

УДК 532.517.4

## К ВОПРОСУ О РАЗВИТИИ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

К. К. ВЬОНГ, А. А. ЗАЙЦЕВ

(Москва)

В области перехода двумерного ламинарного пограничного слоя в турбулентный обнаруживается трехмерное течение [1-3]. Существует представление, что это течение образуется в результате нелинейного взаимодействия двумерных и трехмерных возмущений, предсказываемых линейной теорией гидродинамической устойчивости. В [4, 5] при многих упрощающих предположениях проведен расчет такого взаимодействия для свободного пограничного слоя и для пограничного слоя на стенке с весьма грубым приближением профиля скорости. Результаты имеют некоторое согласие с опытом. С другой стороны, известно, что возмущения типа волны Толлмина - Шлихтинга наблюдаются и при достаточно большой амплитуде.

В настоящей работе на основе метода последовательной линеаризации проводятся численные расчеты первичных двумерных и трехмерных возмущений, а также среднего вторичного течения, получающегося вследствие нелинейного взаимодействия первичных возмущений. Схема расчета близка к схеме работ [4, 5], параметры возмущений рассчитываются на основе профиля скорости Блязиуса. Проводится детальное сравнение результатов расчета с данными опытов [1]. Оказалось, что при большой амплитуде возмущений скорость нарастания амплитуды отличается от данных линейной теории, а пространственное распределение возмущений достаточно хорошо согласуется с распределением, даваемым собственными функциями и их нелинейным взаимодействием. При расчете вторичного течения делалась поправка на скорость роста амплитуды первичного возмущения из опыта.

**Постановка задачи.** Рассматриваются возмущения в пограничном слое на плоской пластине. Ось  $X$  направлена от передней кромки вдоль пластины по потоку, ось  $Y$  — перпендикулярно пластине, ось  $Z$  — вдоль передней кромки. Для каждого  $X$  имеется безразмерный профиль Блязиуса продольной составляющей скорости  $U(y)$  (отнесенный к скорости набегающего потока  $U_0$ ), где  $y = YU_0 / \sqrt{\nu R_x}$ ,  $R_x = U_0 X / \nu$  — локальное число Рейнольдса по длине пластины,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Зависимость основного течения от продольной координаты и перпендикулярная пластине составляющая скорости основного течения не учитываются при расчете возмущений.

Давление и скорость возмущенного течения представляются в виде рядов по степеням параметра  $\varepsilon$

$$(1) \quad p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \dots, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{q}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{q}^{(2)} + \dots$$

$$p^{(0)} = \text{const}, \quad \mathbf{q}^{(0)} = \{U(y), 0, 0\}$$

$$\mathbf{q}^{(n)} = \{u^{(n)}(x, y, z, t), v^{(n)}(x, y, z, t), w^{(n)}(x, y, z, t)\}$$

Здесь  $x, y, z, t$  — безразмерные координаты и время. Подстановка рядов (1) в уравнение неразрывности и уравнения Навье — Стокса и приравнение нулю коэффициентов при последовательных степенях  $\varepsilon$  приводит к системе уравнений

$$(2) \quad \text{div } \mathbf{q}^{(n)} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{q}^{(n)}}{\partial t} + \sum_{r=0}^n (\mathbf{q}^{(r)} \nabla) \mathbf{q}^{(n-r)} = -\nabla p^{(n)} + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{q}^{(n)}$$

Величины первого порядка  $q^{(1)}$ ,  $p^{(1)}$  представляются в виде

$$(3) \quad \begin{aligned} u^{(1)} &= \{u(y) e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{u}(y) e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}\} \cos \beta z \\ v^{(1)} &= \{v(y) e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{v}(y) e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}\} \cos \beta z \\ w^{(1)} &= \{w(y) e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{w}(y) e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}\} \sin \beta z \\ p^{(1)} &= \{p(y) e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{p}(y) e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}\} \cos \beta z \end{aligned}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — действительные волновые числа,  $c$  — комплексная фазовая скорость. Черта сверху означает комплексно-сопряженное значение. Подстановка (3) в уравнение (2), граничные условия прилипания при  $y=0$  и условие ограниченности возмущения при  $y=\infty$  приводят к задаче на собственные значения, которую можно представить в виде уравнения Орра — Зоммерфельда с однородными граничными условиями

$$(4) \quad v^{IV} - 2a^2 v'' + a^4 v = iaR^* \{ (U-c)(v'' - a^2 v) - U'' v \}$$

$$(5) \quad v(0) = v'(0) = 0$$

$$(6) \quad v'''(\delta) + av''(\delta) - \lambda^2 v'(\delta) - a\lambda^2 v(\delta) = 0$$

$$v''(\delta) + \lambda v''(\delta) - a^2 v'(\delta) - a^2 \lambda v(\delta) = 0$$

