

УДК 532.517.4+532.5 : 532.135

МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО СЛОЯ В ПРИСТЕНОЧНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЖИДКОСТИ С РЕЛАКСИРУЮЩИМ НАПРЯЖЕНИЕМ

В. А. ГОРОДЦОВ, А. И. ЛЕОНОВ

(Москва)

1. Особенности пристеночного течения. Для пристеночной турбулентности характерно, что всегда имеется вблизи стенки область неразвитой турбулентности, играющая ведущую роль в формировании всей турбулентности. Воздействие на эту область факторов типа шероховатости, отсоса, полимерных добавок, частиц и т. п. приводит к значительным изменениям интегральных характеристик турбулентности и гидродинамического сопротивления.

Согласно наблюдениям [1-3] течение около стенки имеет полосатую структуру; отдельные полосы разрушаются и создаются с устойчивой средней частотой [2-6]. Периодически распадающиеся полосы дают главный вклад в производство пульсационной энергии всей турбулентности.

Основной становится задача об автоколебаниях течения жидкости вблизи стенки, осложненных случайным характером турбулентности. В согласии с наблюдениями [1-6] можно говорить о «быстрой» нелинейной стадии разрушения и разгона плавного течения у стенки и стадии «медленного» развития слоистого течения в результате вязкого торможения жидкости о стенку. Можно использовать модельное описание, предложенное в [4, 7], считая существование автоколебаний известным и ограничиваясь длительной линейной частью колебательного цикла.

В работах [4, 7] было дано линейное описание роста вязкого подслоя с помощью уравнения диффузии и отсутствовало описание быстрой нелинейной стадии его разрушения, период колебаний считался заданным и оценивался сравнением предсказаний с экспериментом. Трехмерным строением вязкого подслоя и его стохастическими чертами пренебрегалось.

В настоящей работе эта линейная одномерная модель дополнена кинематическими условиями гладкого сшивания скоростей и напряжений вязкого подслоя и внешней турбулентности. При этом период вязкого подслоя определяется.

В рассматриваемой модели можно оценить влияние дополнительных линейных гидродинамических процессов на турбулентность. В частности, из-за неустановившегося характера динамического слоя большое влияние на него оказывают релаксационные временные процессы, такие как релаксация напряжений в упруговязкой жидкости.

2. Задача о торможении упруговязкой жидкости вблизи бесконечной пластины. Линейные уравнения одномерного движения в жидкости с релаксирующим напряжением (модель Максвелла) имеют вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \theta \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \nu \frac{\partial u}{\partial z}$$

Здесь ν — вязкость, θ — время релаксации, t — время, z — расстояние от стенки, $u(z, t)$, $\sigma(z, t)$ — скорость и напряжение сдвига. Жидкость считается несжимаемой и все величины, содержащие размерность массы, разделены на плотность.

Согласно [4, 7] в начальный момент скорость жидкости постоянна и равна U . В это время вся пристеночная область занята «турбулентной» жидкостью, а толщина динамического подслоя равна нулю. В случае уравнений (2.1) необходимо задать еще начальное напряжение Σ , которое также будем считать постоянным. Задача о росте подслоя формулируется теперь как задача о «заплывании» начального скачка скорости.

Используя v и θ , перейдем к безразмерным переменным

$$(2.2) \quad t=2\theta t^\circ, z=2(v\theta)^{1/2}z^\circ, u=(v/\theta)^{1/2}u^\circ \\ \sigma=(v/\theta)\sigma^\circ, U=(v/\theta)^{1/2}U^\circ, \Sigma=(v/\theta)\Sigma^\circ$$

В дальнейшем значки градуса для простоты будут опущены.

Систему уравнений (2.1) вместе с начальными и граничными условиями можно записать следующим образом:

$$(2.3) \quad \partial u / \partial t = \partial \sigma / \partial z, \partial \sigma / \partial t + 2\sigma = \partial u / \partial z$$

$$(2.4) \quad u(z, 0) = U, \sigma(z, 0) = \Sigma, u(0, t) = 0, |u(\infty, t)| < \infty$$

Исключая σ , получим, что u (так же, как σ) должно удовлетворять уравнению

$$(2.5) \quad \partial^2 u / \partial t^2 + 2\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial z^2$$

Запишем решение задачи (2.3), (2.4) в следующем виде:

$$(2.6) \quad u(z, t) = U + U \frac{\partial \varphi}{\partial z} \eta(t-z)$$

$$(2.7) \quad \sigma(z, t) = \Sigma e^{-2t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial t} \eta(t-z)$$

Здесь η — единичная функция Хевисайда, отличная от нуля лишь при $t \geq z$. Поскольку в большинстве случаев $t > z$, то эта функция далее опускается. Функция $\varphi(z, t)$ определяется в виде интеграла от функции Бесселя мнимой переменной

$$(2.8) \quad \varphi(z, t) = \int_z^t I_0(\sqrt{x^2 - z^2}) e^{-x} dx$$

Функция $\varphi(z, t)$, хотя не выражается через элементарные и обычные специальные функции, обладает рядом свойств, делающих ее удобной в обращении (см. приложение).

Решение задачи (2.3), (2.4) описывает лишь стадию роста динамического слоя, которая согласно рассматриваемой модели должна сменяться через время T его мгновенным разрушением и восстановлением начального состояния. Формально это можно учесть, используя на интервале $[0, T]$ вместо (2.3) уравнения

$$(2.9) \quad \partial u / \partial t = \partial \sigma / \partial z + \{\delta(t-T) - \delta(t-T+0)\} u$$

$$(2.10) \quad \partial \sigma / \partial t = -2\sigma + \partial u / \partial z + \{\delta(t-T) - \delta(t-T+0)\} \sigma$$

а при интегрировании нужно учитывать скачки в точке $t=T$. Чтобы описать поведение динамического слоя в любой момент времени, полученное решение необходимо периодически продолжить.

