

УДК 532.517

О РЕШЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Е. Б. ГЛЕДЗЕР

(Москва)

Для уравнений, которым подчиняется характеристический функционал поля скорости турбулентной жидкости в присутствии гауссовских с нулевым средним сил, строится процедура теории возмущений, дающая решение для функционала в виде ряда Грама — Шарлье с гауссовской частью, имеющей истинный спектральный тензор. С помощью полученного решения находятся замкнутые уравнения для спектрального тензора поля скорости и средней функции Грина, аналогичные определенным образом оборванным диаграммным уравнениям Уайлда. Как первое приближение получаются уравнения теории Крейчана. Исследовано приближение, содержащее уравнение для эффективной вершинной части. Показано, что эта вершинная часть является обрезающим фактором для крупномасштабных пульсаций поля скорости.

1. Рассмотрим турбулентные течения вязкой несжимаемой жидкости. Они полностью характеризуются случайным полем скорости $u_i(x, t)$, эволюция которого описывается гидродинамическими уравнениями Навье — Стокса

$$(1.1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + f_i, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

где f_i — случайное соленоидальное поле внешних сил. Известно [1, 2], что статистические моменты различных порядков поля удовлетворяют бесконечной системе уравнений Фридмана — Келлера, для замыкания конечных подсистем которой привлекалось большое число различного рода методов (см. библиографию в [3]).

В последнее время значительное внимание было уделено методам, аналогичным методам квантовой теории поля. Так, в работах [4–8] была построена теория возмущений для уравнений (1.1) и с помощью диаграммных методов получены замкнутые уравнения статистического описания турбулентных течений несжимаемой жидкости. Однако некоторые недостатки несколько снижают ценность этого метода: он не дает способа обрывания получаемых систем интегральных уравнений, при котором выполнялись бы законы сохранения, справедливые для исходной системы (1.1), спектры не были бы отрицательными, а коэффициенты корреляции не превышали бы единицу. Имеются и другие требования, которые можно предъявить к приближениям, получаемым упомянутым выше методом [3, 9]. Кроме того, как было указано в [5], в работе [4] была допущена неточность, связанная с невыполнением аналога тождества Уорда в формулировке диаграммного метода для векторного уравнения (1.1). В связи с этим вывод уравнения для средней функции Грина остается еще неясным.

Наиболее полное статистическое описание поля \mathbf{u} заключается в задании его пространственно-временного характеристического функционала

$$(1.2) \quad \Psi[z(x, t)] = \langle \exp \{i \int dx dt z(x, t) \mathbf{u}(x, t)\} \rangle$$

где скобки означают усреднение по ансамблю турбулентных течений. Ясно поэтому, что диаграммные уравнения, выведенные в [4, 5], могут быть получены из функциональных уравнений, которым подчиняется функционал (1.2). Этому и посвящена данная работа.

2. Пусть после внешних сил (как и в [4, 5]) гауссовское с нулевым средним. Такая модель может в силу представлений локально-изотропной турбулентности правильно описывать мелкомасштабную структуру, если считать, что силы обеспечивают заметный средний приток энергии лишь к крупномасштабным компонентам турбулентности. В этой модели функциональные уравнения для характеристического функционала пространственно-временного фурье-образа поля скорости (частотно-волновое пред-

ставление $\Phi[z]$ получаются из соотношений для фурье-образа поля скорости [10] и имеют вид

$$(2.1) \quad \Phi[z] = \Psi \left[(2\pi)^{-4} \int dk d\omega z(k, \omega) e^{i(kx + \omega t)} \right]$$

$$(2.2) \quad \int (\nu k^2 + i\omega) z_i(p) \frac{\delta \Phi}{\delta z_i(p)} dp = \\ = - \int z_i(p) F_{ij}(p, p_1) z_\alpha(p_2) \Psi_{\alpha j}(p_2, p_1; z) dp dp_1 dp_2 - \\ - \frac{1}{2} \int z_i(p) \Lambda_{i, \alpha\beta}(p; p_1, p_2) \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z_\alpha(p_1) \delta z_\beta(p_2)} dp dp_1 dp_2$$