где  $y=\delta$  — внешняя граница пограничного слоя. Штрихами обозначаются производные

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad R^* = (\alpha/a)R, \quad \lambda = \sqrt{(a^2 - iaR^*(1-c))^{1/2}}$$

причем  $\text{Re } \lambda > 0$ .

Если собственные значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R$ ,  $c$  уже найдены и соответствующие им собственные функции  $v(y)$  рассчитаны, то функции  $u(y)$  и  $w(y)$  определяются из системы уравнений

$$(7) \quad i\alpha u + \beta w = -v', \quad \beta u + i\alpha w = \eta$$

где  $\eta$  является решением следующей краевой задачи:

$$(8) \quad \begin{aligned} \eta'' - a^2 \eta &= R \{ i\alpha(U-c)\eta + \beta Uv \} \\ \eta(0) &= 0, \quad \eta'(\delta) + \lambda \eta(\delta) = 0 \end{aligned}$$

В опытах [1] возмущения задаются лентой, колеблющейся с заданной частотой  $\Omega$ , а наклеенные вдоль пластины полоски целлофана определяют длину волны  $\lambda_z$  возмущения по  $z$ . Для каждого  $X$  безразмерные круговая частота  $\omega$  и волновое число  $\beta$  имеют вид

$$(9) \quad \omega = \alpha c_r = 2\pi\Omega v R / U_0^2, \quad \beta = 2\pi R v / U_0 \lambda_z, \quad R = U_0 L / v$$

где  $L$  — характерный линейный размер, связанный с  $X$ . При расчете собственных значений, соответствующих опыту, должны задаваться из опыта  $R$ ,  $\beta$ ,  $\alpha c_r = \omega$ , а рассчитываться величины  $\alpha$ ,  $c_r$ ,  $c_i$ .

В эксперименте амплитуды двумерных и трехмерных возмущений задаются независимо амплитудой колебаний ленты и толщиной целлофановых полосок. Поэтому в расчете первичное течение целесообразно представлять в виде суперпозиции двумерных и трехмерных возмущений с независимыми амплитудами

$$(10) \quad u^{(1)} = A_2 u_2^{(1)} + A_3 u_3^{(1)}, \quad v^{(1)} = A_2 v_2^{(1)} + A_3 v_3^{(1)}, \dots$$

$$(11) \quad u_2^{(1)} = \{ u_{12}^{(1)} e^{i(\alpha_2 x - \omega t)} + \bar{u}_{12}^{(1)} e^{-i(\alpha_2 x - \omega t)} \} e^{\alpha_2 c_{12} t}, \dots$$

$$(12) \quad u_3^{(1)} = \{ u_{13}^{(1)} e^{i(\alpha_3 x - \omega t)} + \bar{u}_{13}^{(1)} e^{-i(\alpha_3 x - \omega t)} \} e^{\alpha_3 c_{13} t} \cos \beta z, \dots$$

Здесь  $A_2$  и  $A_3$  — амплитуды двумерных и трехмерных возмущений. Для трехмерных возмущений  $\beta$  определяется формулой (9), для двумерных  $\beta=0$ , частота  $\omega$  в обоих случаях определяется формулой (9),  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  определяются как собственные значения, а  $u_{12}^{(1)}, \dots$  и  $u_{13}^{(1)}, \dots$  — как собственные функции соответствующих краевых задач (4) — (8).

Так как в эксперименте возмущения являются периодическими функциями времени, а развиваются в зависимости от  $X$ , то для возмущений типа (3)  $\alpha c$  должно быть величиной действительной, а  $\alpha$  — комплексной. Расчет собственных значений с ростом возмущения по времени несколько проще, и если он проведен, то можно сделать пересчет на рост возмущений по пространству.

