

УДК 532.526

## О СОПРОТИВЛЕНИИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ ПОЛИМЕРНОГО РАСТВОРА ПЕРЕМЕННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

В. А. ИОСЕЛЕВИЧ, В. Н. ПИЛИПЕНКО

(Москва)

Одним из способов снижения сопротивления трения тел, движущихся в воде, является выпуск воднорастворимых полимерных добавок в турбулентный пограничный слой на поверхности тела. Существующие полуэмпирические методы расчета, использующие сведения о влиянии длинных молекул на перестройку течения в пограничном слое, позволяют для слабых полимерных растворов постоянной концентрации достаточно надежно рассчитывать сопротивление гладких и шероховатых труб [1] и анализировать эффекты перераспределения местных касательных напряжений на поверхности плоских пластин [2].

Развитые к настоящему времени методы расчета сопротивления пластин пригодны и для прогноза снижения полимерными добавками турбулентного трения удлинённых тел. Представляет интерес обобщить эти методы на случай переменной концентрации. Ниже рассматривается задача о расчете турбулентного пограничного слоя на плоской пластине с инъекцией полимерного раствора вблизи ее передней кромки. Для ее решения используется упрощающее предположение о возможности замены действительного распределения концентрации полимерных добавок по нормали к поверхности пластины эффективным однородным распределением. Такое предположение позволяет оценить расход полимера, необходимый для получения заданного снижения сопротивления трения.

1. Рассмотрим ситуацию, возникающую при выпуске полимерного раствора в пограничный слой продольно обтекаемой пластины. Из результатов экспериментальных исследований диффузии нейтральных частиц [3] и активных полимерных добавок [4] в турбулентном пограничном слое известно, что непосредственно за участком выпуска располагается область переходного режима, в пределах которой происходит развитие диффузионного слоя, постепенно заполняющего весь динамический пограничный слой. Протяженность этой области зависит от возмущений, вносимых при подаче полимерного раствора, и характеристик течения в пограничном слое перед местом выпуска. За пределами переходной области формируется распределение концентрации  $c=c(x, y)$  с максимальным значением  $c_w(x)=c(x, 0)$  вблизи стенки, для которого справедлива формула

$$(1.1) \quad c_w(x) \delta(x) U = \alpha q / \rho_p g$$

Здесь  $x$  — координата, отсчитываемая вдоль пластины,  $y$  — расстояние от ее поверхности,  $q$  и  $\rho_p$  — удельный (на единицу ширины пластины) весовой расход и плотность полимерного вещества,  $U$  — скорость набегающего потока, а безразмерный параметр  $\alpha$  характеризует неоднородность распределения концентрации и продольной составляющей средней скорости в поперечном сечении пограничного слоя. Как следует из данных опытов [3, 4], величина  $\alpha$  меняется слабо ( $\alpha=2 \pm 0.2$ ).

Сформулируем основные предположения, используемые ниже в схеме расчета сопротивления трения.

1. Будем считать, что место подачи полимерного раствора находится в области ламинарного пограничного слоя. Предположим также, что вносимые при инъекции полимерного раствора возмущения приводят к турбулизации пограничного слоя.

2. Заменяем область переходного течения, в пределах которой развивается диффузионный слой, сечением пограничного слоя с продольной координатой, совпадающей с координатой места подачи полимерного раствора. Можно предположить, что подача раствора в пограничный слой не вызывает появления сосредоточенной продольной силы в месте выпуска. Тогда в сечении смены режимов течения справедливо условие непрерывности толщины потери импульса, т. е.

$$(1.2) \quad [\delta_2] |_{x=x_0} = 0, \quad \delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

где  $u$  — продольная составляющая средней скорости течения в пограничном слое,  $x_0$  — координата места подачи раствора.

3. Известно [1], что полимерные добавки наиболее существенно влияют на перестройку структуры течения в пристенной области пограничного слоя, толщина которой мала по сравнению с полной толщиной пограничного слоя. В этой узкой области градиент концентрации мал [3, 4]. В связи с этим фигурирующее в формуле (1.1) значение концентрации раствора у стенки  $c_w(x)$  можно рассматривать в качестве эффективной концентрации  $c(x)$  однородного раствора, при течении которого в данном сечении возникает то же местное сопротивление трения. Используя (1.1), будем считать, что  $\alpha=2$ .

