

УДК 532.517.4

РАЗВИТИЕ РЕШЕТОЧНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПОТОКЕ С ПОСТОЯННЫМ ГРАДИЕНТОМ СКОРОСТИ

А. А. ПАВЕЛЬЕВ

(Москва)

На основе уравнений для напряжений Рейнольдса и уравнения для масштаба турбулентности проанализировано развитие решеточной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости. Константы в уравнениях определяются из предположения, что вдали от решетки при больших числах Рейнольдса структура турбулентности стремится к предельному состоянию с постоянными значениями коэффициента корреляции, степени анизотропии и безразмерного градиента скорости. Константы в членах с вязкостью определены из рассмотрения течения за решеткой без градиента скорости на конечном этапе вырождения турбулентности. Полученные уравнения решены на ЭВМ. Соответствие расчета и имеющихся экспериментальных данных удовлетворительное.

Для расчета течений с переменным градиентом скорости предлагается вместо уравнения масштаба использовать полученное в данной работе уравнение для частоты турбулентных пульсаций.

Расчеты на ЭВМ выполнены С. И. Бекрицкой.

1. При создании методов расчета течений в пограничном слое, трубе, слое смешения и других турбулентных течений со сдвигом используются модельные представления о воздействии градиента скорости на структуру турбулентности. Однако из-за неоднородности течений, вызванной влиянием границ, воздействие на структуру турбулентности градиента скорости обычно трудно выделить. Исследование однородной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости позволяет исключить влияние границ, что значительно упрощает теоретический анализ.

В последние годы появилось несколько работ, в которых изучалось развитие решеточной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости [1-2]. В этих работах при помощи термоанемометра измерялись такие характеристики турбулентности, как интенсивности пульсаций по трем осям, напряжение Рейнольдса и масштабы турбулентности. Эти экспериментальные данные показывают, что структура турбулентности в потоке с градиентом скорости вдали от решетки стремится к предельному состоянию, а масштаб турбулентности, начальная величина которого определяется размером ячейки решетки, возрастает.

В [4, 5] получены данные о развитии начальных мелкомасштабных возмущений в потоке с градиентом скорости при смешении струй и показано, что влияние этих возмущений на переход к турбулентности и на смешение на начальном участке может быть очень значительным.

2. Из уравнения Навье - Стокса можно получить уравнения для $\langle u_i u_j \rangle$

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 U_k \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 \langle u_k u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 \langle u_k u_i \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \left\langle p' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \\
 & + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\nu \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k u_i u_j \rangle + \left\langle (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \frac{p'}{\rho} \right\rangle \right] + \\
 & + 2\nu \sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle = 0
 \end{aligned}$$

Здесь U_i — компоненты средней скорости, u_i — компоненты пульсационной скорости, p' — пульсация давления, ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность, δ_{ij} — символ Кронекера, $\langle \rangle$ — осредненные величины.

Будем считать, что

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \partial \langle u_i u_j \rangle / \partial t = 0, \quad U_1 \neq 0, \quad U_2 = U_3 = 0, \quad \partial U_1 / \partial x_2 = \text{const} \\ \partial U_1 / \partial x_1 = \partial U_1 / \partial x_3 = 0, \quad \rho = \text{const} \\ \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_h} \left[-\nu \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_h} + \langle u_h u_i u_j \rangle + \left\langle (\delta_{jh} u_i + \delta_{ih} u_j) \frac{p'}{\rho} \right\rangle \right] = 0 \end{aligned}$$

С учетом (2.2) уравнение (2.1) принимает вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} U_1 \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_1} = -\langle u_2 u_j \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \langle u_2 u_i \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \\ + \frac{1}{\rho} \left\langle p' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle - 2\nu \sum_{h=1}^3 \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} \right\rangle \end{aligned}$$