3. Средние характеристики динамического слоя. Чтобы найти средние величины, достаточно осреднить $f(z, t)$ по времени одного цикла

$$(3.1) \quad \langle f(z) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(z, t) dt$$

и аналогично для среднеквадратичных отклонений от средних

$$\langle f'^2(z) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f'^2(z, t) dt - \langle f(z) \rangle^2$$

Используя свойства $\varphi(z, t)$, получим ($\rho = (T^2 - z^2)^{1/2}$)

$$(3.2) \quad \frac{\langle u(z) \rangle}{U} = 1 + \frac{\partial \varphi(z, T)}{\partial z} + \frac{z}{T} \{ \varphi(z, T) + e^{-T} I_0(\rho) \}$$

$$(3.3) \quad \langle \sigma(z) \rangle = \frac{U}{T} \varphi(z, T) + \frac{\Sigma}{2T} (1 - e^{-2T})$$

Для $\langle u \rangle$ можно записать также

$$(3.4) \quad \frac{\langle u(z) \rangle}{U} = 1 + \frac{z^2 + T}{zT} \varphi(z, T) + \frac{\rho e^{-T}}{zT} \{ \rho I_0(\rho) - T I_1(\rho) \}$$

Осредняя уравнение (2.10), получим

$$(3.5) \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle u(z) \rangle = \frac{\sigma(z, T) - \Sigma}{T} + 2 \langle \sigma(z) \rangle$$

из которого на основании (2.7) и (3.3) следует:

$$(3.6) \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle u(z) \rangle = \frac{U}{T} \{ 2\varphi(z, T) + e^{-T} I_0(\rho) \}$$

Если же осреднить уравнение (2.9), то получим

$$(3.7) \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle \sigma(z) \rangle = - \frac{U - u(z, T)}{T}$$

Интегрируя (3.7) по z , приходим к соотношению (u_* — динамическая скорость)

$$(3.8) \quad \langle \sigma(z) \rangle + \frac{1}{T} \int_0^z \{ U - u(\xi, T) \} d\xi = \langle \sigma(0) \rangle = u_*^2$$

которое имеет простой смысл. При турбулентном течении возле твердой стенки в «слое постоянного напряжения» [8] сумма среднего реологического напряжения и напряжения Рейнольдса остается постоянной и равной $\langle \sigma(0) \rangle = u_*^2$. Отсюда следует, что интегральный член в (3.8) представляет собой напряжение Рейнольдса, которое полностью обязано процессу разрушения («взрыва») динамического слоя.

Если в (3.8) устремить z к ∞ , то получим

$$(3.9) \quad \langle \sigma(0) \rangle = \frac{U}{T} \delta_T + \frac{\Sigma}{2T} (1 - e^{-2T}), \quad \delta_T = \int_0^\infty \left[1 - \frac{u(z, t)}{U} \right] dz$$

где δ_T — толщина вытеснения. В рассматриваемой модели имеем

$$(3.10) \quad \delta_t = \varphi(0, t) = t e^{-t} [I_0(t) + I_1(t)]$$

Отметим, что (3.8) отличается от аналогичной формулы для вязкой жидкости [4] наличием слагаемого, пропорционального начальному напряжению Σ .

Подставляя (3.10) в (3.9), получим¹

$$(3.11) \quad u_*^2 = U e^{-T} \{ I_0(T) + I_1(T) \} + (\Sigma/2T) (1 - e^{-2T})$$

¹ Эта формула, а также формулы, аналогичные (2.6), (2.7), получены в работе [9] в предположении, что $\Sigma = 0$.

Эта формула следует также из (3.3) при $z=0$. Предполагая, что время релаксации напряжений гораздо меньше периода колебаний динамического слоя, т. е. $T \gg 1$ (выполняется в жидкости с малой упругостью), и используя формулы для асимптотических разложений функций Бесселя, соотношения (3.10), (3.11) можно записать в виде¹

$$(3.12) \quad \delta_T \approx \sqrt{(2T/\pi)} (1 - 1/8T - 3/64T^2 + \dots)$$

$$(3.13) \quad u_*^2 \approx UV \sqrt{(2/\pi T)} (1 - 1/8T + 3/64T^2 + \dots) + \Sigma/2T.$$

В предельном случае вязкой жидкости ($\theta=0$) эти формулы для размерных величин будут выглядеть следующим образом [4]:

$$(3.14) \quad \delta_T = 2\sqrt{\nu T/\pi}, \quad u_*^2 = 2U\sqrt{\nu/\pi T}$$

Осреднение квадратичных величин приводит к формулам

$$(3.15) \quad \langle u'^2 \rangle = -(\langle u(z) \rangle - U)^2 + \frac{U^2}{T} \int_z^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dt$$

$$(3.16) \quad \langle \sigma'^2 \rangle = \frac{\Sigma^2}{4T} (1 - e^{-4T}) - \langle \sigma(z) \rangle^2 + \frac{U^2}{T} \int_z^T \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\Sigma}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-2t} \right] dt$$

где $\langle \sigma'^2 \rangle$ — диссипация пульсационной энергии в рассматриваемой модели жидкости; при $z=0$ (3.16) упрощается

$$(3.17) \quad \langle \sigma'^2(0) \rangle = \frac{\Sigma^2}{4T} (1 - e^{-4T}) - \langle \sigma(0) \rangle^2 + \frac{U^2}{T} \int_0^T I_0^2(x) e^{-2x} dx + \\ + \frac{2U\Sigma}{T} \int_0^T I_0(x) e^{-3x} dx$$

В предположении, что $T \gg 1$, правую часть формулы (3.17) можно представить в асимптотической форме

$$(3.18) \quad \langle \sigma'^2(0) \rangle \approx \frac{U^2}{2\pi T} \left\{ \ln(16\gamma T) - 4 + \frac{\pi\sqrt{2}\Sigma}{U} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi T}} \right) \right\} + \dots$$

Выражая U^2/T через u_*^4 с помощью (3.13) и удерживая лишь максимальный член, получим

$$(3.19) \quad \langle \sigma'^2(0) \rangle \approx \frac{1}{4} u_*^4 \ln(16\gamma T) + \dots$$

При приближении к стенке диссипация пульсационного движения, размерная величина которой отличается от этого выражения множителем ν/θ^2 , в предельном случае вязкой жидкости становится неограниченно большой [4]. В вязкой жидкости

$$(3.20) \quad \langle \sigma(z) \rangle / u_*^2 = e^{-\xi^2} - \sqrt{\pi} \xi \operatorname{Erf}(\xi), \quad \xi = z/2\sqrt{\nu T} \\ \langle \sigma \rangle^2 + \langle \sigma'^2 \rangle = -u_*^4/4\operatorname{Ei}(-2\xi^2)$$

Таким образом, можно говорить об уменьшении диссипативности пульсаций в упруговязкой жидкости по сравнению с вязкой жидкостью очень близко к твердой стенке.