4. Экспериментальные данные о течениях слабых полимерных растворов в трубах [5] свидетельствуют о том, что полимерные добавки не оказывают влияния на течение в ядре потока, т. е. не вызывают изменений в «дефекте скорости». Подобных сведений о влиянии полимерных добавок на внешнюю область пограничного слоя в настоящее время нет. По аналогии со случаем течения растворов в трубах предположим, что макромолекулы не меняют величины дефекта скорости в пограничном слое на пластине.

2. Для решения задачи используем интегральный подход, в котором вид поперечного профиля средней скорости предполагается известным. Будем считать, что этот профиль может быть описан выражением

$$(2.1) \quad u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + B + \frac{\Pi}{\kappa} W \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)$$

$$u^+ = \frac{u}{v_*}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \eta = \frac{v_* y}{\nu}, \quad \eta_0 = \frac{v_* \delta}{\nu}$$

Здесь  $\tau_w$  — касательное напряжение на стенке,  $\kappa$  — константа Кармана ( $\kappa=0.4$ ),  $\nu$  — кинематическая вязкость раствора,  $\rho$  — его плотность,  $\Pi$  — параметр Коулса ( $\Pi=0.55$ ),  $W$  — «функция следа». Для аппроксимации  $W$  удобно использовать формулу [6]

$$(2.2) \quad W(\eta / \eta_0) = 1 - \cos(\pi \eta / \eta_0)$$

Формула (2.1) не пригодна в непосредственной близости от стенки. Можно, однако, показать, что игнорирование этого обстоятельства не вносит существенных погрешностей в результаты расчетов сопротивления.

Влияние полимерных добавок проявляется в изменении величины параметра  $B$  в (2.1) по сравнению со случаем течения ньютоновской жидкости.

В работе [1] предложена полуэмпирическая теория турбулентности слабых полимерных растворов, учитывающая влияние макромолекул в выражении для длины пути смешения. Схематизация получаемого при использовании этой теории профиля скорости логарифмическим законом

позволяет получить следующую систему соотношений для определения параметра  $B$  при течении у гладкой стенки

$$(2.3) \quad B = \frac{7.5}{\beta^{1.15}} - 2.6, \quad \beta = \frac{1}{b\lambda^2 + \omega} + \beta_0$$

$$b = -\frac{k}{2(1-\beta_0)^2}, \quad \omega = \frac{1}{1-\beta_0} + b, \quad \lambda = \frac{v^*}{v^{**}}$$

$$\beta_0 = 1 - 0.44 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{cM^{0.85}}{1.8} \right), \quad k = \frac{1.5cM^{0.5}}{cM^{0.5} + 0.135}$$

в которой  $M$  — средний молекулярный вес растворенного полимера. Значение динамической скорости  $v^{**}$ , отвечающее началу воздействия макромолекул на пристенную турбулентность, характеризуется условием

$$(2.4) \quad v^{**}l/v = 0.04, \quad l = 1.9 \cdot 10^{-8} M^{0.5}$$

где  $l$  — характерный размер макромолекул в см. Первая формула в (2.3) отличается от предложенной в [1] величиной второго слагаемого в правой части. Указанное изменение обусловлено тем, что выражение в [1] было получено для логарифмического профиля средней скорости в предположении об отсутствии дефекта скорости. С учетом внешней области пограничного слоя течению чистого растворителя ( $\beta=1$ ) по (2.3) отвечает значение  $B=4.9$ .

Результаты расчетов по формулам (2.3) и (2.4) хорошо согласуются с экспериментальными данными для наиболее эффективных с точки зрения снижения сопротивления трения полимеров (полиэтиленоксиды, полиакриламиды и т. п.) [7, 8].