Из (2.3) можно получить уравнение для энергии турбулентности

$$\begin{aligned} E = \frac{\langle u_1^2 \rangle + \langle u_2^2 \rangle + \langle u_3^2 \rangle}{2}, \quad U_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} = -\langle u_2 u_1 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \\ - \nu \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left\langle \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right)^2 \right\rangle \end{aligned}$$

В [6] предложены выражения для отдельных членов (2.3). Для члена описывающего диссипацию, предложена интерполяционная формула

$$S_{ij} = \nu \sum_{h=1}^3 \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_h} \right) \right\rangle = \frac{c}{3} \frac{E^{3/2}}{L} \delta_{ij} + \frac{\nu}{2} c_1 \left\langle \frac{u_i u_j}{L^2} \right\rangle$$

Если учесть, что энергосодержащие вихри в потоке с градиентом скорости неизотропны, то для диссипативного члена можно написать

$$(2.4) \quad S_{ij} = \nu \sum_{h=1}^3 \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_h} \right) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle u_i u_j \rangle}{L^2} (c_1 \nu + c E^{1/2} L)$$

В дальнейшем для диссипативного члена будет использоваться выражение (2.4).

Член

$$K_{ij} = 1/\rho \langle p' (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \rangle$$

в (2.3) описывает обмен энергией между компонентами пульсации скорости вдоль различных осей, и поэтому в уравнении для E отсутствует. В [6] показано, что величина K_{ij} является суммой двух членов, один из которых зависит от профиля средней скорости, а другой — только от характеристик турбулентности. Поэтому аппроксимирующее выражение для K_{ij} в [6] предлагается также разбить на две части. Для течения с постоянным градиентом скорости в работе [6] на основе решений для изотропной турбулентности предлагаются следующие выражения для обменного члена K_{ij} :

$$(2.5) \quad \frac{1}{\rho} \left\langle p' \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\rangle = -(\alpha + \beta) \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\gamma}{2} \frac{E^{3/2}}{L} \left(\langle u_1^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left\langle p' \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right\rangle &= \alpha \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\gamma}{2} \frac{E^{1/2}}{L} \left(\langle u_2^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) \\ \frac{1}{\rho} \left\langle p' \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\rangle &= \beta \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\gamma}{2} \frac{E^{1/2}}{L} \left(\langle u_3^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) \\ \frac{1}{\rho} \left\langle p' \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right\rangle &= (0.6 \langle u_2^2 \rangle - 0.2 \langle u_1^2 \rangle + 0.2 \langle u_3^2 \rangle) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \\ &- \gamma \frac{E^{1/2}}{L} \langle u_1 u_2 \rangle \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений для $\langle u_1^2 \rangle$, $\langle u_2^2 \rangle$, $\langle u_3^2 \rangle$ и $\langle u_1 u_2 \rangle$ имеет вид

$$(2.6) \quad U_1 \frac{\partial \langle u_1 u_2 \rangle}{\partial x_1} = -0.2 [\langle u_2^2 \rangle + 2(E - \langle u_3^2 \rangle)] \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \\ - \gamma \frac{E^{1/2}}{L} \langle u_1 u_2 \rangle - c_1 \nu \frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{L^2}$$

$$(2.7) \quad U_1 \frac{\partial \langle u_1^2 \rangle}{\partial x_1} = -2 \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - 2(\alpha + \beta) \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \\ - \gamma \frac{E^{1/2}}{L} \left(\langle u_1^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) - c \frac{\langle u_3^2 \rangle E^{1/2}}{L} - c_1 \nu \frac{\langle u_1^2 \rangle}{L^2}$$

$$(2.8) \quad U_1 \frac{\partial \langle u_2^2 \rangle}{\partial x_1} = 2\alpha \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \gamma \frac{E^{1/2}}{L} \left(\langle u_2^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) - \\ - c \frac{\langle u_2^2 \rangle E^{1/2}}{L} - c_1 \nu \frac{\langle u_2^2 \rangle}{L^2}$$

$$(2.9) \quad U_1 \frac{\partial \langle u_3^2 \rangle}{\partial x_1} = 2\beta \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \gamma \frac{E^{1/2}}{L} \left(\langle u_3^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) - \\ - c \frac{\langle u_3^2 \rangle E^{1/2}}{L} - c_1 \nu \frac{\langle u_3^2 \rangle}{L^2}$$