$$(2.3) \quad (\nu k^2 + i\omega) \Psi_{ij}(p, p'; z) = \delta_{ij} \delta(p - p') \Phi[z] - \\ - \int dp_1 dp_2 \Lambda_{i, \alpha\beta}(p; p_1, p_2) \frac{\delta}{\delta z_\alpha(p_1)} \Psi_{\beta j}(p_2, p'; z) \\ \Lambda_{i, \alpha\beta}(p; p_1, p_2) = (2\pi)^{-4} (k_\alpha \Delta_{i\beta} + k_\beta \Delta_{i\alpha}) \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \\ p = (k, \omega), \quad dp = dk d\omega, \quad \Delta_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2, \quad \alpha, \beta, i = 1, 2, 3 \\ \Psi_{ij}(p, p'; z) = \left\langle \frac{\delta u_i(p)}{\delta f_j(p')} \exp \left\{ i \int z_\alpha(p) u_\alpha(p) dp \right\} \right\rangle, \\ F_{ij}(p, p') = \langle f_i(p) f_j(p') \rangle$$

Функционал $\Psi_{ij}(p, p'; z)$ при $z=0$ определяет средний тензор реакции поля скорости на бесконечно малое внешнее силовое воздействие и вместе с этим задает среднюю скорость притока энергии к гармоникам поля скорости за счет работы внешних сил [10]

$$\langle u_i(p) f_j(p') \rangle = F_{ja}(p') \Psi_{ia}(p, -p'; 0)$$

Воспользуемся идеей работ [11, 12] и из уравнений (2.2), (2.3), описывающих как обмен энергией между компонентами поля скорости, так и «адиабатическое» их взаимодействие, заранее выделим эффекты затухания отдельных волн за счет турбулентной вязкости и «диффузии в волновом пространстве». Величины, соответствующие этим выделенным эффектам, после осреднения обычно определялись с некоторым произволом на основании первых приближений теории возмущений.

Определим эти величины, воспользовавшись функциональными уравнениями (2.2), (2.3). Введем для сокращения записи обозначения

$$p, i \rightarrow i, \quad \delta_{iii} \delta(p - p_1) \rightarrow \delta_{ii}, \quad u_i(p) \rightarrow u_i \\ \Lambda_{i, \alpha\beta}(p; p_1, p_2) \rightarrow \Lambda_{ii, i\alpha\beta}, \quad \Psi_{ii}(p, p_1; z) \rightarrow \Psi_{ii}[z]$$

Пусть величина $\Psi_{ii}^{-1}(p, p_1; z) \equiv \Psi_{ii}^{-1}[z]$ определяется по формуле

$$(2.4) \quad \int \Psi_{ii}(p, p_1; z) \Psi_{ii}^{-1}(p_1, p_2; z) dp_1 = \delta_{ii} \delta(p - p_2) \\ \Sigma \Psi_{ii}[z] \Psi_{ii}^{-1}[z] = \delta_{ii}$$

Из (2.3) при $z=0$ и (2.4) получим

$$(2.5) \quad (\nu k^2 + i\omega) \delta_{ii} = \Psi_{ii}^{-1} - \Sigma \Lambda_{i\alpha\beta} \left(\frac{\delta}{\delta z_\alpha} \Psi_{\beta i}[z] \right) \Psi_{ii}^{-1}, \quad \Psi_{ij}^0 = \frac{\delta_{ij}}{\nu k^2 + i\omega}$$

$$\Psi_{ij}^{-1}(p, p') = \Psi_{ij}^{-1}(p, p'; 0) = \Psi_{ij}^{-1},$$

$$\Psi_{ij}(p, p') = \Psi_{ij}(p, p'; 0) = \Psi_{ij}$$

Второй член в правой части (2.5) аналогичен величине, описывающей турбулентную вязкость в процедуре Эдвардса.