3. Для определения сопротивления трения плоской пластины в потоке слабого полимерного раствора переменной концентрации используем интегральное соотношение

$$(3.1) \quad d(\delta_2^+ v^+) / dr = 1 / v^+, \quad \delta_2^+ = \delta_2 v^* / v$$

$$v^+ = u^+(\eta_\delta) = U / v^*, \quad r = Ux / v$$

С учетом (2.1) и (2.2) для безразмерной толщины потери импульса  $\delta_2^+$  получим

$$(3.2) \quad \delta_2^+ = (G_1 / v^+ - G_2 / v^{+2}) \eta_\delta$$

$$G_1 = \kappa^{-1} (1 + \Pi), \quad G_2 = \kappa^{-2} (2 + \Pi / \pi + 3\Pi^2 / 2)$$

Безразмерная толщина пограничного слоя  $\eta_\delta$  определяется формулой

$$(3.3) \quad \eta_\delta = \exp[\kappa(v^+ - B^*)], \quad B^* = B + 2\Pi / \kappa$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1), получим

$$(3.4) \quad \exp[\kappa(v^+ - B^*)] \left\{ \left[ G_2 + \kappa(G_1 v^{+2} - G_2 v^+) \left( 1 - \frac{dB}{dv^+} \right) \right] \frac{dv^+}{dr} - \right.$$

$$\left. - \kappa(G_1 v^{+2} - G_2 v^+) \frac{dB}{dc} \frac{dc}{dr} \right\} = 1$$

Для замыкания системы уравнений (1.1) и (3.4) используем соотношение, которое следует из (2.1) при  $y = \delta$  ( $\eta = \eta_\delta$ )

$$(3.5) \quad v^+ = \kappa^{-1} \ln \eta_\delta + B + 2\Pi\kappa^{-1}$$

При численном решении задачи удобно использовать соотношения (1.1) и (3.5) в продифференцированном по  $r$  виде

$$(3.6) \quad c\eta_0 \frac{dv^+}{dr} + v^+c \frac{d\eta_0}{dr} + v^+\eta_0 \frac{dc}{dr} = 0$$

$$(3.7) \quad \left(1 - \frac{dB}{dv^+}\right) \frac{dv^+}{dr} - \frac{1}{\kappa\eta_0} \frac{d\eta_0}{dr} - \frac{dB}{dc} \frac{dc}{dr} = 0$$

Определяющая система состоит, таким образом, из трех дифференциальных уравнений ((3.4), (3.6) и (3.7)) для переменных  $v^+$ ,  $\eta_0$  и  $c$ . В соответствии с предположением 2 п. 1 и известным решением Блазиуса [9] для определения граничных условий системы при  $r=r_0=x_0U/\nu$  имеем соотношения

$$(3.8) \quad \begin{aligned} 0.664\sqrt{r_0} &= v_0^+\eta_{00}(G_1/v_0^+ - G_2/v_0^{+2}) \\ v_0^+ &= \kappa^{-1} \ln \eta_{00} + B_0 + 2\Pi\kappa^{-1}, \quad c_0\eta_{00}v_0^+ = \alpha q^+ \\ q^+ &= q/\rho_p g\nu, \quad \eta_{00} = \eta_0(r_0), \quad B_0 = B(c_0, v_0^+) \end{aligned}$$

Получаемое в результате интегрирования распределение  $v^+ = v^+(r)$  позволяет определить зависимость местного коэффициента трения  $c_f$  от безразмерной продольной координаты  $r$ .

$$(3.9) \quad c_f(r) = 2[v^+(r)]^{-2}$$

Коэффициент полного сопротивления трения пластины  $C_F$  находится из соотношения

$$(3.10) \quad C_F(R) = \frac{2\eta_0 v^+}{R} \left( \frac{G_1}{v^+} - \frac{G_2}{v^{+2}} \right), \quad R = \frac{UL}{\nu}$$

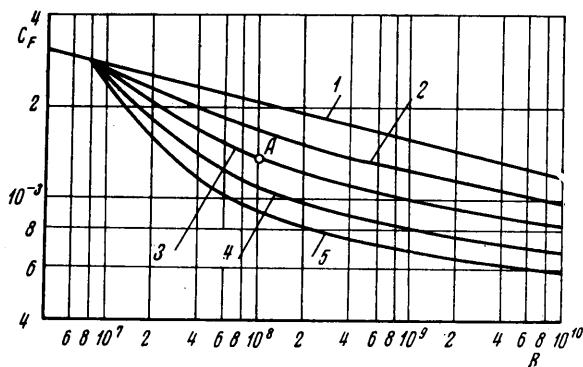
4. Приведем сначала результаты численного решения задачи о сопротивлении трения гладкой пластины в потоке однородного раствора полимера с учетом внешней области пограничного слоя ( $\Pi=0.55$ ). В этом случае уравнение (3.6) следует заменить условием  $c(x) = \text{const}$ .