Одно из уравнений (2.9)–(2.11) может быть заменено уравнением для энергии турбулентности

$$(2.10) \quad U_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} = -\langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - c \frac{E^{3/2}}{L} - \nu c_1 \frac{E}{L^2}$$

В дальнейшем будут использоваться уравнения (2.6), (2.8), (2.9), (2.10), которые представляют собой замкнутую систему, если дополнительно определить масштаб турбулентности L и значение констант c , c_1 , γ , α , и β .

Отметим, что в (2.6) содержатся две константы, значения которых были получены в [6].

В уравнение для энергии турбулентности входят величины $-\langle u_1 u_2 \rangle$ и L .

Для получения замкнутой системы уравнений можно получить выражение для $-\langle u_1 u_2 \rangle$, используя предположение, что в данной точке потока величина $-\langle u_1 u_2 \rangle$ зависит от E , L , $\partial U_1 / \partial x_2$ и ν . Из анализа размерностей

$$(2.11) \quad -\langle u_1 u_2 \rangle / E = \phi(E^{-1/2} L \partial U_1 / \partial x_2, E^{1/2} L / \nu)$$

Разлагая (2.11) в ряд Тейлора по степеням $z = E^{-1/2} L \partial U_1 / \partial x_2$ при неизменном $Re^0 = E^{1/2} L / \nu$ и ограничиваясь первыми двумя членами разложе-

ния, получим

$$(2.12) \quad -\langle u_1 u_2 \rangle = \psi(0, \text{Re}^\circ) E + \psi'(0, \text{Re}^\circ) E^{-1/2} L \partial U_1 / \partial x_2 + \dots$$

Так как при нулевом градиенте скорости $\langle u_1 u_2 \rangle = 0$, то $\psi(0, \text{Re}^\circ) = 0$.

Тогда

$$-\langle u_1 u_2 \rangle = \psi'(0, \text{Re}^\circ) E^{-1/2} L \partial U_1 / \partial x_2$$

что аналогично известной формуле

$$(2.13) \quad -\langle u_1 u_2 \rangle = \psi'(0, \text{Re}^\circ) E^{1/2} L \partial U_1 / \partial x_2$$

При больших Re° величина $\psi'(0, \text{Re}^\circ) = c_5$, по-видимому, может считаться постоянной величиной. Отметим, что если положить $\psi'(0, \text{Re}^\circ) = 0$ и взять следующий член разложения (2.12), то получим также известное выражение для $-\langle u_1 u_2 \rangle$

$$-\langle u_1 u_2 \rangle = c_5' L^2 (\partial U_1 / \partial x_2)^2$$

Не исключено, что при больших значениях $z = E^{-1/2} L \partial U_1 / \partial x_2$, которые могут наблюдаться при течениях с малыми числами Рейнольдса, необходимо учитывать оба члена в разложении (2.12).

Так как нет оснований считать $\psi'(0, \text{Re}^\circ) = 0$, то в дальнейшем будет использоваться выражение (2.13).

Таким образом, второй вариант замкнутой системы уравнений включает в себя уравнение (2.10), соотношение (2.13) и некоторое соотношение для масштаба турбулентности. В этом случае необходимо также определить константы c , c_1 и c_5 .

3. Если предположить, что изменение масштаба турбулентности в данной точке определяется величинами E , L , $\partial U_1 / \partial x_2$ и ν , то можно написать

$$U_1 \partial L / \partial x_1 = f(E, \nu, \partial U_1 / \partial x_2, L)$$

Как и прежде, характеристики турбулентности предполагаются постоянными вдоль оси x_2 . Включение в число величин, определяющих изменение масштаба, только E , L , $\partial U_1 / \partial x_2$ и ν предполагает, что другие характеристики турбулентности определяются этими четырьмя величинами.

