№ 1 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1974

УДК 532.32:532.61

ОБ УСТОЙЧИВОМ РАВНОВЕСИИ ПОВЕРХНОСТИ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ КОНТАКТЕ С РЕБРОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Л. А. СЛОБОЖАНИН, А. Д. ТЮПЦОВ

(*Харьков*)

Условия равновесия, которые должны выполняться на свободной поверхности капиллярной жидкости и на линии ее контакта с гладкой поверхностью твердого тела, хорошо известны [1]. Эти условия равновесия эквивалентны условию стационарности для потенциальной энергии [2, 3], а вопрос об устойчивости равновесных состояний сводится к изучению знака ее второй вариации [2–4].

Ниже рассматривается случай, когда поверхность твердого тела имеет излом на линии контакта со свободной поверхностью. Устойчивые состояния равновесия отождествляются с точками локального минимума потенциальной энергии. Получены необходимые и достаточные условия минимума.

1. Постановка задачи. Пусть некоторая область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью S твердого тела, частично заполнена жидкостью. Остальная часть области заполнена газом. Предполагается, что жидкость подвержена действию капиллярных сил и поля массовых сил. Обозначим через σ, σ_1 и σ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения соответственно на свободной поверхности Σ и на границах S_1 и S_2 твердого тела с жидкостью и газом, а через $\Pi(\mathbf{x})$ — объемную плотность потенциала массовых сил ($\mathbf{x}$ — радиус-вектор точки). Будем считать, что свободная поверхность жидкости гладкая, а ее линия контакта L с твердым телом частично или полностью проходит вдоль одного из ребер твердого тела.

Задача состоит в том, чтобы определить условия, при которых жидкость будет находиться в устойчивом состоянии покоя.

В основу дальнейших рассмотрений положим принцип минимума потенциальной энергии для устойчивых равновесных состояний. Потенциальная энергия изучаемой механической системы выражается равенством

$$U=\sigma\int_{\Sigma} d\Sigma+\sigma_1\int_{S_1} dS+\sigma_2\int_{S_2} dS+\int_{\Omega}\Pi(\mathbf{x})\,d\Omega$$

где Ω — область, занятая жидкостью. Обозначим через ΔU разность потенциальных энергий в возмущенном и невозмущенном положении. В положении устойчивого равновесия должно быть

$$\Delta U=\delta U+{}^1/{}_2\delta^2U+\ldots>0 \tag{1.1}$$

Отсюда вытекает, что необходимыми условиями минимума потенциальной энергии являются следующие: $\delta U\geqslant 0$ для всех допустимых возмущений положения жидкости; $\delta^2 U\geqslant 0$ для тех возмущений, при которых $\delta U=0$.

Эти условия будут достаточными, если во втором из них неравенство $\delta^2 U\geqslant 0$ заменить на $\delta^2 U>0$.

2. Первая вариация δU потенциальной энергии. Пусть $\mathbf{h}(\mathbf{x})=\delta\mathbf{x}$ — главная часть вектора возможных смещений для точек поверхности Σ. Будем считать, что функция $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема во внутренних точках поверхности Σ, непрерывна на линии L и удовлетворяет условию сохранения объема жидкости

$$(2.1)\qquad \int_{\Sigma} \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\, d\Sigma=0$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к Σ, внешний по отношению к области Ω. Исходя из того, что при возмущениях контур L должен оставаться на поверхности S, вектор $\mathbf{h}$ на L можно представить в одной из двух форм

$$(2.2)\qquad \mathbf{h}=(\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0+(\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$$

$$(2.3)\qquad \mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_1\geqslant 0$$

$$(2.4)\qquad \mathbf{h}=(\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0+(\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$

$$(2.5)\qquad \mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_2\geqslant 0$$

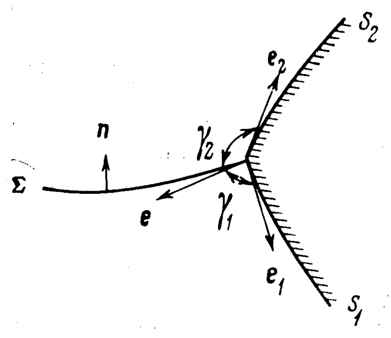
Здесь $\mathbf{e}_0=\mathbf{e}\times\mathbf{n}$; $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — внутренние единичные векторы нормали к линии L на поверхностях Σ, S_1, S_2 (фигура).

Обозначим через L_1 и L_2 соответственно части линии L, на которых выполняются условия (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5).