¹ Формулы, аналогичные (3.12), (3.13), были получены в работе [10] в предположении, что $\Sigma=0$.

Чтобы проанализировать изменение диссипации при удалении от стенки, рассмотрим уравнения баланса энергии в динамическом слое. Используя (2.9), (2.10), нетрудно получить

$$(3.21) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle u^2 \rangle + \langle \sigma^2 \rangle}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \langle \sigma u \rangle - 2 \langle \sigma^2 \rangle + \\ + \{U^2 - u^2(z, T)\} / T + \{\Sigma^2 - \sigma^2(z, T)\} / T$$

Это показывает, что баланс полной средней энергии колебаний слоя поддерживается перетоком энергии $\langle \sigma u \rangle$, диссипацией $2 \langle \sigma^2 \rangle$ и порождением кинетической $\{U^2 - u^2(z, T)\} / T$ и упругой $\{\Sigma^2 - \sigma^2(z, T)\} / T$ энергии на стадии разрушения плавного течения. Аналогично

$$(3.22) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\langle u'^2 \rangle + \langle \sigma'^2 \rangle}{2} \right\} = -2 \langle \sigma'^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle \sigma u' \rangle + \\ + [U - u(z, T)] \frac{U + u(z, T) - \langle u \rangle}{T} + [\Sigma - \sigma(z, T)] \frac{\Sigma + \sigma(z, T) - \langle \sigma \rangle}{T}$$

диссипация пульсаций уравнивается перетоком энергии и ее порождением при разрушении динамического слоя.

Пульсации скорости в направлении течения в переходной области динамического слоя, как будет видно (см. п. 6), увеличиваются с ростом упругости жидкости. Поэтому, а также из-за диссипации упругой энергии пульсаций, рождаемой при взрывах (см. (3.22)), полная диссипация энергии при удалении от стенки становится больше, чем в вязкой жидкости с такой же вязкостью. Наконец, следует отметить, что в диссипацию «далеко» от стенки вносят вклад и пульсации внешней турбулентности, периодически вторгающейся в эту область (см. п. 4).

4. Связь характеристик динамического слоя и внешней турбулентности. Согласно рассматриваемой модели течение около стенки разбивается на две области. В непосредственной близости к стенке, в области динамического слоя, течение описывается линейризованными гидродинамическими уравнениями. Во внешней области с развитым турбулентным течением характеристики среднего течения и турбулентных пульсаций считаются известными. Граница между этими областями совершает периодические колебания с периодом T , причем уменьшение толщины динамического слоя считается происходящим мгновенно и полностью до самой стенки.

Определим границу динамического слоя, как плоскость $z = z_2$, на которой средние скорости слоя и внешней турбулентности равны по величине и стыкуются гладко. В развитой турбулентности в области постоянного напряжения распределение средней скорости не зависит от молекулярных характеристик среды и описывается двухконстантной зависимостью [8]

$$(4.1) \quad Au_* \ln z_+ + Bu_*, \quad A \approx 2.44$$

причем постоянная Кармана $\kappa = A^{-1} \approx 0.41$ не зависит от особенностей течения в области динамического слоя. В дальнейшем при описании вязкой жидкости используется

$$(4.2) \quad B_0 \approx 5.74$$

что вместе с $\kappa = 0.41$ хорошо описывает кривые сопротивления [8]. В случае упруговязкой жидкости изменяется величина B . Поскольку $z^+ = 2u_* z$, то условия сопряжения на границе z_2 примут вид

$$(4.3) \quad \langle u(z_2) \rangle / u_* = A \ln(2u_* z_2) + B$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle u(z) \rangle |_{z_2} = \frac{Au_*}{z_2}$$

Другая характерная точка z_1 , расстояние до которой от стенки часто называют толщиной вязкого подслоя [8], — это точка пересечения профиля (4.1) и линейного профиля скорости, в ближайшей окрестности стенки

$$(4.5) \quad \frac{z_1}{u_*} \frac{\partial}{\partial z} \langle u(z) \rangle |_{z=0} = A \ln(2u_* z_1) + B$$

В точке z_1 величина напряжения Рейнольдса приблизительно равна реологическому напряжению $\langle \sigma(z_1) \rangle$ и, поскольку в области постоянного напряжения их сумма равна напряжению на стенке u_*^2 , имеем

$$(4.6) \quad \langle \sigma(z_1) \rangle = \alpha u_*^2, \quad \alpha \approx 1/2$$

С помощью (3.4), (3.5), (3.7) условия (4.3)–(4.6) можно переписать в виде системы уравнений

$$1 + \frac{z_2^2 + T}{z_2 T} \varphi(z_2, T) + \frac{\rho_2}{z_2 T} e^{-T} \{ \rho_2 I_0(\rho_2) - T I_1(\rho_2) \} = \\ = \frac{u_*}{U} \{ A \ln(2u_* z_2) + B \}$$

$$2\varphi(z_2, T) / T + e^{-T} I_0(\rho_2) / T = Au_* / (U z_2)$$

$$(z_1/T) \{ 2\varphi(0, T) + e^{-T} I_0(T) \} = (u_* / U) \{ A \ln(2u_* z_1) + B \}$$

$$(4.7) \quad \varphi(z_1, T) = u_*^2 / (2U) \{ 2\alpha T - \beta(1 - e^{-2T}) \}$$

где $\rho_2 = (T^2 - z_2^2)^{1/2}$, а β определяет уровень начального напряжения

$$(4.8) \quad \Sigma = \beta u_*^2$$

Во внешней области в слое постоянного напряжения сдвиговые напряжения Рейнольдса равны u_*^2 . Перед началом роста динамического слоя турбулизованная жидкость заполняет все пространство вплоть до стенки. Поэтому будем предполагать $\beta = 1$.