Предположим далее, что

$$f(E, \nu, \partial U_1 / \partial x_2, L) = f_1(E, L) + f_2(\nu, L) + f_3(\partial U_1 / \partial x_2, L)$$

Это предположение означает, что изменения масштаба турбулентности из-за воздействия вязкости, энергии турбулентности и градиента средней скорости независимы.

Тогда из анализа размерностей следует:

$$(3.1) \quad U_1 \partial L / \partial x_1 = c_2 E^{1/2} + c_3 \nu L^{-1} + c_4 L \partial U_1 / \partial x_2$$

При течении за решеткой без градиента скорости на начальном участке при больших числах Рейнольдса в правой части уравнения (3.1) сохраняется только первый член и оно совпадает с известным уравнением для масштаба турбулентности в этом случае.

При течении за решеткой без градиента скорости на конечном участке вырождения, где числа Рейнольдса турбулентности малы, в (3.1) сохраняется только второй член и для изменения масштаба по длине получается хорошо известная формула, которая получена и теоретически, и экспериментально. Третий член в (3.1) описывает изменение масштаба турбулентности при деформации поля турбулентных пульсаций постоянным градиентом скорости.

Таким образом, (3.1) вместе с (2.6), (2.8)–(2.10) образуют замкнутую систему уравнений, содержащую константы c , c_1 , γ , α , β , c_2 , c_3 , c_4 , ко-

торые должны быть дополнительно определены. Второй вариант замкнутой системы уравнений включает в себя уравнения (2.10), (2.13) и (3.1) с экспериментальными константами c_5 , c , c_1 , c_2 , c_3 и c_4 . В этом случае c_5 является функцией числа Рейнольдса турбулентности и z . Если задача решается для достаточно больших чисел Re° , то членами с вязкостью можно пренебречь и необходимо определить шесть констант в случае системы (2.6), (2.8)–(2.10) и (3.1) или четыре в случае системы (2.10), (2.13) и (3.1).

В [7] рассматривался другой подход к получению уравнения для масштаба турбулентности, развитый применительно к пограничному слою в [8].

Используя (2.10) и (3.1), можно получить уравнение для изменения по длине величины $\omega = E^{1/2}/L$, которая представляет собой частоту турбулентных пульсаций или интенсивность турбулентных вихрей

$$(3.2) \quad U_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = -c\omega^2 - \left(c_4 + \frac{1}{2} \frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{E} \right) \omega \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - 0.7c_1 v \frac{\omega^3}{E}$$

При течении с постоянным градиентом скорости можно использовать (3.2) вместо (3.1). Однако использование (3.2) в неоднородных потоках позволяет более обоснованно написать выражение для диффузионного члена.

Уравнение для ω рассматривалось в работе [9], где впервые было предложено использовать при анализе турбулентных течений уравнение баланса энергии турбулентности.

4. Значения констант в уравнениях зависят от выбора характерного масштаба турбулентности. В качестве такого масштаба возьмем поперечный интегральный масштаб турбулентности

$$L = \int_0^\infty \frac{\langle u_1(x_1, x_2, x_3) u_1(x_1, x_2 + r, x_3) \rangle}{(\langle u_1^2(x_1, x_2, x_3) \rangle)^{1/2} (\langle u_1^2(x_1, x_2 + r, x_3) \rangle)^{1/2}} dr$$

При нулевом градиенте скорости и большом числе Рейнольдса турбулентности система уравнений приводится к виду

$$(4.1) \quad U_1 \partial E / \partial x_1 = c E^{3/2} / L, \quad U_1 \partial L / \partial x_1 = c_2 E^{1/2}$$

В [10, 11] отмечается, что на начальном участке вырождения при больших числах Рейнольдса $E \sim (x_1 - x_1^0)^{-1}$. Тогда из (4.1) $c_2 = c/2$.

