемся одним из следующих условий нормировки, целесообразность которых обсуждается ниже

$$\bar{v}_0^*(s, \eta)|_{\eta=0}=0 \qquad (\text{см. } [2, 12]) \tag{8.2}$$

$$\int_{-\infty}^{0}(\bar{\rho}_0^*(s, \eta)\bar{u}_0^*(s, \eta)-G_0(s, -0)U_0(s, -0))d\eta+$$

$$+\int_{0}^{\infty}(\bar{\rho}_0^*\bar{u}_0^*-G_0(s, +0)U_0(s, +0))d\eta=0$$

$$\int_{-\infty}^{0}(\bar{\rho}_0^*\bar{u}_0^{*2}-G_0(s, -0)U_0^2(s, -0))d\eta+$$

$$+\int_{0}^{\infty}(\bar{\rho}_0^*\bar{u}_0^{*2}-G_0(s, +0)U_0^2(s, +0))\partial\eta=0$$

$$\lim_{\eta\to\pm\infty}\bar{v}^*(s, \eta)-\eta\frac{\partial V_0}{\partial n}(s, \pm 0)=q^\pm(s)$$

($q^\pm(s)$ — заданные величины).

По-видимому, каждое нормирующее условие (8.2) выделяет единственное решение системы уравнений сжимаемого пограничного слоя Прандтля при краевых условиях (7.5) и соответствующих начальных условиях. В случае течения в окрестности линии торможения достаточность нормирующих условий (8.2) для единственности решения соответствующей краевой задачи можно обосновать.

Следует отметить, что при вариантах нормировки (8.2) сумма $\mathbf{W}_0+\mathbf{w}_0^\pm$ является непрерывной функцией в окрестности γ_1 и имеет, вообще говоря, скачок $O(1)$ в производных по нормали к γ_1. Нетрудно показать по аналогии с [6], что при каждом способе нормировки для нулевого приближения (см. (4.1)) $\mathbf{w}^{(0)}=\mathbf{W}_0+\tilde{\mathbf{w}}_0^\pm+\mathbf{w}_0^\pm$ выполняются с погрешностью $O(\varepsilon)$ (в смысле [6]) законы сохранения массы, энергии и импульса.

Предположим, что $\bar{\mathbf{w}}_0^*$ — некоторое нормированное внутреннее решение, тогда произвольное внутреннее решение можно записать в виде

$$\bar{\rho}_0(s, \eta)=\bar{\rho}_0^*(s, \eta+Y_\varepsilon(s)), \quad \bar{u}_0(s, \eta)=\bar{u}_0^*(s, \eta+Y_\varepsilon(s)) \tag{8.3}$$

$$\bar{v}_0(s,\eta)=\bar{v}_0^*(s,\eta+Y_\varepsilon(s))-\frac{dY_\varepsilon}{ds}\bar{u}_0^*(s,\eta+Y_\varepsilon(s))$$

$$\bar{t}_0(s,\eta)=\bar{t}_0^*(s,\eta+Y_\varepsilon(s)),\quad Y_\varepsilon(s)=O(1)$$

Параметрическая функция $Y_\varepsilon(s)$ остается неопределенной в нулевом приближении и будет уточнена в следующем приближении при выводе соотношений на контактной границе для внешнего решения $\mathbf{W}_1$.

9. Условия на контактной границе. Соотношения на γ_1 для внешнего решения $\mathbf{W}_1$ получим при построении погранслойных функций первого приближения $\mathbf{w}_1^\pm=\{\rho_1^\pm, u_1^\pm, v_1^\pm, t_1^\pm\}$

$$p_1^\pm=R(\rho_{(1)}T_{(0)}+\rho_{(0)}T_{(1)}-G_1T_0-G_0T_1),\quad \rho_{(k)}=G_k+\rho_k^\pm$$

$$T_{(k)}=T_k+t_k^\pm,\quad k=0,1$$

Уравнения для погранслойных функций $\mathbf{w}_1^\pm$ получаются по аналогии с предыдущим приближением (см. также [3, 5]).

Можно показать, что для погранслойной поправки $p_1^\pm$ получится следующее уравнение:

$$\frac{\partial p_1^\pm}{\partial\eta}=\varkappa(s)(\rho_0^\pm+G_0(s,\pm0))(u_0^\pm+U_0(s,\pm0))^2-$$
$$-\varkappa(s)G_0(s,\pm0)U_0^2(s,\pm0) \tag{9.1}$$

где $\varkappa(s)$ — кривизна γ_1. Заметим, что это уравнение отделяется от остальных уравнений для функций $\rho_1^\pm$, $u_1^\pm$, $v_1^\pm$, $t_1^\pm$, которые нам здесь не потребуются.