Считая константы A , α и β известными, можно из (3.11), (4.7), (4.8) при заданной величине u_*^2 определить z_1 , z_2 , U , T и B . Удобно заданным считать параметр T . Уравнения упрощаются при $T \gg \max\{1, z_1^{1/3}\}$, что имеет место в жидкости с малой упругостью. Если искать величины из системы (4.7) в виде асимптотических разложений по $1/T$, то получим

$$z_1 / \sqrt{2T} = a_0 + a_1 / T + \dots, \quad z_2 / \sqrt{2T} = b_0 + b_1 / T + \dots$$

$$\frac{1}{u_* \sqrt{2T}} = c_0 + \frac{c_1}{T} + \dots, \quad \frac{U}{u_*} = u_* \sqrt{\frac{\pi T}{2}} \left(1 - \frac{3}{8T} + \dots \right)$$

$$B = u_* \sqrt{2T} \left(2a_0 + \frac{2a_1 - a_0/2}{T} + \dots \right) - A \ln \left\{ 2u_* \left(a_0 + \frac{a_1}{T} + \dots \right) \right\}$$

Переходу к вязкой жидкости ($\theta \rightarrow 0$) соответствует оставление членов, не содержащих при себе множителя $1/T$. При $\alpha \approx 0.508$ (4.2) имеем

$$(4.10) \quad a_0 \approx 0.343, \quad b_0 \approx 1.100, \quad c_0 \approx 0.058 \\ a_1 \approx 0.192, \quad b_1 \approx 0.436, \quad c_1 \approx -0.130$$

Асимптотические формулы для распределений средней скорости и напряжения сдвига имеют вид

$$\begin{aligned} \langle u^+ \rangle &= \frac{\langle u(z) \rangle}{u_*} \approx u_* \sqrt{\frac{\pi T}{2}} \left(1 - \frac{3}{8T}\right) \left[1 - \left(1 + \frac{z^2}{T}\right) \operatorname{Erf} \left(\frac{z}{\sqrt{2T}} \right) \right] + \\ &+ u_* z \left(1 - \frac{1}{8T}\right) \exp \left(-\frac{z^2}{2T} \right) \\ \langle \sigma^+ \rangle &= \frac{\langle \sigma(z) \rangle}{u_*^2} \approx \frac{1}{2T} + \left(1 - \frac{1}{2T} + \frac{z^2}{8T^2}\right) \exp \left(-\frac{z^2}{2T} \right) - \\ &- z \sqrt{\frac{\pi}{2T}} \left(1 - \frac{3}{8T}\right) \operatorname{Erf} \left(\frac{z}{\sqrt{2T}} \right) \end{aligned}$$

Интегрируя распределение скорости (4.11) по сечению трубы до $z=z_2$, а при $z>z_2$ распределение (4.1), можно найти зависимость коэффициента сопротивления $\lambda=\lambda(r, T)$ от числа Рейнольдса $\operatorname{Re}=\operatorname{Re}(r, T)$. Здесь r — безразмерный радиус трубы, λ и Re связаны со среднерасходовой скоростью q формулами $\lambda=8(u_*/q)^2$, $\operatorname{Re}=4qr$.

Асимптотические выражения для величин, определенных соотношениями (3.15), (3.16), ввиду их громоздкости здесь не приведены, но используются в п. 5.

Формула (3.15) описывает пульсации продольной скорости за счет колебаний профиля скорости. Однако кроме этих пульсаций в области динамического слоя имеются пульсации всех трех компонент скорости, обусловленные периодическому внедрению в эту область внешней турбулентности. Граница с внешней турбулентной областью $z_*(t)$ за время от 0 до T продвигается от стенки до плоскости $z=z_*(T)$. Поэтому в фиксированной точке $z<z_*(T)$ в течение некоторого времени t_z , определяемого из уравнения $z_*(t_z)=z$, имеются пульсации внешней турбулентности, а за время $T-t_z$, когда движущаяся граница динамического слоя «оттесняет» развитую турбулентность за точку z , они затухают. Поскольку низкочастотные колебания динамического слоя и высокочастотные пульсации внешней турбулентности считаются независимыми, средние квадраты пульсаций (3.15) и рассматриваемых высокочастотных пульсаций будут складываться.

При $t_z \geq t > 0$ пульсации в точке z имеют порядок пульсаций внешней турбулентности $u_{i\infty}'$, заполняющей область $z>z_*(T)$. В течение остального времени ($t_z < t < T$) пульсации затухают

$$u_i'(t, z) \approx u_{i\infty}' f(t-t_z)$$

Затухание предполагается одинаковым для всех компонент.

Проводя осреднение по высокочастотным пульсациям внешней турбулентности (что обозначено чертой сверху), получим

$$(4.12) \quad \overline{u_i' u_j'}(t, z) \approx \begin{cases} \overline{u_{i\infty}' u_{j\infty}'}, & 0 < t < t_z \\ \overline{u_{i\infty}' u_{j\infty}' f^2(t-t_z)}, & t_z < t < T \end{cases}$$

Тогда для полных средних имеем

$$(4.13) \quad \langle \overline{u_i' u_j'}(z) \rangle \approx \left\{ \frac{t_z}{T} + \frac{1}{T} \int_{T-t_z}^T f^2(t-t_z) dt \right\} \overline{u_{i\infty}' u_{j\infty}'}$$

и, в частности,

$$(4.14) \quad \overline{\langle u_i'^2(z) \rangle} / \overline{\langle u_1' u_3'(z) \rangle} = \overline{u_{i\infty}'^2} / \overline{u_{1\infty}' u_{3\infty}'} \quad (i=1, 2, 3)$$

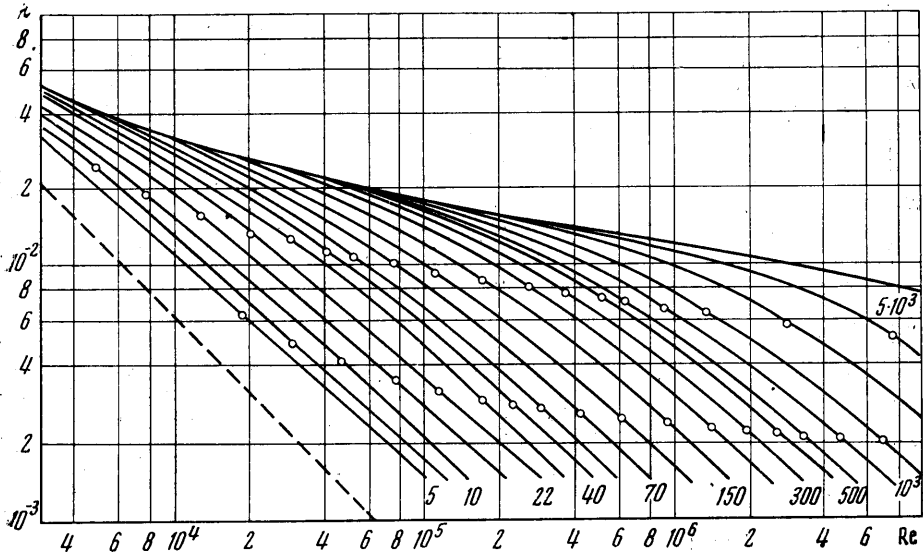
Отношения в правых частях этих формул, характеризующие внешнюю развитую турбулентность, не зависят от свойств жидкости и по результатам измерений в вязкой жидкости равны

$$(4.15) \quad (\overline{u_{i\infty}'^2})^{1/2} = \lambda_i u_*, \quad \lambda_1 = 2.3, \lambda_2 = 1.7, \lambda_3 = 0.9$$