При малых числах Рейнольдса в потоках с нулевым градиентом скорости изменение энергии и масштаба турбулентности описывается уравнениями

$$(4.2) \quad U_1 \partial E / \partial x_1 = -v c_1 E / L^2, \quad U_1 \partial L / \partial x_1 = c_3 v L^{-1}$$

В [12] показано, что на конечном этапе вырождения решеточной турбулентности $E \sim (x_1 - x_1^0)^{-5/2}$.

Отсюда и из (4.2) следует, что $c_3 = 0.2c_1$.

В [12] показано, что для решеточной турбулентности на конечном этапе вырождения $c_1 = 5/4\pi$.

Согласно экспериментальным данным по вырождению турбулентности за решеткой, приведенным в [11, 12], константа c может быть принята равной 0.4.

Таким образом, из экспериментальных данных для решеточной турбулентности на начальном и конечном этапах вырождения получены сле-

дующие значения констант:

$$c=0.4, c_2=0.2, c_1=3.927, c_3=0.785$$

Для замыкания системы уравнений необходимо определить величины еще четырех констант (γ , α , β и c_4). Предположим, что при развитии решеточной турбулентности при больших числах Рейнольдса в потоке с постоянным градиентом скорости вдали от решетки устанавливается такая структура турбулентности, при которой величины

$$c^*=E^{1/2} \left(L \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^{-1}, \quad c^{**} = -\frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{E}, \quad c_* = \frac{\langle u_2^2 \rangle}{E}, \quad c_{**} = \frac{\langle u_3^2 \rangle}{E}$$

постоянны и не зависят от расстояния. Так как система уравнений (2.6), (2.8)–(2.10) и (3.1) должна описывать это состояние турбулентности, то, беря производные по x_1 и приравнявая их нулю, можно с помощью (2.8), (2.10)–(2.12) и (3.1) получить четыре соотношения между величинами констант γ , α , β , c_4 и c^* , c^{**} , c_* , c_{**} . Получим для иллюстрации одно из этих соотношений

$$(4.3) \quad U_1 \frac{\partial \langle u_1 u_2 \rangle / E}{\partial x_1} = U_1 \left(-\frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{E^2} \right) \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{1}{E} U_1 \frac{\partial \langle u_1 u_2 \rangle}{\partial x_1} = 0$$

Подставляя в (4.3) вместо $U_1 \partial E / \partial x_1$ и $U_1 \partial \langle u_1 u_2 \rangle / \partial x_1$ правые части уравнений (2.10) и (2.6) и полагая $U_1 \partial \langle u_1 u_2 \rangle E^{-1} / \partial x_1 = 0$, получим

$$\left(\frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{E} \right)^2 + (c - \gamma) E^{1/2} \left(L \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{E} - 0.2 \left[\frac{\langle u_2^2 \rangle}{E} + 2 \left(1 - \frac{\langle u_3^2 \rangle}{E} \right) \right] = 0$$

Отсюда получаем

$$(4.4) \quad c^{**2} - (c - \gamma) c^* c^{**} - 0.2 [c_* + 2(1 - c_{**})] = 0$$

Аналогично получаются и три других соотношения

$$(4.5) \quad 2\alpha + \gamma c^* (c_*^{-2/3}) c^{** -1} + c_* = 0$$

$$(4.6) \quad 2\beta + \gamma c^* (c_{**}^{-2/3}) c^{** -1} + c_{**} = 0$$

$$(4.7) \quad c c^* + c_4 - 1/2 c_{**} = 0$$

При выводе этих соотношений принималось $c_2 = 1/2 c$. Таким образом, для определения α , β , γ , c_4 необходимо знание величин c^{**} , c^* , c_* , c_{**} вдали от решетки.

Для системы (2.10), (2.13) и (3.1) соотношения для определения констант имеют вид $c_5 = c^{**} c^*$ и (4.7).