Уравнение (9.1) интегрируем с условиями

$$p_1^\pm\to0,\ \eta\to\pm\infty \tag{9.2}$$

$$[p_1^\pm+P_1]_{\gamma_1}=0 \tag{9.3}$$

После интегрирования получим связь

$$[P_1]_{\gamma_1}=\left(\int\limits_{-\infty}^{0}-\int\limits_{\infty}^{0}\right)\varkappa(s)(\bar{\rho}_0\bar{u}_0^2-G_0(s,\pm0)U_0^2(s,\pm0))d\eta \tag{9.4}$$

$$\bar{\rho}_0=\rho_0^\pm+G_0(s,\pm0),\quad \bar{u}_0=u_0^\pm+U_0(s,\pm0)$$

Важно отметить, что скачок давления на контактной границе для внешнего решения $\mathbf{W}_1$ определяется предыдущим приближением.

Используя соотношения (7.4), находим

$$V_1(s,\pm0)=\lim_{\eta\to\pm\infty}\left(\bar{v}_0(s,\eta)-\eta\frac{\partial V_0}{\partial n}(s,\pm0)\right) \tag{9.5}$$

Выделим в (9.4), (9.5) явным образом зависимость от параметрической функции $Y_\varepsilon(s)$. Предположим, что функция $Y_\varepsilon(s)$ допускает разложение $Y_\varepsilon(s)=Y_1(s)+\varepsilon Y_2(s)+\ldots$ Используя формулы (8.3), получим после несложных преобразований (ср. [6])

$$V_1(s,\pm0)-Y_1(s)\frac{\partial V_0}{\partial n}(s,\pm0)+U_0(s,\pm0)\frac{dY_1}{ds}= \tag{9.6}$$
$$=\lim_{\eta\to\pm\infty}\bar{v}_0^*(s,\eta)-\eta\frac{\partial V_0}{\partial n}(s,\pm0)$$

$$[P_1]_{\gamma_1}-\varkappa(s)Y_1(s)[G_0U_0^2]_{\gamma_1}= \tag{9.7}$$

$$=\varkappa(s)\int\limits_{-\infty}^{0}(\bar\rho_0{}^*\bar u_0{}^{*2}-G_0(s,-0)U_0^2(s,-0))d\eta+$$

$$+\varkappa(s)\int\limits_{0}^{\infty}(\bar\rho_0{}^*\bar u_0{}^{*2}-G_0(s,+0)U_0^2(s,+0))d\eta$$

(Заметим, что интеграл в правой части (9.7) уже не зависит от параметрической функции.)

Соотношения (9.6), (9.7) обобщают условия на контактной границе для невязкого течения (2.4) на случай первого приближения по ε.

Соотношения (9.6), (9.7) допускают наглядную интерпретацию. Так, в случае нормирующего условия 3) из (9.7) следует, что

$$[P_0+\varepsilon P_1]_{\gamma_{1\varepsilon}}=O(\varepsilon^2) \tag{9.8}$$

где граница $\gamma_{1\varepsilon}$ получается в результате смещения γ_1 на величину $\varepsilon Y_1(s)$ вдоль нормалей к γ_1.

Таким образом, в случае нормировки 3) соотношение (9.7) можно интерпретировать как условие малого скачка (порядка ε^2) давления на смещенной «контактной» границе для внешнего решения первого приближения $\mathbf{W}_0+\varepsilon\mathbf{W}_1$.

Если воспользоваться условием нормировки 2), то из (9.6) следует соотношение $[m_0+\varepsilon m_1]_{\gamma_{1\varepsilon}}=O(\varepsilon^2)$, где $m=GV$, V — нормальная составляющая скорости на γ_1, граница $\gamma_{1\varepsilon}$ получается смещением γ_1 на $\varepsilon Y_1(s)$.