Заменив с помощью (2.5) $\nu k^2 + i\omega$ в левых частях (2.2) и (2.3), используя (2.4), получим

$$(2.6) \quad \Sigma z_i \delta\Phi / \delta z_i = -\Sigma \Psi_{ii} F_{i_1 i_2} \Psi_{i_3 i_4} [z] z_{i_3} z_{i_4} - \frac{1}{2} \Sigma z_i \Psi_{ii} \Lambda_{i_1 i_2 i_3} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z_{i_2} \delta z_{i_3}} +$$

$$+ \Sigma z_i \Psi_{ii} \Lambda_{i_1 i_2 i_3} \left(\frac{\delta \Psi_{i_3 i_4} [z]}{\delta z_{i_2}} \right)_0 \Psi_{i_4 i_5}^{-1} \frac{\delta \Phi}{\delta z_{i_5}}$$

$$(2.7) \quad \Psi_{ij} [z] = \Psi_{ij} \Phi [z] - \Sigma \Psi_{ii} \Lambda_{i_1 i_2 i_3} \frac{\delta \Psi_{i_3 j} [z]}{\delta z_{i_2}} +$$

$$+ \Sigma \Psi_{ii} \Lambda_{i_1 i_2 i_3} \left(\frac{\delta \Psi_{i_3 i_4} [z]}{\delta z_{i_2}} \right)_0 \Psi_{i_4 i_5}^{-1} \Psi_{i_5 j} [z]$$

В уравнении (2.7) тензор Ψ_{ij} определяет истинный тензор реакции $\langle \delta u_i(p) / \delta f_j(p') \rangle$.

Запишем уравнение (2.6) в виде

$$(2.8) \quad z_i \frac{\delta \Phi}{\delta z_i} = - \Psi_{ii} F_{i_1 i_2} \Psi_{i_2 i_3} [z] z_{i_2} z_{i_3} + H[\Phi]$$

где $H[\Phi]$ равен второму и третьему слагаемым правой части (2.6), а по повторяющимся индексам подразумевается «суммирование». Взяв две вариационные производные от обеих частей (2.8), для спектрального тензора поля скорости B_{ij} получаем уравнение

$$(2.9) \quad B_{ij} = \Psi_{ii} F_{i_1 i_2} \Psi_{i_2 j}^{-1} / 2 (\delta^2 H[\Phi] / \delta z_i \delta z_j)_0$$

$$(2.10) \quad B_{ij} = - (\delta^2 \Phi / \delta z_i \delta z_j)_0$$

Как будет показано выше, функционал $\Psi_{i_2 i_3} [z]$ можно представить в виде

$$(2.11) \quad \Psi_{i_2 i_3} [z] = S_{i_3 j} [z] \Psi_{j i_2}$$

Преобразуя с помощью (2.9), (2.11) первое слагаемое правой части (2.6), получим

$$(2.12) \quad z_i \frac{\delta \Phi}{\delta z_i} = -z_i B_{ii} S_{i_2 i_1} [z] z_{i_2} + H[\Phi] - z_i \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 H[\Phi]}{\delta z_i \delta z_{i_1}} \right)_0 S_{i_2 i_1} z_{i_2}$$

$$(2.13) \quad H[\Phi] = - \frac{1}{2} z_i \Psi_{ii} \Lambda_{i_1 i_2 i_3} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z_{i_2} \delta z_{i_3}} +$$

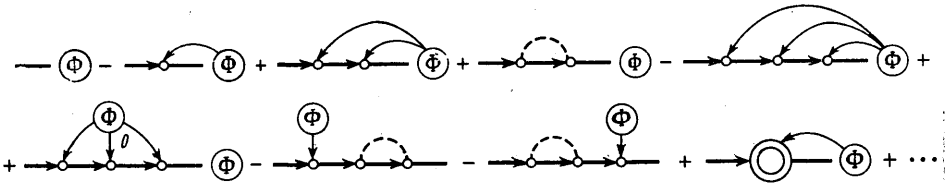
$$+ z_i \Psi_{ii} \Lambda_{i_1 i_2 i_3} \left(\frac{\delta \Psi_{i_3 i_4} [z]}{\delta z_{i_2}} \right)_0 \Psi_{i_4 i_5}^{-1} \frac{\delta \Phi}{\delta z_{i_5}}$$