С другой стороны, в слое постоянного напряжения сдвиговые напряжения Рейнольдса — $\overline{\langle u_1' u_3'(z) \rangle}$ просто связаны со средним реологическим напряжением, так что имеем

$$(4.16) \quad \overline{\langle u_1' u_3'(z) \rangle} / u_*^2 \approx -(1 - \langle \sigma_+(z) \rangle), \quad \overline{\langle u_i'^2(z) \rangle} / u_*^2 \approx \lambda_i^2 (1 - \langle \sigma_+(z) \rangle)$$

Чтобы найти распределение продольных пульсаций $v_1'^2$, как уже говорилось, нужно к выражению $\overline{\langle u_1'^2(z) \rangle}$ из (4.16) добавить слагаемые из формулы (3.15).



Фиг. 1

5. Результаты вычислений. Результаты вычислений по асимптотическим формулам изображены в виде графиков на фиг. 1—5.

На фиг. 1 приведены кривые сопротивления $\lambda = \lambda(Re)$ при значениях радиуса круглой трубы $r = 5, 7, 10, 15, 22, 30, 40, 50, 70, 100, 150, 220, 300, 400, 500, 700, 1000, 2000$ и 5000 . Кроме перечисленных нанесена кривая сопротивления турбулентного трения вязкой жидкости, соответствующая предельному случаю $r \rightarrow \infty$, а пунктиром — $\lambda = 64/Re$.

Из этих графиков видно, что имеет место снижение сопротивления турбулентного трения в жидкости с релаксирующим напряжением по сравнению с сопротивлением вязкой жидкости с таким же коэффициентом вязкости. При этом эффект снижения носит приблизительно критический характер и увеличивается с ростом упругости жидкости (уменьшением параметра r).

Каждую кривую сопротивления с фиксированным r на фиг. 1 можно условно разделить на три части: участок кривой («малые» Re), совпадаю-

щий с кривой сопротивления вязкой жидкости, переходный участок с пониженным сопротивлением и часть кривой, близкой к асимптотической зависимости $2cr / Re$, где $c \approx 7 \div 10$.

Из фиг. 1 видно, что можно говорить о существовании критического числа Рейнольдса начала эффекта снижения сопротивления Re^c , которое растет с ростом r .

Если рассмотреть зависимости λ от u_* , то можно убедиться, что существует $u_*^c \approx 1.5 \pm 0.5$ или напряжение на стенке $\tau^c = (u_*^c)^2$, при превышении которого имеет место эффект снижения сопротивления.

Из факта существования u_*^c вытекает: $Re^c / r = a^c \ln r + b^c$.

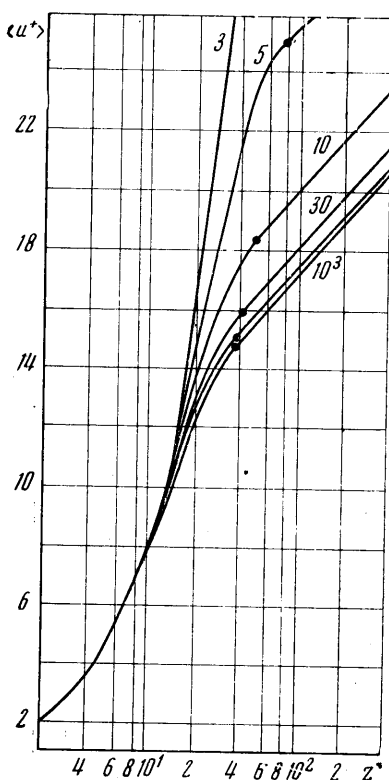
На фиг. 2 показаны распределения средней скорости в динамическом слое, спитые в жирных точках с логарифмическим профилем скорости внешней турбулентности. Различные кривые отвечают различным $T=3, 5, 10, 30, 10^2$ и 10^3 , т. е. различной упругости жидкости. Кривая с $T=10^3$ близка профилю скоростей вязкой жидкости с константой $B_0 \approx 5.74$. Изменение постоянной B с изменением упругости жидкости, как следует из проведенных расчетов, начинается при $u_* \approx 1-2$, а при $u_* > 5$ зависимость $B(u_*)$ быстро выходит на асимптоту $1.57 u_*$.

Из фиг. 2 видно, что распределение скорости в непосредственной близости к стенке является линейным и не зависящим от упругости жидкости, а все изменения происходят в переходной области динамического слоя, толщина которого быстро растет с ростом упругости.

Период колебаний динамического слоя $T^+ = 2u_*^2 T$ сильно увеличивается, как это видно из фиг. 3, с ростом числа Рейнольдса, начиная с некоторого Re , зависящего от радиуса трубы (на фигуре сплошными линиями нанесены кривые для круглой трубы с $r=30, 10^2, 3 \cdot 10^2, 10^3$ и $5 \cdot 10^3$).