10. Об учете вязких эффектов порядка ε. Предположим, что рассчитано невязкое течение $\mathbf{W}_0$. Воспользуемся одним из указанных выше способов нормировки и найдем нормированное решение внутренней задачи для уравнений пограничного слоя Прандтля, а именно вектор-функцию $\overline{\mathbf{w}}_0{}^*(s,\eta)$, тогда определяются величины, находящиеся в правых частях формул (9.6), (9.7). Определяем внешнее решение линеаризованных уравнений невязкого течения при однородных условиях на теле и в набегающем потоке с условиями (6.1) на ударной волне и с условиями (9.6), (9.7) на контактной границе. При этом определяются параметрические функции $X_1(s)$ и $Y_1(s)$, присутствующие в (6.1), (9.6), (9.7), которые учитывают возмущение ударной волны и контактной границы за счет вытеснения.

Используя интерпретации соотношений (6.1) (см. [6]) и соотношений (9.6), (9.7) (см. выше), можно вместо функции $\mathbf{W}_1$ искать внешнее решение $\mathbf{W}'_{(1)}$, эквивалентное сумме $\mathbf{W}_0+\varepsilon\mathbf{W}_1$ (см. [5, 6]). Сформулируем задачу для $\mathbf{W}_1'$

$$L_0\mathbf{W}'_{(1)}=0 \tag{10.1}$$

т. е. функция $\mathbf{W}_{(1)}'$ удовлетворяет уравнениям невязкого течения. Условия на теле и в набегающем потоке для $\mathbf{W}_{(1)}'$ совпадают с (1.2), (1.3).

На заранее неизвестной ударной волне для функции $\mathbf{W}_{(1)}'$ ставятся классические соотношения Ренкина — Гюгонио.

На заранее неизвестной контактной границе γ_1' для функции $\mathbf{W}_{(1)}'$ ставятся условия

$$V_{(1)}'^{\pm}|_{\gamma_1'}=\lim\varepsilon\left(\bar v_0{}^*(s,\eta)-\eta\frac{\partial V_0}{\partial n}(s,\pm0)\right) \tag{10.2}$$

$$[P'_{(1)}]_{\gamma_1'} = \varepsilon\varkappa(s)\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{\infty}\right)(\bar{\rho}_0{}^*\bar{u}_0{}^{*2} - G_0(s, \pm 0)\,U_0{}^2(s, \pm 0))\,d\eta$$

где $V_{(1)}{}'^{\pm}|_{\gamma_1'}$ означает граничные значения нормальной компоненты скорости слева и справа от γ_1'. В формулах (10.2) $\bar{v}_0{}^*$, $\bar{\rho}_0{}^*$, $\bar{u}_0{}^*$ — некоторым образом нормированное внутреннее решение; $G_0(s, \pm 0)$, $U_0(s, \pm 0)$, $V_0(s, \pm 0)$ — значение компонент невязкого течения на «невязкой» контактной границе γ_1, $\varkappa(s)$ — кривизна γ_1.

Автор благодарит Г. А. Тирского за постановку задачи и полезные обсуждения и признателен Л. А. Чудову за ценные замечания.

Поступила 2 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников В. М., Тирский Г. А.* Разрушение осесимметричного тела вращения из материала сложного химического состава в потоке частично ионизованного воздуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
2. *Гершбейн Э. А., Тирский Г. А.* Течение вязкого теплопроводного, многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности притупления при интенсивных вдувах. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 1.
3. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
4. *Чудов Л. А.* Высшие приближения в пограничном слое. (Метод погранслойных поправок и метод сращиваемых разложений.) Сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 2. М., Изд-во МГУ, 1971.
5. *Марков А. А., Чудов Л. А.* Исследования течений вязкого газа при достаточно больших числах Рейнольдса. Численные методы механики сплошной среды, 1971, т. 2, № 2.
6. *Марков А. А.* Асимптотическое исследование течений вязкого газа с зоной ударного сжатия. Сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 2. М., Изд-во МГУ, 1971.
7. *Вай-Дайк М.* Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком. Сб. «Исследование гиперзвуковых течений», М., «Мир», 1964.
8. *Taylor T. D., Masson B. S.* Supersonic flow past blant bodies with large surface injection. 19-th Internat. Astronaut. Congress, vol. 3, N. Y., 1968.
9. *Стулов В. П.* Сильный вдув на поверхности затупленного тела в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
10. *Стулов В. П.* Об уравнениях пограничного слоя в излучающем газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1, стр. 68.
11. *Casarella M. J., Choo Y.* Displacement effects of the laminar mixing of two parallel streams. Aeronaut. Quart., 1968, vol. 19, No. 4.
12. *Мурзинов И. Н., Шинкин Г. П.* Ламинарное смешение однородных потоков при наличии градиента давления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.