Уравнение для масштаба турбулентности (3.1) при $Re^\circ \rightarrow \infty$ и $c_2 = 1/2 c$ можно переписать в виде

$$U_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = \left[\frac{c}{2} E^{1/2} \left(L \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^{-1} + c_4 \right] L \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

Решение этого уравнения при постоянной величине $E^{1/2} (L \partial U_1 / \partial x_2)^{-1}$ имеет вид

$$L = L_0 \exp [A (\partial \ln U_1 / \partial x_2) (x_1 - x_1^\circ)] \quad A = 1/2 (c^{**} - c c^*)$$

5. В работе [2] проводились измерения структуры турбулентности вдали от решетки в потоке с постоянным градиентом скорости. Если по

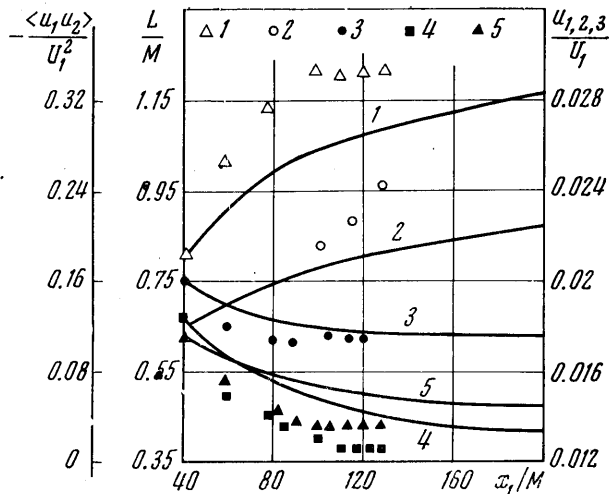
данным [2] вычислить значения c^* , c^{**} , c_* , c_{**} на максимальном расстоянии от решетки, то получим

$$(5.1) \quad c^* = 0.72, \quad c^{**} = 0.34, \quad c_* = 0.48, \quad c_{**} = 0.57.$$

Подставляя (5.1) в (4.7)–(4.10) и считая $c = 0.4$, найдем

$$(5.2) \quad c_4 = -0.118, \quad \gamma = 1.013, \quad 2\alpha = -0.09, \quad 2\beta = 0.374, \quad c_5 = 0.245$$

По оценке [6] $2\alpha + 2\beta = -0.8$. В рассмотренном здесь случае $2\alpha + 2\beta = -0.464$.



Фиг. 1

Найденные выше значения констант позволяют производить расчеты по описанной выше системе пяти уравнений при любых числах Рейнольдса и по системе двух уравнений при больших значениях числа Рейнольдса. Все численные расчеты проводились на ЭВМ «Наири» с использованием стандартной программы.

Был произведен расчет течения, которое экспериментально исследовалось в [2]. Так как в [2] в начальном сечении величина L не измерялась, то ее значение в начальном сечении определялось из соотношения (2.13), в котором были известны все величины, кроме L .

На фиг. 1 приведено сравнение расчета по системе пяти уравнений с константами (5.2) с результатами эксперимента [2]. Показано изменение по длине величин $-\langle u_1 u_2 \rangle / E - 1$, $L/M - 2$, $u_1 / U_1 - 3$, $u_2 / U_1 - 4$, $u_3 / U_1 - 5$.

Следует отметить хорошее качественное и удовлетворительное количественное соответствие результатов расчета и эксперимента. Отметим, что рассчитанная величина $-\langle u_1 u_2 \rangle / E$ вдали от решетки стремится к постоянному значению, равному тому, которое принималось в качестве предельного значения при определении констант в уравнениях. Однако стремление к предельному состоянию медленнее, чем в эксперименте. Это может быть связано с тем, что предельное состояние в эксперименте не было достигнуто. Если предположить, что предельное состояние не достигнуто, а величины $-\langle u_1 u_2 \rangle / E$, $E^{1/2} (L \partial U_1 / \partial x_2)^{-1}$, $\langle u_2^2 \rangle / E$, $\langle u_3^2 \rangle / E$ на максимальном удалении от решетки отличаются от предельных во столько раз, как и в расчете, то соответствующий пересчет величин c^* , c^{**} , c_* , c_{**} дает $c_* = 0.43$, $c_{**} = 0.53$, $c^* = 0.6$, $c^{**} = 0.385$.