Средние по периоду значения первичных возмущений равны нулю. Но первичные возмущения дают основной вклад в среднеквадратичные значения пульсаций скорости, которые в эксперименте измеряются термоанемометром. В силу (1) продольная компонента пульсации скорости имеет вид

$$(13) \quad u' = u - [u] = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 (u^{(2)} - [u^{(2)}]) + \dots$$

где скобкой  $[ \ ]$  обозначаются средние за период значения. Тогда среднее квадратичное значение продольной пульсации скорости представляется в виде

$$(14) \quad \langle u' \rangle = \sqrt{[u'^2]} = \varepsilon \sqrt{[u^{(1)2}]} + o(\varepsilon)$$

Из (10) — (12) следует:

$$(15) \quad [u^{(1)2}] = A_2^2 [u_2^{(1)2}] + A_3^2 [u_3^{(1)2}] + 2A_2 A_3 [u_2^{(1)} u_3^{(1)}]$$

$$[u_2^{(1)2}] = 2u_{12}^{(1)} \overline{u_{12}^{(1)}} e^{2\alpha_2 c_{12} t}$$

$$[u_3^{(1)2}] = u_{13}^{(1)} \overline{u_{13}^{(1)}} e^{2\alpha_3 c_{13} t} (1 + \cos 2\beta z)$$

$$[u_2^{(1)} u_3^{(1)}] = \{u_{12}^{(1)} \overline{u_{13}^{(1)}} e^{i(\alpha_2 - \alpha_3)x} + \overline{u_{12}^{(1)}} u_{13}^{(1)} e^{-i(\alpha_2 - \alpha_3)x}\} e^{(\alpha_2 c_{12} + \alpha_3 c_{13})t} \cos \beta z$$

Аналогичные выражения имеют среднеквадратичные значения пульсации двух других компонент скорости.

В силу (2) уравнения вторичного течения имеют вид

$$(16) \quad \partial u^{(2)} / \partial x + \partial v^{(2)} / \partial y + \partial w^{(2)} / \partial z = 0$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + U \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{dU}{dy} v^{(2)} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta u^{(2)} =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} (u^{(1)2}) - \frac{\partial}{\partial y} (u^{(1)} v^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial z} (u^{(1)} w^{(1)})$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} + U \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial y} - \frac{1}{R} \Delta v^{(2)} =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} (u^{(1)} v^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial y} (v^{(1)2}) - \frac{\partial}{\partial z} (v^{(1)} w^{(1)})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w^{(2)}}{\partial t} + U \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial y} - \frac{1}{R} \Delta w^{(2)} = \\ & = - \frac{\partial}{\partial x} (u^{(1)} w^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial y} (v^{(1)} w^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial z} (w^{(1)2}) \end{aligned}$$

Правые части этих уравнений выражаются через первичные возмущения (10)–(12) и содержат нулевую, первую и вторую гармоники  $\omega t$ . Эти же гармоники должно содержать и вторичное течение. Нулевые гармоники представляют собой осредненное течение. Правые части уравнений (16) показывают, что осредненное вторичное течение представляется в виде

$$(17) \quad \begin{aligned} u_0^{(2)} = & A_2^2 u_{01}^{(2)} e^{2\alpha_2 c_{12} t} + A_3^2 \{u_{02}^{(2)} + u_{03}^{(2)} \cos \beta z\} e^{2\alpha_3 c_{13} t} + \\ & + A_2 A_3 \{u_{04}^{(2)} e^{i(\alpha_2 - \alpha_3)x} + \overline{u_{04}^{(2)}} e^{-i(\alpha_2 - \alpha_3)x}\} \cos \beta z e^{(\alpha_2 c_{12} + \alpha_3 c_{13})t} \end{aligned}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} v_0^{(2)} = & A_2^2 v_{01}^{(2)} e^{2\alpha_2 c_{12} t} + A_3^2 \{v_{02}^{(2)} + v_{03}^{(2)} \cos \beta z\} e^{2\alpha_3 c_{13} t} + \\ & + A_2 A_3 \{v_{04}^{(2)} e^{i(\alpha_2 - \alpha_3)x} + \overline{v_{04}^{(2)}} e^{-i(\alpha_2 - \alpha_3)x}\} \cos \beta z e^{(\alpha_2 c_{12} + \alpha_3 c_{13})t} \end{aligned}$$