Уравнения (2.7), (2.12), (2.13) определяют функционалы Φ и $\Psi_{ij} [z]$ в зависимости от функций B_{ij} и Ψ_{ij} , а последние в свою очередь могут быть найдены из уравнений (2.9) и (2.3) при $z=0$

$$(2.14) \quad \Psi_{ij} = \Psi_{ij}^0 - \Psi_{ii} \Lambda_{i_1 i_2 i_3} (\delta \Psi_{i_3 j} [z] / \delta z_{i_2})_0$$

Таким образом, полученная система уравнений (2.7), (2.12), (2.13), (2.9), (2.14) замкнута.

Функции B_{ij} и Ψ_{ij} , описывающие нелинейное взаимодействие гармоник поля друг с другом, а также и с внешним полем, можно сопоставить с эффективными величинами квантовой теории, учитывающими взаимодействие частиц и поля. В то же время функции, описывающие квазилинейные процессы в среде, соответствуют затравочным величинам в квантовой теории. Такой же величиной фактически является и $\Lambda_{i_1 i_2 i_3}$, которая учитывает «адиабатические» взаимодействия волн различных масштабов, сводящиеся к простому переносу мелкомасштабных неоднородностей крупномасштабными. В то же время ясно, что в среднем деформация волн с большими волновыми числами под действием таких же по масштабу компонент будет значительно больше, чем их деформация крупномасштабной волной.



Фиг. 1

Поэтому вместо $\Lambda_{i_1 i_2 i_3}$ введем обобщенную вершинную часть $\Pi_{i_1 i_2 i_3}$, уже нужным образом описывающую статистическое взаимодействие между гармониками поля скорости. Для этого определим вершину $\Gamma_{i_1 i_2 i_3}$

$$(2.15) \quad \Lambda_{i_1 i_2 i_3} = \Pi_{i_1 i_2 i_3} - \Gamma_{i_1 i_2 i_3}$$

и впоследствии получим различные приближения для величины Γ . Будем пока считать, что $\Gamma \sim \Pi^2$.

Найдем приближенные решения системы функциональных уравнений (2.7), (2.11), (2.12). Используя метод графического изображения функций и операторов, запишем решение уравнения (2.7) в виде ряда по степеням Π (фиг. 1). На фиг. 1 жирной сплошной линией изображена функция Ψ_{ij} , штриховой — B_{ij} ; светлый и двойной кружки, точка относятся соответственно к $\Pi_{i_1 i_2 i_3}$, $\Gamma_{i_1 i_2 i_3}$, $\Lambda_{i_1 i_2 i_3}$, причем входящая в вершины стрелочка обозначает первый выделенный индекс i_1 в вершинах. Изогнутые стрелки, выходящие из Φ , соответствуют вариационному дифференцированию функционала $\Phi[z]$. Производные могут браться и при $z=0$.

Из фиг. 1 легко видно, что (2.11) выполняется и нетрудно получить $S_{ij}[z]$.

Решение уравнения (2.12) запишем в виде ряда Грама — Шарлье, в котором нулевым приближением служит гауссовский характеристический функционал с истинным спектральным тензором B_{ij} . При этом для простоты будем считать, что среднее значение скорости равно нулю, так что $(\delta\Phi / \delta z_i)_0 = 0$

$$(2.16) \quad \Phi[z] = \Phi_0[z] (1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots), \quad \Phi_0[z] = \exp(-1/2 z_i B_{ij} z_j)$$