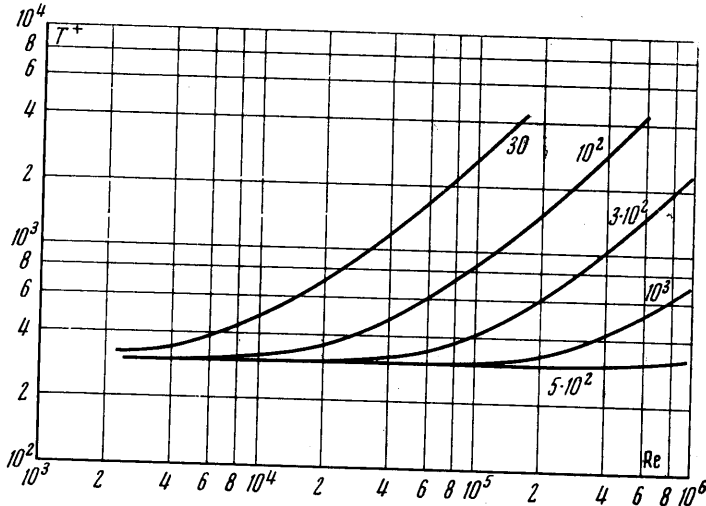
Графики фиг. 4, соответствующие различной упругости жидкости, показывают, что обезразмеренные на u_* среднеквадратичные продольные пульсации скорости v_1^+ сильно увеличиваются с ростом упругости жидкости (уменьшением T). При этом максимум продольных пульсаций с увеличением упругости жидкости сдвигается в область больших расстояний от стенки. Для напряжений Рейнольдса и поперечных пульсаций скорости в слое имеет место противоположный эффект: уменьшение их с ростом упругости, как это видно из фиг. 5, на которой приведены для $-\langle u_1' u_3' \rangle / u_*^2$ при $T=10^3, 10, 5$ и 3 . Уменьшение поперечных пульсаций описывается соотношением (4.16).

6. Снижение сопротивления турбулентного трения полимерными добавками. Сравнение с результатами предлагаемой теории. Для турбулентного течения полимерных растворов в трубах характерно существование критического числа Рейнольдса начала эффекта снижения сопротивления, кото-

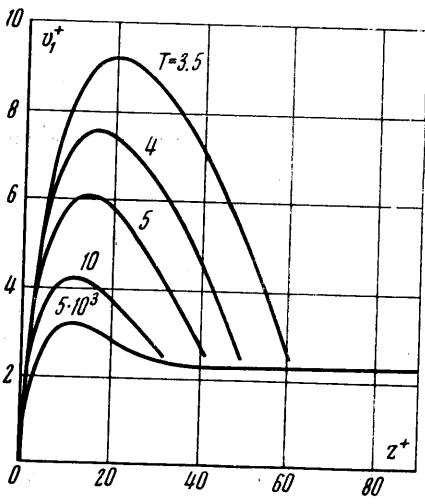


Фиг. 2

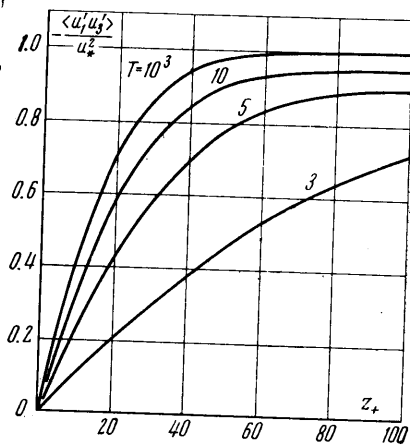
рое приблизительно линейно увеличивается с ростом диаметра трубы. Началу эффекта для данного раствора соответствует критическое напряжение на стенке, почти не зависящее от диаметра трубы и концентрации полимера.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Снижение сопротивления сопровождается увеличением толщины вязкого подслоя и переходной (буферной) зоны, увеличением продольных пульсаций скорости и снижением поперечных пульсаций скорости и напряжения Рейнольдса.

Рассматриваемая теория для жидкости с релаксацией напряжений предсказывает такого рода эффекты в соответствии с экспериментальными данными для растворов не слишком малых концентраций (см., например, [11, 12]).

Подчеркнем, что согласно использованной модели динамический слой колеблется с хорошо определенным периодом T^+ , который должен сильно

увеличиваться с ростом упругой жидкости. Представляет интерес экспериментально исследовать это увеличение, а также связанное с ним увеличение перемежаемости поперечных пульсаций скорости в динамическом слое в полимерных растворах.

Авторы благодарны Г. И. Баренблатту за постоянное внимание и поддержку, сотрудникам лаборатории механики аномальных жидкостей за многочисленные обсуждения, П. М. Гусейнову и Л. И. Шаргевич за помощь в вычислениях, Г. Г. Степанову, Л. А. Князевой и Т. В. Смирновой за помощь в оформлении работы.

Приложение [13]. Функция $\varphi(z, t)$ удовлетворяет телеграфному уравнению

$$(П.1) \quad \partial^2 \varphi / \partial t^2 + 2\partial \varphi / \partial t = \partial^2 \varphi / \partial z^2$$

и имеет следующие свойства:

$$(П.2) \quad \varphi(z, z) = 0, \quad \varphi(0, t) = te^{-t} \{I_0(t) + I_1(t)\}$$

$$(П.3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(z, t) = e^{-t} I_0(r)$$

$$(П.4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = e^{-t} \left\{ \frac{t}{r} I_1(r) - I_0(r) \right\}$$

$$(П.5) \quad z \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, t) = \varphi(z, t) - e^{-t} \{tI_0(r) + rI_1(r)\}$$

$$(П.6) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(z, t) = e^{-t} \left\{ \frac{t}{r} I_1(r) + I_0(r) \right\}$$

Здесь и далее $r = (t^2 - z^2)^{1/2}$.

Через $\varphi(z, t)$, функции Бесселя и элементарные функции выражаются интегралы вида

$$(П.7) \quad \varphi_{nm}(z, t) = \int_z^t \frac{I_n(\sqrt{x^2 - z^2})}{(x^2 - z^2)^{n/2}} e^{-x} x^m dx$$

При малых n, m имеем формулы

$$(П.8) \quad z^2 \varphi_{10} + \varphi = e^{-t} \{tI_0(r) + rI_1(r)\} - ze^{-z}$$

$$(П.9) \quad 3\varphi_{01} + z^2 \varphi = re^{-t} \{rI_0(r) + (1+t)I_1(r)\}$$

$$(П.10) \quad \varphi_{11} - \varphi = e^{-t} I_0(r) - e^{-z}$$

Интегрируя (П.6) по z при условии $(\partial \varphi / \partial z)|_{z=0} = -1$ и используя (П.5), получим

$$(П.11) \quad \partial \varphi / \partial z = -1 + e^{-t} \{\psi_0(z, t) + t\psi_1(z, t)\}$$

$$(П.12) \quad \varphi = -z + e^{-t} \{tI_0(r) + rI_1(r)\} + ze^{-t} (\psi_0 + t\psi_1)$$

$$(П.13) \quad \psi_0(z, t) = \int_0^z I_0(\sqrt{t^2 - x^2}) dx, \quad \psi_1(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(z, t)$$