$$(19) \quad \begin{aligned} w_0^{(2)} = & A_3^2 w_{03}^{(2)} e^{2\alpha_3 c_{13} t} \sin \beta z + \\ & + A_2 A_3 \{w_{04}^{(2)} e^{i(\alpha_2 - \alpha_3)x} + \overline{w_{04}^{(2)}} e^{-i(\alpha_2 - \alpha_3)x}\} \sin \beta z e^{(\alpha_2 c_{12} + \alpha_3 c_{13})t} \end{aligned}$$

$$(20) \quad \begin{aligned} p_0^{(2)} = & A_2^2 p_{01}^{(2)} e^{2\alpha_2 c_{12} t} + A_3^2 \{p_{02}^{(2)} + p_{03}^{(2)} \cos \beta z\} e^{2\alpha_3 c_{13} t} + \\ & + A_2 A_3 \{p_{04}^{(2)} e^{i(\alpha_2 - \alpha_3)x} + \overline{p_{04}^{(2)}} e^{-i(\alpha_2 - \alpha_3)x}\} \cos \beta z e^{(\alpha_2 c_{12} + \alpha_3 c_{13})t} \end{aligned}$$

Если подставить эти выражения в уравнения (16) и собрать коэффициенты при одинаковых степенях и тригонометрических функциях, то для  $u_{0k}^{(2)}$ ,  $v_{0k}^{(2)}$ ,  $w_{0k}^{(2)}$  и  $p_{0k}^{(2)}$  получатся следующие системы уравнений:

$$(21) \quad \begin{aligned} & dv_{0k}^{(2)}/dy = 0 \\ & 2\alpha_{k+1} c_{ik+1} u_{0k}^{(2)} + \frac{dU}{dy} v_{0k}^{(2)} - \frac{1}{R} \frac{d^2 u_{0k}^{(2)}}{dy^2} = \end{aligned}$$

$$= - \frac{1}{k} \frac{d}{dy} (u_{k+1}^{(1)} \overline{v_{k+1}^{(1)}} + \overline{u_{k+1}^{(1)}} v_{k+1}^{(1)})$$

$$2\alpha_{k+1} c_{ik+1} v_{0k}^{(2)} + \frac{dp_{0k}^{(2)}}{dy} - \frac{1}{R} \frac{d^2 v_{0k}^{(2)}}{dy^2} =$$

$$= - (3-k) \frac{d}{dy} (v_{k+1}^{(1)} \overline{v_{k+1}^{(1)}}), \quad k=1, 2$$