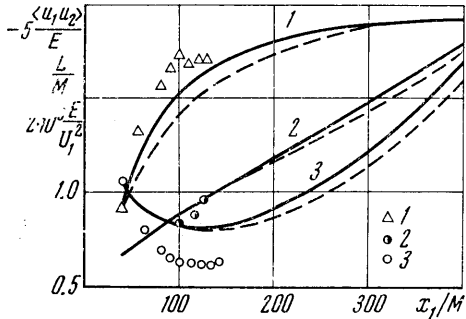
При этих значениях c^* , c^{**} , c_* , c_{**} константы в уравнениях

$$(5.3) \quad c_4 = -0.0475, \gamma = 0.945, 2\alpha = -0.08, 2\beta = -0.33, c_5 = 0.231$$

На фиг. 2 приведены результаты расчета $-\langle u_1 u_2 \rangle / E^{-1}$, $L/M=2$, $E/U_1^2=3$ по системе пяти (сплошные кривые) и двух (пунктирные кривые) уравнений с константами (5.3).

При малых числах Re° величина $-\langle u_1 u_2 \rangle / E$ при стремлении к предельному состоянию проходит через максимум.

Расчеты показывают, что при течении с градиентом скорости за решеткой энергия вначале уменьшается, а затем возрастает, причем предельное состояние достигается на участке роста энергии турбулентности. В настоящее время не опубликованы результаты измерений характеристик турбулентности на достаточном удалении от решетки и не зарегистрировано нарастание турбулентной энергии. В [4, 5] имеется указание на нарастание энергии турбулентности в потоке с градиентом скорости, но это указание носит качественный характер.



Фиг. 2

Для расчетов по системе двух уравнений при малых числах Рейнольдса необходимо найти зависимость c_5 от числа Рейнольдса и z . Она может быть найдена из расчета

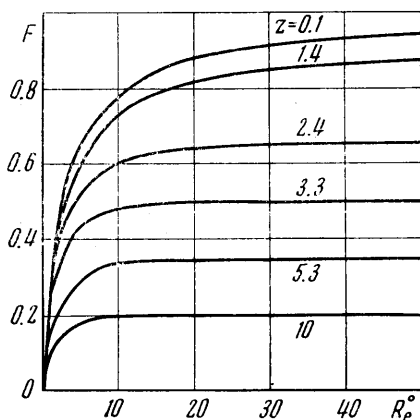
течения за решеткой по системе пяти уравнений при большом начальном значении Re° и малом начальном значении $E^{-1/2} L \partial U_1 / \partial x_2$. При расчетах принималось, что $U_1^{-1} M \partial U_1 / \partial x_2 = 10^{-4}$, а величина $Re = M U_1 / \nu$ переменная. Здесь M — размер ячейки устройства, порождающего турбулентность. Максимальное значение $Re = 10^4$. При $x_1 / M = 20$ принималось $L / M = 0.2$, а $E / U_1^2 = 0.0005$, что соответствует условиям работ [11, 12]. Турбулентность в начальном сечении считалась изотропной, а значение $-\langle u_1 u_2 \rangle$ вычислялось по (2.13). Полученная таким образом зависимость c_5 от Re° и z приведена на фиг. 3. По оси ординат отложено отношение текущего значения c_5 к значению при больших Re° и малых z , которое обозначено F . При малых z и больших Re° $c_5 = 0.28$.

Измерения вдали от решетки при различных числах Рейнольдса позволяют уточнить характеристики предельного состояния и более подробно проанализировать свойства рассматриваемой в данной работе системы уравнений.