К этим функциям сводятся интегралы типа

$$(П.14) \quad \varphi_{nm}(z, t) = \int_0^z \frac{I_n(\sqrt{t^2 - x^2})}{(\sqrt{t^2 - x^2})^n} x^m dx$$

Через функции φ, ψ_0 и ψ_1 выражаются интегралы от $\varphi(z, t)$ по обоим аргументам. Нетрудно установить интегрированием по частям

$$\begin{aligned}
 \text{(П.15)} \quad & (n+1) \int_z^t \varphi(z, y) y^n dy = t^{n+1} \varphi(z, t) - \varphi_{0, n+1}(z, t) \\
 & (n+2) \int_0^z \varphi(x, t) x^n dx = z^{n+1} \varphi(z, t) + \\
 & + e^{-t} \{ t^2 \psi_{1n}(z, t) + t \psi_{0n}(z, t) - \psi_{1, n+2}(z, t) \}
 \end{aligned}$$

При больших значениях t , ($t \gg 1$; $t \gg z^{1/3}$), используя асимптотические разложения функций Бесселя, с точностью до членов двух порядков по $1/t$ получим

$$\text{(П.16)} \quad e^{-t} \psi_0(z, t) \approx \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\xi) + \frac{\xi(2\xi^2+1)}{8t\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) + \dots$$

$$\text{(П.17)} \quad te^{-t} \psi_1(z, t) \approx \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\xi) + \frac{\xi(2\xi^2-3)}{8t\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) + \dots, \quad \xi = z/\sqrt{2t}$$

$$\text{(П.18)} \quad \operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp(-x^2) dx = 1 - \operatorname{Erf}(\xi)$$

При этом

$$\text{(П.19)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \approx -\operatorname{Erf}(\xi) + \frac{\xi(2\xi^2-1)}{4\sqrt{\pi}t} \exp(-\xi^2) + \dots$$

$$\text{(П.20)} \quad \frac{\varphi}{\sqrt{2\pi t}} \approx \left(1 - \frac{1+2\xi^2}{8t} \right) \exp(-\xi^2) - \sqrt{\pi} \xi \operatorname{Erf}(\xi) + \dots$$

Для асимптотического вычисления величин из (3.15), (3.16) необходимо найти асимптотические разложения интегралов

$$\text{(П.21)} \quad \varphi^{(3)}(z, t) = \int_z^t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z, x) e^{-2x} dx = \int_z^t I_0(\sqrt{x^2-z^2}) e^{-3x} dx$$

$$\text{(П.22)} \quad \Phi(z, t) = \int_z^t \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z, x) \right]^2 dx = \int_z^t I_0^2(\sqrt{x^2-z^2}) e^{-2x} dx$$

а также интеграла

$$\begin{aligned}
 \text{(П.23)} \quad & \int_z^t \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, x) \right]^2 dx = \varphi^2 + t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + 2ze^{-t} I_0(r) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \\
 & - te^{-2t} I_0^2(r) + \left(1 - 2z \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi(z, t) - 4 \int_z^t I_0^2(\sqrt{x^2-z^2}) x e^{-2x} dx
 \end{aligned}$$

Введем более общие функции

$$\text{(П.24)} \quad \varphi^{(\lambda)}(z, t) = \int_z^t I_0(\sqrt{x^2-z^2}) e^{-\lambda x} dx$$

$$\Phi^{(\lambda)}(z, t) = \int_z^t I_0^2(\sqrt{x^2-z^2}) e^{-\lambda x} dx, \quad \Phi_{01}^{(\lambda)} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi^{(\lambda)}(z, t)$$

с некоторым параметром λ . При этом нетрудно показать

$$(П.25) \quad \partial \Phi_{01}^{(\lambda)} / \partial z = -ze^{-\lambda} I_0^2(r) - \lambda z \Phi^{(\lambda)}(z, t)$$

Рассмотрим общий метод вычисления асимптотических разложений интегралов рассматриваемого типа на примере $\Phi(z, t)$. При $\text{Reel } \lambda > 2$ имеем

$$(П.26) \quad \Phi^{(\lambda)}(z, t) = \chi^{(\lambda)}(z, z) - \chi^{(\lambda)}(z, t), \quad \chi^{(\lambda)}(z, y) = \int_y^{\infty} I_0^2(\sqrt{x^2 - z^2}) e^{-\lambda x} dx$$

Функция $\chi^{(\lambda)}(z, z)$ есть преобразование Лапласа от $I_0^2(r)\eta(x-z)$. Используя известную формулу

$$I_0^2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} I_0(2x \sin \alpha) d\alpha$$

можно $\chi^{(\lambda)}(z, z)$ представить в виде

$$(П.27) \quad \chi^{(\lambda)}(z, z) = \frac{2}{\pi \lambda} K\left(\frac{2}{\lambda}\right) + g_\lambda(z), \quad K\left(\frac{2}{\lambda}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - (4/\lambda^2) \sin^2 \alpha}}$$

$$g_\lambda(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \exp(-z \sqrt{\lambda^2 - 4 \sin^2 \alpha})}{\sqrt{\lambda^2 - 4 \sin^2 \alpha}} d\alpha$$

Здесь $K(2/\lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, имеющий в окрестности $\lambda=2$ асимптотическое разложение

$$(П.28) \quad \frac{2}{\pi \lambda} K\left(\frac{2}{\lambda}\right) \approx \frac{2}{\pi \lambda} \ln\left(\frac{4\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}\right) - \frac{\lambda^2 - 4}{2\pi \lambda^3} \ln\left(\frac{4\lambda}{e \sqrt{\lambda^2 - 4}}\right) + \dots$$

Функция $g_\lambda(z)$ — регулярная функция λ , и существует предел $g_2(z)$ при $\lambda \rightarrow 2$, равный

$$(П.29) \quad g_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \exp(-2z \cos \alpha)}{\cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1 - e^{-2zx}}{x \sqrt{1-x^2}} dx$$

Для функции $g_2(z)$ имеет место формула

$$(П.30) \quad g_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{(n+1) \Gamma^2(1+n/2)}$$

При $z \gg 1$

$$(П.31) \quad \pi g_2(z) \approx \ln(4\gamma z) - 1/8z^2 - 3/64z^4 + \dots$$

Далее для $\chi^{(\lambda)}(z, t)$ в (П.26) асимптотическое разложение при $t \gg 1$, $z \approx t^{1/2}$ с точностью до членов порядка $1/t$ включительно имеет вид ($m = \sqrt{\lambda - 2}$)

$$(П.32) \quad \pi \chi^{(\lambda)}(z, t) \approx K_0(2mz) + \frac{m(1-m^2z^2)}{4z} K_1(2mz) -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{1/z} \left(1 + \frac{1}{4zx} - \frac{z}{4x^3}\right) \exp(-m^2zx - z/x) \frac{dx}{x}$$

Здесь $K_0(x)$ и $K_1(x)$ — функции Макдональда.