$$(22) \quad i(k-3) (\alpha_2 - \alpha_3) u_{0k}^{(2)} + dv_{0k}^{(2)}/dy + (5-k) \beta w_{0k}^{(2)} = 0$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_{6-k} c_{i6-k} + \alpha_3 c_{i3}) u_{0k}^{(2)} + i(k-3) (\alpha_2 - \alpha_3) U u_{0k}^{(2)} + p_{0k}^{(2)} + \frac{dU}{dy} v_{0k}^{(2)} - \\ & - \frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 u_{0k}^{(2)}}{dy^2} - [(13-3k)\beta^2 + (k-3)(\alpha_2 - \alpha_3)^2] u_{0k}^{(2)} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2i(k-3)(\alpha_2 - \alpha_3) u_2^{(1)} \overline{u_3^{(1)}} - \frac{1}{5-k} \frac{d}{dy} \{ u_{6-k}^{(1)} \overline{v_3^{(1)}} + v_{6-k}^{(1)} \overline{u_3^{(1)}} \} - \\
 &- \beta \{ v_{6-k}^{(1)} \overline{w_3^{(1)}} + (4-k) \overline{u_3^{(1)}} w_3^{(1)} \} \\
 &(\alpha_{6-k} c_{i6-k} + \alpha_3 c_{i3}) v_{0k}^{(2)} + i(k-3)(\alpha_2 - \alpha_3) U v_{0k}^{(2)} + \frac{d p_{0k}^{(2)}}{dy} - \\
 &- \frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 v_{0k}^{(2)}}{dy^2} - [(13-3k)\beta^2 + (k-3)(\alpha_2 - \alpha_3)^2] v_{0k}^{(2)} \right\} = \\
 &= -i(k-3)(\alpha_2 - \alpha_3) (u_2^{(1)} \overline{v_3^{(1)}} + v_2^{(1)} \overline{u_3^{(1)}}) - (k-2) \frac{d}{dy} (v_{6-k}^{(1)} \overline{v_3^{(1)}}) - \\
 &- \beta \{ v_{6-k}^{(1)} \overline{w_3^{(1)}} + (4-k) \overline{v_3^{(1)}} w_3^{(1)} \} \\
 &(\alpha_{6-k} c_{i6-k} + \alpha_3 c_{i3}) w_{0k}^{(2)} + i(k-3)(\alpha_2 - \alpha_3) U w_{0k}^{(2)} - (5-k)\beta p_{0k}^{(2)} - \\
 &- \frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 w_{0k}^{(2)}}{dy^2} - [(13-3k)\beta^2 + (k-3)(\alpha_2 - \alpha_3)^2] w_{0k}^{(2)} \right\} = \\
 &= -i(k-3)(\alpha_2 - \alpha_3) u_2^{(1)} \overline{w_3^{(1)}} - \frac{1}{5-k} \frac{d}{dy} \{ v_{6-k}^{(1)} \overline{w_{6-k}^{(1)}} + \\
 &+ (4-k) \overline{v_3^{(1)}} w_3^{(1)} \} - (4-k) 2\beta w_3^{(1)} \overline{w_3^{(1)}}, \quad k=3,4
 \end{aligned}$$

Из условия  $v_{01}^{(2)}=0$  при  $y=0$  и первого уравнения системы (21) при  $k=1$  следует, что  $v_{01}^{(2)}=0$ . Тогда последнее уравнение этой системы дает

$$(23) \quad p_{01}^{(2)} = v_2^{(1)} \overline{v_2^{(1)}}$$

В области  $y \geq \delta$  правая часть уравнения для  $u_{01}^{(2)}$  обращается в нуль, и общее решение в этой области имеет вид

$$u_{01}^{(2)} = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y}, \quad \lambda = \sqrt{2\alpha_2 c_{i2} R}$$

В случае  $c_{i2} > 0$  из условия ограниченности решения на бесконечности следует, что  $C_1 = 0$ , это приводит к следующему условию:

$$(24) \quad (du_{01}^{(2)}/dy + \lambda u_{01}^{(2)})_{y=\delta} = 0$$

При этом  $u_{01}^{(2)}$  стремится к нулю, когда  $y \rightarrow \infty$ . В случае  $c_{i2} < 0$  решение всегда ограничено на бесконечности, но не исчезает. Этот результат физически не обоснован и, видимо, означает, что применяемое разложение правомерно только в первом случае.

Аналогичные обстоятельства имеют место при рассмотрении системы (21) для  $k=2$ , только роль  $c_{i2}$  играет  $c_{i3}$ .

Анализ системы (22) в области  $y \geq \delta$  приводит к заключению, что  $u_{0k}^{(2)}$ ,  $v_{0k}^{(2)}$ ,  $w_{0k}^{(2)}$  исчезают на бесконечности, если выполняется неравенство

$4\beta^2 + 2\alpha_3 c_{i3} R > 0$ . Граничные условия при  $y = \delta$  имеют вид