Расчеты показывают, что в (2.6) выражение $-0.2[\langle u_2^2 \rangle - 2(E - \langle u_3^2 \rangle)]$ может быть заменено выражением $-\delta E$. В расчетах δ изменялось в диапазоне 0.26—0.28. В этом случае из системы уравнений можно исключить уравнения для компонент пульсаций по различным осям.

6. Расчет при помощи рассмотренных уравнений потоков с переменным градиентом скорости требует введения в уравнения членов, описывающих диффузию характеристик турбулентности. В этом случае целесообразнее использовать не уравнение для масштаба, а уравнение для ω . Диффузионный член в уравнении для ω можно записать так же, как и для энергии турбулентности в градиентном виде.

Если воспользоваться уравнениями для E и ω совместно с зависимостями c_5 от Re° и $E^{-1/2} L \partial U_1 / \partial x_2$, приведенным на фиг. 3, то для течения



Фиг. 3

в плоском канале система уравнений примет вид

$$(6.1) \quad -c\omega^2 - c_4\omega \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + c_5 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 - 0.7 \frac{c_1 \omega^3}{\text{Re}^* E} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \left(c_5 \frac{E}{\omega} + \frac{1}{\text{Re}^*} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right\} = 0$$

$$(6.2) \quad c_5 \frac{E}{\omega} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 - cE\omega - c_1 \frac{\omega^2}{\text{Re}^*} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \left(c_5 \frac{E}{\omega} + \frac{1}{\text{Re}^*} \right) \frac{\partial E}{\partial x_2} \right\} = 0$$

$$(6.3) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \left(c_5 \frac{E}{\omega} + \frac{1}{\text{Re}^*} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right\} = -1, \quad \text{Re}^* = \frac{u^* h}{\nu}$$

Здесь все величины приведены к безразмерному виду при помощи величин h — полуширины канала и $u^* = (\tau_* / \rho)^{1/2}$, где τ_* — величина трения на стенке.

Граничные условия этих уравнений следующие:

$$(6.4) \quad U_1 = 0, E = 0, E^{1/2} \omega^{-1} = 0 \text{ при } x_2 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = 0 \text{ при } x_2 = 1$$

При написании этих уравнений предполагалось, что коэффициенты переноса в уравнениях для E , ω и U_1 одинаковы.

Расчеты по системе уравнений (6.1) — (6.3) с граничными условиями (6.4) позволят проверить возможность распространения методов данной работы на потоки с переменным градиентом скорости. Однако следует отметить, что при формулировке этой задачи сделано два дополнительных предположения: о градиентном характере переноса и о равенстве коэффициентов переноса в уравнениях для E , ω и U_1 .

Автор благодарит В. М. Иевлева за обсуждение и поддержку этой работы и С. И. Бекрицкую, выполнившую все расчеты.

Поступила 26 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

- Rose W. G. Results of an attempt to generate a homogeneous turbulent shear flow. J. Fluid Mech., 1966, vol. 26, pt 1, pp. 97–120.
- Champagne F. H., Harris V. G., Corrsin S. Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 1, pp. 84–139.
- Rose W. G. Interaction of grid turbulence with a uniform mean shear. J. Fluid Mech., 1970, vol. 44, pt 4, pp. 767–779.
- Навознов О. И., Павельев А. А. О переходе к турбулентности в спутных струях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
- Навознов О. И., Павельев А. А., Яценко А. В. О переходе к турбулентности в затопленных и спутных струях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
- Rotta J. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. 1. Z. Phys., 1951, 129, Nr 5, S. 547–572.
- Rotta J. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. 2. Z. Phys., 1951, 131, Nr 1, S. 51–77.

8. Глушко Г. С. Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. В сб. «Турбулентные течения». М., «Наука», 1970.
 9. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1942, т. 6, № 1, 2.
 10. Бэтчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
 11. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of isotropic turbulence in the initial period. Proc. Roy. Soc., 1948, A193, No. 1035, pp. 539–558.
 12. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of turbulence in the final period. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1948, vol. 194, No. 1039.
-