Теперь первую вариацию потенциальной энергии можно представить следующим образом (см. [3]):

$$(2.6)\qquad \delta U=\int_{\Sigma}(\Pi-2\sigma H)\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma-\sigma\int_{L}\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}\,dl-(\sigma_1-\sigma_2)\left[\int_{L_1}\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_1\,dl-\int_{L_2}\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_2\,dl\right]$$

где H — средняя кривизна поверхности Σ. Представив второй член в правой части равенства (2.6) в виде суммы интегралов по L_1 и L_2 и используя затем соотношения (2.2) на L_1 и (2.4) на L_2, преобразуем δU к виду



$$(2.7)\qquad \delta U=\int_{\Sigma}(\Pi-2\sigma H)\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma-$$
$$-\sigma\int_{L_1}\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}_1+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma}\right)\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_1\,dl-$$
$$-\sigma\int_{L_2}\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}_2-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma}\right)\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_2\,dl$$

3. **Условие неотрицательности δU.** В точке минимума первая вариация потенциальной энергии (2.7) должна быть неотрицательной

$$(3.1)\qquad \delta U\geqslant 0$$

для всех $\mathbf{h}$, удовлетворяющих условиям (2.1), (2.3) и (2.5).

Рассмотрим сначала такие $\mathbf{h}$, которые обращаются в нуль на линии L. Тогда условие (3.1) принимает вид

$$\int_{\Sigma}(\Pi-2\sigma H)\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma\geqslant 0,\qquad \int_{\Sigma}\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma=0$$

Отсюда следует, что на поверхности Σ должно выполняться известное условие равновесия

$$\Pi - 2\sigma H = c \tag{3.2}$$

где c — некоторая постоянная.

Условие (3.2) является одним из необходимых условий минимума потенциальной энергии. Поэтому при отыскании других необходимых условий будем считать, что (3.2) выполнено. (Отметим, что при этом $\delta U=0$ для всех $\mathbf{h}$, удовлетворяющих условию (2.1) и равных нулю на L.)

В этом случае условие (3.1) можно записать в виде

$$-\sigma \int_{L_1} \left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}_1 + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma}\right) \mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_1\, dl - \sigma \int_{L_2} \left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}_2 - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma}\right) \mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_2\, dl \geqslant 0$$

Из этого неравенства, учитывая соотношения (2.2) и (2.4), а также произвольность разбиения L на L_1 и L_2, следует, что всюду на линии L должны выполняться условия

$$\mathbf{e}\mathbf{e}_1 = \cos\gamma_1 \leqslant (\sigma_2-\sigma_1)/\sigma = \cos\alpha_1 \quad \text{или} \quad \gamma_1 \geqslant \alpha_1 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{e}\mathbf{e}_2 = \cos\gamma_2 \leqslant (\sigma_1-\sigma_2)/\sigma = \cos\alpha_2 \quad \text{или} \quad \gamma_2 \geqslant \alpha_2 \tag{3.4}$$

Здесь γ_1 и γ_2 — углы контакта с поверхностью твердого тела для жидкости и газа (фигура), а α_1 и α_2 — соответствующие углы смачивания в случае контакта с гладкой твердой поверхностью ($\alpha_1+\alpha_2=\pi$).

Таким образом, условие (3.1) неотрицательности δU на всех $\mathbf{h}$, удовлетворяющих условиям (2.1), (2.3) и (2.5), эквивалентно системе условий (3.2)–(3.4).

Замечание 1. Так как $\alpha_1+\alpha_2=\pi$, то из условий (3.3) и (3.4), в частности, следует, что для $\delta U \geqslant 0$ необходимо

$$\gamma_1+\gamma_2 \geqslant \pi \tag{3.5}$$

Это означает, что устойчивые равновесные состояния жидкости могут иметь место только, если на линии L излом твердого тела всюду направлен углом внутрь области, занятой жидкостью и газом.

Замечание 2. Если условия (3.2)–(3.4) выполнены и для одной из сред угол контакта равен углу смачивания, то δU обращается в нуль на всех $\mathbf{h}$, удовлетворяющих условию (2.1) и сдвигающих контур в сторону указанной среды (или оставляющих его неподвижным).

4. Условия устойчивого равновесия по первой и второй вариациям потенциальной энергии. Полученные выше результаты позволяют сформулировать следующие необходимые и достаточные условия минимума потенциальной энергии (условия устойчивого состояния покоя жидкости).

Для устойчивого равновесия свободной поверхности жидкости необходимо, чтобы на ней выполнялось условие (3.2), а на линии контакта с твердым телом как для жидкости, так и для газа угол контакта должен быть не меньше соответствующего угла смачивания. Кроме того, вторая вариация потенциальной энергии должна быть неотрицательной на всех возмущениях свободной поверхности, удовлетворяющих условию (2.1) и оставляющих неподвижной линию контакта или, если угол контакта одной из сред равен соответствующему углу смачивания, сдвигающих линию контакта в сторону этой среды.

Эти условия становятся достаточными, если в них условие неотрицательности второй вариации потенциальной энергии заменить условием положительности.

Авторы благодарят А. Д. Мышкиса за обсуждение полученных результатов.

Поступила 19 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
2. *Румянцев В. В.* К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
3. *Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидростатика в слабых силовых полях. В сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». Изд. ВЦ АН СССР, 1968.
4. *Тюпцов А. Д.* Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.