$$\begin{aligned} & \beta (du_{0k}^{(2)} / dy + \lambda_{1k} u_{0k}^{(2)}) + (k-3) i (\alpha_2 - \alpha_3) (dw_{0k}^{(2)} / dy + \lambda_{1k} w_{0k}^{(2)}) = 0 \\ & d^3 v_{0k}^{(2)} / dy^3 + \lambda_{1k} d^2 v_{0k}^{(2)} / dy^2 - \lambda_{2k}^2 dv_{0k}^{(2)} / dy - \lambda_{1k}^2 \lambda_{2k}^2 v_{0k}^{(2)} = 0 \\ & d^3 v_{0k}^{(2)} / dy^3 + \lambda_{2k} d^2 v_{0k}^{(2)} / dy^2 - \lambda_{1k}^2 dv_{0k}^{(2)} / dy - \lambda_{1k}^2 \lambda_{2k} v_{0k}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= \sqrt{(13-3k)\beta^2 + (k-3)(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + R\{\alpha_{6-k} c_{i6-k} + \alpha_3 c_{i3} + i(k-3)(\alpha_2 - \alpha_3)\}} \\ \lambda_{2k} &= (5-k) \sqrt{\beta^2 + (k-3)(\alpha_2 - \alpha_3)^2} \\ \text{Re } \lambda_{1k} &> 0, \quad \text{Re } \lambda_{2k} > 0, \quad k=3, 4 \end{aligned}$$

Граничные условия прилипания при  $y=0$

$$(26) \quad u_{0k}^{(2)} = v_{0k}^{(2)} = w_{0k}^{(2)} = 0, \quad k=1, 2, 3, 4$$

Уравнения (21), (22), граничные условия (24)–(26) дают возможность рассчитать среднее вторичное течение (нулевую гармонику вторичного течения).

*Расчеты.* Для проверки используемых численных методов и программ был произведен расчет нейтральной кривой двумерных возмущений. Задача на собственные значения (4)–(6) решалась методом Каплана [6] с нормировкой быстрорастущего решения и поправкой медленно растущего решения на каждом шаге интегрирования и методом прямой прогонки [7]. Корни характеристического уравнения рассчитывались с помощью итерации Ньютона для системы [8], необходимые при этом частные производные от левых частей уравнений определялись численно. Оказалось, что при подходящем выборе шага интегрирования оба метода дают достаточную точность. На фиг. 1 нейтральная кривая с индексом 3 получена настоящими расчетами, там же приводятся нейтральные кривые по расчетам Шлихтинга 4, Шэна 1, Каплана 2 [9].

Опыты [1] проводились при следующих условиях:  $U_0 / \nu = 1.02 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$ ,  $\Omega = 145 \text{ сек}^{-1}$ . Для двумерных возмущений перемещению вдоль пластины соответствует перемещение на плоскости  $\alpha, R$  по кривой, близкой к прямой линии, указанной на фиг. 1 пунктиром. Точки  $A, B, C, D$  соответствуют положениям на пластине, при которых проводились измерения в эксперименте. В этих точках число Рейнольдса по характерной длине  $L = \sqrt{X\nu} / U_0$  имеет соответственно значения 1015, 1040, 1070, 1090.

Из соотношений  $\alpha R = aR^*$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$ ,  $\beta = 2\pi\nu R / U_0 \lambda_z$  имеем

$$(\alpha - \beta)^2 = a^2 - 4aR^* \pi\nu / U_0 \lambda_z$$

В силу преобразования Сквайра нейтральная кривая трехмерных возмущений в плоскости  $aR^*$  совпадает с нейтральной кривой двумерных возмущений в плоскости  $\alpha R$ . Так как  $\alpha - \beta$  — величина действительная, то правая часть последнего равенства положительна. Это условие определяет область на плоскости  $aR^*$ , в которой расположены кривые, соответствующие перемещению вдоль пластины при любой заданной частоте. В случае указанных выше опытов  $\lambda_z = 2.54 \text{ см}$  эта область лежит выше прямой  $a = 4.85 \cdot 10^{-5} R^*$ , которая изображена на фиг. 1 сплошной линией. Из взаимного расположения этой прямой и нейтральной кривой следует, что трехмерная составляющая возмущений в опытах [1] по линейной теории является затухающей в любом месте пластины.