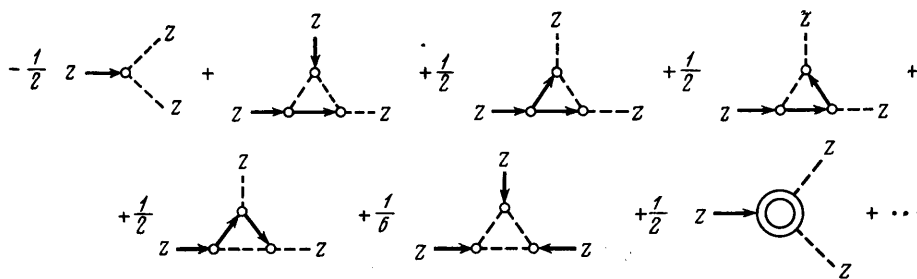
$$\varphi_1 = z_i z_j z_n Q_{ijn}^{(3)}, \quad \varphi_2 = z_i z_j z_n z_m Q_{ijnm}^{(4)}$$

Подставляя (2.16) в (2.7), (2.12), используя соотношение на фиг. 1, можно найти φ_1 , φ_2 и т. д. (фиг. 2). На фиг. 2 функциональный аргумент z_i , стоящий у одного из концов сплошной или штриховой линии, вместе с этими линиями обозначает суммы $z_i \Psi_{ij}$ и $z_i B_{ij}$. Не выписаны члены более высоких порядков по Π .

Ясно, что в слагаемое $\varphi_n \sim z^{n+2}$ в наименьшем порядке входят члены, пропорциональные Π^n . Подстановка найденных выражений для функционалов $\Phi[z]$ и $\Psi_{ij}[z]$ в (2.9), (2.14) дает замкнутые уравнения для функций B_{ij} и Ψ_{ij} .

А. Ограничиваясь в выражениях на фиг. 1, 2 членами нулевого и первого порядков по $\Pi = \Lambda$, получим уравнения, изображенные на фиг. 3 (до вертикальных черточек). Здесь простая линия относится к невозмущенной функции Грина (2.5), а прямоугольник — к спектральному тензору поля внешних сил F_{ij} . При этом считали, что $\Gamma = 0$.

Уравнения фиг. 3 были получены в [13] с помощью допущения, что основную роль в нелинейном взаимодействии трех компонент Фурье поля скорости, таких, что $p = p_1 + p_2$, играют прямые взаимодействия. Это же в



Фиг. 2

данном приближении следует из вида функционалов фиг. 2, в которых опущены члены выше первого порядка по Λ , описывающие не прямое взаимодействие волн. Рассматриваемое приближение было получено также Уайлдом (см. [4, 5]).

Б. Учтем теперь все выписанные на фиг. 1, 2 члены в функционалах $\Phi[z]$ и $\Psi_{ij}[z]$, т. е. пренебрегаем членами выше третьего порядка по Π . Тогда приняв, что для вершины Γ выполняется соотношение $\Gamma \sim \Pi^3$, так что на фиг. 2 сократятся третья, четвертая, пятая, седьмая диаграммы, из (2.9), (2.14) и (2.15) получим уравнения для B_{ij} , Ψ_{ij} и $\Pi_{i\alpha\beta}$ (фиг. 3).

Таким образом, совместной с характеристическим функционалом, в котором удержаны члены, описывающие, кроме прямых взаимодействий, также взаимодействия следующих порядков — посредством одного и двух волновых векторов, является система уравнений относительно B_{ij} , Ψ_{ij} и $\Pi_{i\alpha\beta}$, приведенная на фиг. 3. Вместе с этим в отличие от приближения, рассмотренного в А, взаимодействие тройки векторов, для которых $p = p_1 + p_2$, происходит неодинаково при различных соотношениях величин p , p_1 , p_2 в силу наличия весового множителя в эффективной вершине Π .

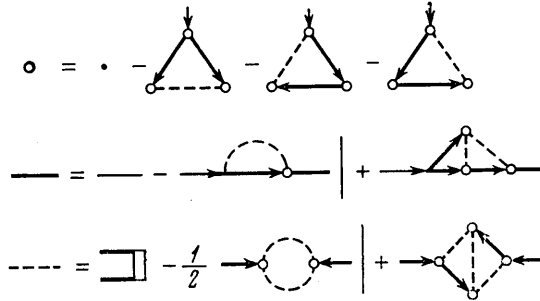
Система, аналогичная фиг. 3, была приведена в [14]. Отметим, что уравнениям, рассмотренным в [15], не отвечает функционал, который можно было бы получить, отбросив какие-либо члены, выписанные на фиг. 2.