При малых m ($\lambda \rightarrow 2$), используя асимптотические представления для функций Макдональда, получим

$$(П.33) \quad \pi \chi^{(2+m^2)}(z, t) \approx -\ln(m\gamma z) + \frac{1-e^{-z^2/t}}{8z^2} + \\ + \frac{z^2}{8t^2} e^{-z^2/t} + \frac{1}{2} \text{Ei} \left(-\frac{z^2}{t} \right) - \Delta(mz), \quad \Delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Подставляя (П.27) и (П.32) в (П.26) при $\lambda \rightarrow 2$ с учетом (П.28) и (П.33), будем иметь при $t \gg 1$, $z \approx \sqrt{t}$

$$(П.34) \quad \Phi(z, t) \approx \frac{1}{\pi} \ln(4\gamma z) - g_2(z) - \frac{1}{2\pi} \text{Ei}(-z^2/t) - \\ - \frac{1}{8\pi z^2} (1-e^{-z^2/t}) - \frac{z^2}{8\pi t^2} e^{-z^2/t}$$

Нетрудно получить из (П.34)

$$(П.35) \quad \Phi(0, t) \approx \frac{1}{2\pi} \ln(16\gamma t) - \frac{1}{8\pi t} \quad (t \gg 1)$$

Аналогичные вычисления при $t \gg 1$, $z \approx \sqrt{t}$ приводят к формулам

$$(П.36) \quad \varphi^{(3)}(z, t) \approx (1/\sqrt{8}) e^{-z/\sqrt{8}}$$

$$(П.37) \quad \Phi_{01}(z, t) \approx G_2(z) + [(4z^2-1)/8\pi] \text{Ei}(-z^2/t) + (1/8\pi)(4t + \\ + 1 - z^2/t) e^{-z^2/t} + (1/4\pi) \{2z^2 - (4z^2-1) \ln(4\gamma z) - 3/2\}.$$

$$(П.38) \quad G_2(z) = 2 \int_0^{\infty} x g_2(x) dx = (z^2 - 1/4) g_2 + (z/4) g_2' - (z^2/4) g_2'' - z^2/2\pi$$

Функция $G_2(z)$ при малых и больших z имеет разложения

$$(П.39) \quad G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+3}}{(n+1)(n+3)\Gamma(1+n/2)}$$

$$G_2(z) \approx \frac{1}{z \gg 1} \frac{1}{8\pi} \{2(4z^2-1) \ln(4\gamma z) - 4z^2 + 3\} + \frac{C}{z^2} + \dots$$

Из (П.37) с учетом (П.38) и (П.39) получим

$$(П.40) \quad \Phi_{01}(0, t) \approx (4t + \ln(16\gamma t) - 2)/8\pi$$

Для последнего интеграла в (П.23) нетрудно получить

$$(П.41) \quad -2z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \approx 2z g_2'(z) - \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{4z^2} \right) (1 - e^{-z^2/t}) + \frac{e^{-z^2/t}}{4\pi t} \left(1 + \frac{z^2}{t} - \frac{z^4}{t^2} \right)$$

В заключение отметим, что использованный здесь метод пригоден для вычисления асимптотических выражений указанного вида для интегралов типа

$$\int_z^t I_n^2(\sqrt{x^2-z^2}) (\sqrt{x^2-z^2})^m e^{-\lambda x} dx$$

Поступила 12 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Kline S. J., Runstadler P. W. Some preliminary results of visual studies of the flow model of the wall layers of the turbulent boundary layer. Trans. ASME, Ser. E, 1959, vol. 26, No. 2, pp. 166-170.
2. Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W. The structure of turbulent boundary layers. J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, No. 4, pp. 741-773. (Рус.)

- перев.: Структура турбулентных пограничных слоев. Механика, 1969, № 4, стр. 41-78.)
3. *Corino E. R., Brodkey R. S.* A visual investigation of the wall region in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 37, No. 1, pp. 1-30. (Рус. перев.: Визуальное исследование пристеночной области в турбулентном течении. Механика, 1971, № 1, стр. 56-82.)
 4. *Einstein H. A., Li H.* The viscous sublayer along a smooth boundary. *J. Engng Mech. Dir. Amer. Soc. Civ. Engrs*, 1956, vol. 82, No. 2, pp. 1-27.
 5. *Meek R. L., Baer A. D.* The periodic viscous sublayer in turbulent flow. *A.I.Ch.E. Journal*, 1970, vol. 16, No. 5, pp. 841-848.
 6. *Laufer J., Narayanan M.* Mean period of the turbulent production mechanism in a boundary layer. *Phys. Fluids*, 1971, vol. 14, No. 1, pp. 182-183.
 7. *Hanratty T. J.* Turbulent exchange of mass and momentum with a boundary. *A.I.Ch.E. Journal*, 1956, vol. 2, No. 3, pp. 359-362.
 8. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
 9. *Ruckenstein E.* On the mechanism of drag reduction in turbulent flow of viscoelastic liquids. *Chem. Engng Sci.*, 1971, vol. 26, No. 7, pp. 1075-1079.
 10. *Meek R. L., Baer A. D.* The periodic viscous sublayer model and heat transfer to drag reducing solutions. *A.I.Ch.E. Journal*, 1970, vol. 16, No. 6, pp. 1100-1102.
 11. *Van Driest E. R.* Turbulent drag reduction of polymeric solutions. *J. Hydronautics*, 1970, vol. 4, No. 3. AIAA paper, 1970, No. 70-56, pp. 1-36.
 12. *Хабазпашева Е. М., Перепелица Б. В.* Об особенностях пристеночной турбулентности в потоках воды с высокомолекулярными добавками. *Инж.-физ. ж.* 1970, т. 18, № 6, стр. 1094-1097.
 13. *Городцов В. А., Леонов А. И.* Модель динамического слоя в пристеночной турбулентности жидкости с релаксирующим напряжением. Препринт № 10 ИПМ АН СССР, 1972.