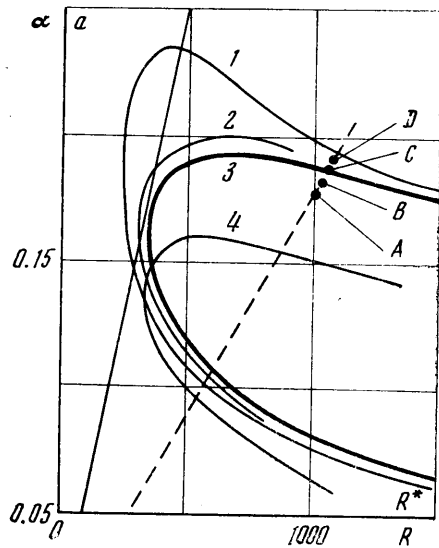
Для расчета распределения среднеквадратичных значений пульсаций продольной компоненты скорости необходимо вычислить собственные

функции двумерных и трехмерных возмущений. Такие вычисления были проведены для положений *A*, *B*, *C*, *D* как с помощью метода [9], так и с помощью обратной прогонки [7]. Результаты, полученные двумя методами, практически совпали. При известных собственных функциях среднеквадратичные значения пульсаций скорости определяются формулами (14), (15). Формально получается, что трехмерная среднеквадратичная компонента, являющаяся следствием взаимодействия двумерных и трехмерных возмущений, может возрастать при затухающих трехмерных возмущениях.

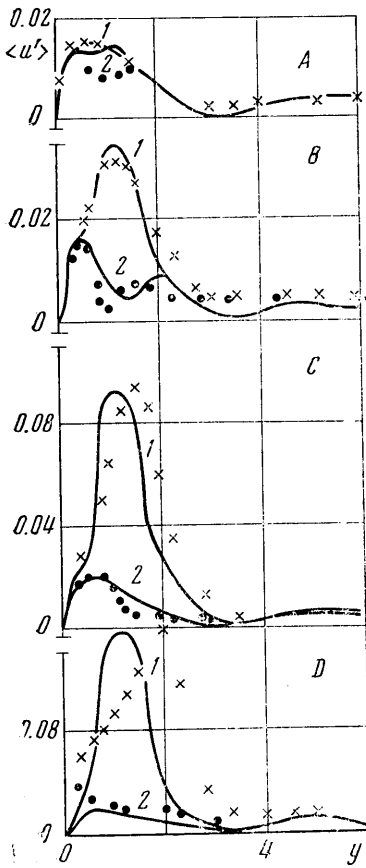
Собственные функции двумерных и трехмерных возмущений нормировались так, что их энергии были равны. Затем для каждого положения *A*, *B*, *C*, *D* были подобраны такие значения амплитуд  $A_2$  и  $A_3$ , при которых получается наилучшее согласие с опытом в распределении среднеквадратичных значений продольной пульсации скорости. На фиг. 2 для положений *A*, *B*, *C*, *D* приводятся полученные графики зависимости  $\langle u' \rangle$  от  $y$  для значений  $\beta z = 0$  и  $\pi$  с индексами 1 и 2 соответственно; также нанесены экспериментальные точки. На фиг. 3 построены зависимости  $\langle u' \rangle$  от  $\beta z$  при фиксированном  $y$  для положений *A*, *B*, *C*. Оказалось, что подходящие отношения  $A_3/A_2$  для положений *A*, *B*, *C*, *D* имеют соответственно следующие значения: 0,05, 0,2, 0,5, 1,2, откуда следует, что трехмерная компонента возмущения вопреки линейной теории нарастает очень быстро и в положении *D* составляет большую его часть. Из сравнения расчета с опытом следует, что пространственное распределение пульсации можно хорошо представить с помощью собственных функций при такой амплитуде, когда зависимость от времени (от продольной координаты на опыте) не согласуется с линейной теорией.

Для расчета среднего вторичного течения в положении *C* решались системы дифференциальных уравнений (21), (22), которые сводятся к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами при граничных условиях (24)–(26). Определенные интегралы, входящие в решение, рассчитывались численно. Решение системы (22) при  $k=4$  разлагается в ряд по степеням разности  $\alpha_2 - \alpha_3$ . Вычисления проведены только для первых членов разложения. Как отмечено выше, исчезающее на бесконечности решение систем (21), (22) возможно только в случае, когда  $c_{12} > 0$  и  $c_{13} > 0$ . Собственные значения  $c_{13}$ , полученные по линейной теории, при значениях параметров, соответствующих эксперименту [1], всегда отрицательны. Однако в указанном опыте трехмерные возмущения при подходящей начальной амплитуде растут вниз по течению, что соответствует положительным значениям  $c_{13}$ . Поэтому при расчете вторичного течения  $c_{13}$  принималось положительным и таким, чтобы среднее течение из расчета согласовывалось с опытом. Подходящим оказалось  $c_{13} = 0,0047$ .