На фиг. 1 показаны расчетные диаграммы полного коэффициента трения  $C_F(R)$  для пластины длиной  $L=800$  см, движущейся в растворе полиэтиленоксида WSR-301 ( $M=4 \cdot 10^6$ ) различной концентрации. Кривая 1 соответствует значению  $c=0$ , 2 —  $3.3 \cdot 10^{-6}$ , 3 —  $10^{-5}$ , 4 —  $3.3 \cdot 10^{-5}$  и 5 —  $10^{-4}$ . Сравнение полученных данных с результатами работы [2], в которой не учитывалась внешняя область пограничного слоя, показывает, что в широком диапазоне чисел Рейнольдса (от  $10^6$  до  $10^{10}$ ) влияние этой области проявляется в незначительном уменьшении величины  $C_F$  ( $\Delta C_F \sim 5\%$ ).

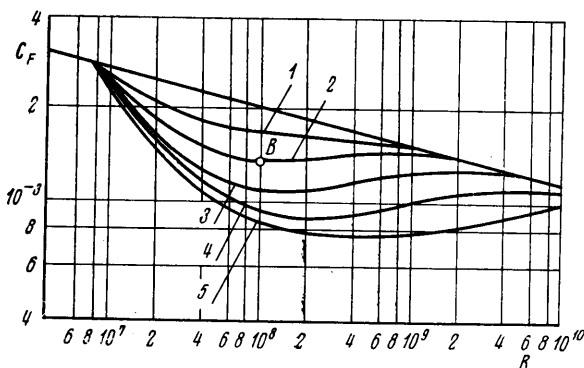
Рассмотрим теперь результаты решения задачи о выпуске раствора полиэтиленоксида WSR-301 вблизи передней кромки пластины ( $x_0/L = 10^{-4}$ ). На фиг. 2 приведены диаграммы сопротивления трения  $C_F(R)$  гладкой пластины длиной  $L=800$  см при различных величинах безразмерного расхода полимера  $Q^+ = 2q^+$ , отнесенного к двум сторонам пластины. Кривая 1 соответствует значению  $Q^+ = 1$ , 2 — 3.3, 3 — 10, 4 — 33 и 5 — 100. Эти диаграммы свидетельствуют о том, что при фиксированном весовом расходе полимера, подаваемого в пограничный слой у носовой кромки пластины, существует конечный диапазон чисел Рейнольдса  $R$ , в котором имеет место снижение турбулентного трения. Ширина этого диапазона тем больше, чем больше удельный расход полимера.

Появление эффекта снижения полного сопротивления трения пластины в потоке раствора переменной концентрации обусловлено теми же при-

чинами, что и в однородном растворе. С ростом числа Рейнольдса эффект вначале растет, а затем постепенно снижается. Снижение эффекта, а затем и полное его исчезновение связано с тем, что при увеличении числа Рейнольдса соответственно растет и скорость движения пластины  $U$ , тогда как толщина пограничного слоя уменьшается. Однако уменьшение  $\delta$  про-