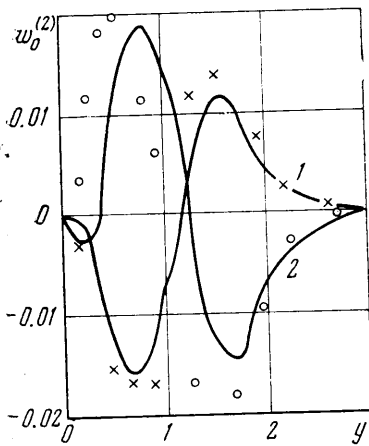
Результаты расчета профиля поперечной скорости среднего вторичного течения  $w_0^{(2)}$  в сечении *C* при  $\beta z = \pi/2$  и  $\beta z = -0,3\pi$  приводятся в виде



Фиг. 1

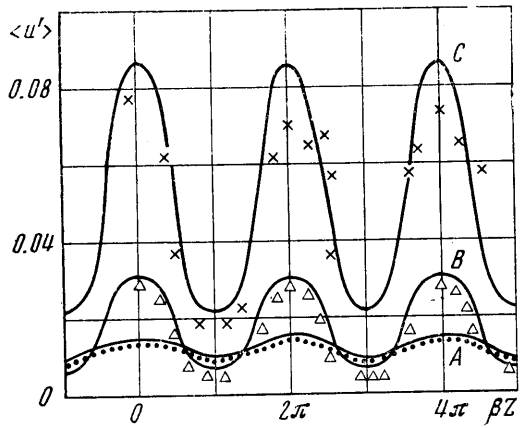


Фиг. 2

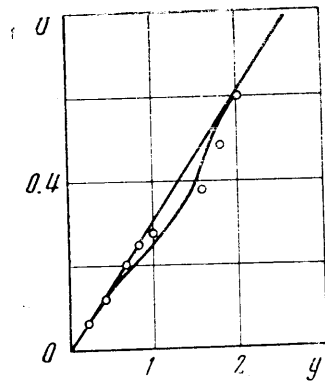


Фиг. 4

кривых соответственно с индексами 1 и 2 на фиг. 4, где также нанесены экспериментальные точки. На фиг. 5 изображено искажение основного профиля скорости под действием компоненты вторичного течения  $u_0^{(2)}$  в том же положении C при  $\beta z = 0$  и приведены экспериментальные данные. По расчету максимальное искажение профиля происходит в критическом слое, а на опыте несколько выше.



Фиг. 3



Фиг. 5

Известно, что в экспериментах возмущения сохраняют вид волны Толмина — Шлихтинга даже при достаточно большой амплитуде, когда скорость нарастания возмущения не согласуется с линейной теорией. Из про-



деланного здесь расчета и сравнения его результатов с опытом следует, что пространственный вид возмущений после поправки в скорости роста возмущения хорошо согласуется с опытом при подходящем выборе амплитуд. Хорошо согласуются с опытом не только среднеквадратичные значения пульсаций и сдвиг фазы, но и вторичное течение, получающееся в результате нелинейного взаимодействия двумерных и трехмерных возмущений: искажение основного профиля, распределение скоростей и линий тока среднего течения в плоскости, перпендикулярной скорости набегающего потока.

Поступила 14 VII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three - dimensional nature of boundary - layer instability. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, pt 1.
2. Hama F. R., Nutan J. Detailed flow-field observations in the transition process in a thick boundary layer. Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Pasadena, Calif., 1963, Stanford, Calif. Univ. Press., 1963, pp. 77-93.
3. Komoda H. Nonlinear development of disturbance in a laminar boundary layer. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9, pt 2, pp. 87-94.
4. Линь Цзя-цзяо, Бинни Д. Дж. О неустойчивости течений с градиентом скорости. Гидродинамическая неустойчивость. М., «Мир», 1964, стр. 9-36.
5. Benney D. J. Finite amplitude effects in an unstable laminar boundary layer. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 3, pp. 319-326.
6. Бегцов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
7. Лутовинов В. М. О варианте метода прогонки и задачах устойчивости пограничного слоя. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 2, стр. 121-123.
8. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1962.