Фиг. 1



Фиг. 2

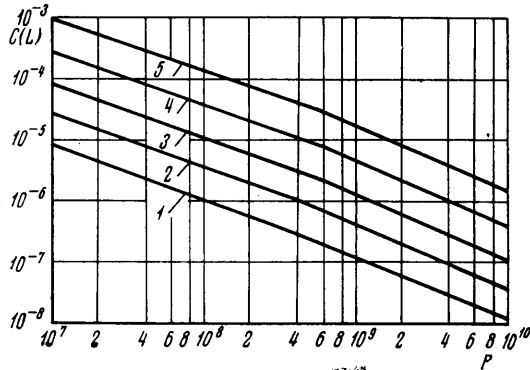
исходит значительно медленнее. В связи с этим произведение  $U\delta$  увеличивается, а концентрация полимерного раствора в любом сечении пограничного слоя падает. Снижение концентрации в свою очередь приводит к уменьшению воздействия полимерных молекул на турбулентное трение. На фиг. 3 показана зависимость эффективной концентрации  $c(L)$  на кормовой кромке пластины от числа Рейнольдса при различных значениях безразмерного расхода сухого полимерного вещества  $Q^+$ . Обозначения на фиг. 3 соответствуют тем же значениям  $Q^+$ , что и на фиг. 2.

Для оценки эффективности выпуска полимерных молекул в пограничный слой у носовой кромки пластины проведем сопоставление со случаем движения пластины в однородном растворе. В последнем случае количество расходуемого в единицу времени полимерного вещества, которое необходимо для поддержания заданного сопротивления, можно приближенно оценить по формуле

$$(4.1) \quad Q_1 = 2q_1 = 2c\rho_p g \int_0^{\delta(L)} u \, dy = 2c\delta(L) U \rho_p g$$

$$q_1^+ = q_1 / \rho_p g v = c\delta(L) U / v.$$

При этом предполагается, что за снижение турбулентного трения ответственны все макромолекулы, находящиеся в пределах пограничного слоя на пластине (они покидают пограничный слой, проходя через кормовое поперечное сечение). В оценочной формуле (4.1) произведена замена интеграла по толщине кормового сечения пограничного слоя близкой ему



Фиг. 3

величиной  $\delta(L)U$ . При определении толщины пограничного слоя  $\delta(L)$  пренебрежем сравнительно малым влиянием полимерных молекул на полную толщину, а не на толщину пристенной области, пограничного слоя и предположим, следуя [9], что  $\delta(L)/L=0.37R^{-0.2}$ . Тогда согласно (4.1) будем иметь

$$(4.2) \quad q_1^+ = 0.37 cR^{0.8}$$

В качестве примера оценим эффективность выпуска полимерных добавок применительно к пластине длиной  $L=800$  см для снижения ее полного сопротивления на 34% при  $R=10^8$ . На диаграмме сопротивления пластины в однородном растворе такой величине эффекта отвечает значение концентрации  $c=10^{-5}$  (точка А на фиг. 1). Безразмерный расход полимерного вещества  $q_1^+$ , вычисленный по формуле (4.2), при этом равен 9.3. Той же величине снижения турбулентного трения при выпуске полимера у носовой кромки (точка В на фиг. 2) соответствует значение  $q^+=Q^+/2=1.65$ , которое приблизительно в шесть раз ниже величины  $q_1^+$ .

Авторы благодарны Л. И. Седову и С. С. Григоряну за полезное обсуждение результатов.

Поступила 13 VI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А. О построении полуэмпирической теории турбулентности слабых растворов полимеров. Изв. АН СССР, МЖТ, 1970, № 2.
2. Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А. Полимерные добавки в пограничном слое плоской пластины. Тр. Ин-та механ. МГУ, 1973, вып. 30.
3. Poreh M., Cermak J. E. Study of diffusion from a line source in a turbulent boundary layer. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1964, vol. 7, No 10, pp. 1083-1095.
4. Fabula A. G., Burns T. J. Dilution in a turbulent boundary layer with polymeric friction reductions. TP 171, Naval Undersea Research and Development Center, Pasadena, Calif., 1970.
5. Rudd M. J. Velocity measurements made with a laser dopplermeter on the turbulent pipe flow of dilute polymer solution. J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, No. 4.
6. Хинце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М., Физматгиз, 1963.
7. Иванюга Ю. Ф., Чекалова Л. А. Экспериментальное исследование турбулентного течения слабых растворов полимеров в трубах различного диаметра. Инж.-физ. ж., 1971, т. 21, № 1.
8. Никитин И. К., Позняя Н. Г., Дзевалтовский А. В. Профиль скоростей и сопротивление трения в турбулентном пристеночном течении разбавленных полимерных растворов. Гидромеханика, Респ. межв. сб., 1971, вып. 19.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.