Нетрудно продолжить описанную выше процедуру для получения следующих членов рядов для функционалов $\Phi[z]$, $\Psi_{ij}[z]$.

3. Как следует из приведенного выше вывода уравнений, выписанных на фиг. 3, функция Γ определяется с некоторым произволом. Так, определив Γ таким образом, что не все из третьей, четвертой и пятой диаграмм фиг. 2 сократятся вместе с седьмой, можно получить более короткое уравнение, чем первое, из фиг. 3. Зато в остальных двух появятся дополнительные диаграммы четвертого порядка по Π . Заметим, что эти уравнения в отличие от первого содержат в правых частях бесконечную последовательность диаграмм, так что разложение (2.16) имеет диаграммы любых степеней по Π . Обрыв этих уравнений (для Ψ_{ij} и B_{ij}), а значит, и соответствующих рядов для Φ и $\Psi_{ij}[z]$ (например, до приведенных на фиг. 1, 2) приводит к двум видам гипотез, связанным с распределением вероятностей поля скорости и с характером связи функции Грина и поля скорости. Пер-

вый вид гипотез необходим для обрывания ряда для характеристического функционала Φ , второй вид — для обрывания ряда для функционала $\Psi_{ij}[z]$. Это же отмечалось и в работе [10], где были указаны некоторые из гипотез и следствия из них.

Ясно, что если в правую часть первого соотношения фиг. 3 добавить диаграммы более высоких порядков (например, пятого) или, наоборот, положить $\Gamma=0$, как в приближении А, то приведенное выше рассуждение остается в силе.



Фиг. 3

Выше уже отмечалось, что приближенные уравнения для функции B_{ij} и Ψ_{ij} , чтобы быть обоснованными, должны удовлетворять целому ряду требований. Одним из основных, по-видимому, является требование сохранения квадратичного интеграла энергии. В частности, это подтверждено в работах [16, 17], в которых для систем гидродинамического типа, т. е. квадратично-нелинейных и сохраняющих интеграл энергии и фазовый объем, был получен аналог колмогоровского каскадного процесса передачи энергии по спектру.

При изменении полной энергии турбулентности под действием вязкости и внешних сил между гармониками поля скорости может происходить лишь обмен энергией. Значит

$$\int (k_\alpha \Delta_{i\beta} + k_\beta \Delta_{i\alpha}) \delta(k - k_1 - k_2) \langle u_\alpha(k_1, t) u_\beta(k_2, t) u_i(-k, t) \rangle dk dk_1 dk_2 = 0 \tag{3.1}$$

где $u_i(k, t)$ — фурье-образ поля скорости. Уравнение (3.1) всегда выполняется, если

$$\int (k_\alpha \Delta_{i\beta} + k_\beta \Delta_{i\alpha}) \delta(k + k_1 + k_2) \langle u_\alpha(k_1, \omega_1) u_\beta(k_2, \omega_2) u_i(k, \omega) \rangle dk dk_1 dk_2 = 0 \tag{3.2}$$

$$\int (k_\alpha \Delta_{i\beta} + k_\beta \Delta_{i\alpha}) \delta(k + k_1 + k_2) \times \left(\frac{\delta^3 \Phi}{\delta z_\alpha(k_1, \omega_1) \delta z_\beta(k_2, \omega_2) \delta z_i(k, \omega)} \right)_0 dk dk_1 dk_2 = 0 \tag{3.3}$$

Нетрудно видеть, что для выполнения (3.3) достаточно соленоидальности третьей производной функционала Φ по z в нуле по всем волновым аргументам

$$k_\alpha \left(\frac{\delta^3 \Phi}{\delta z_\alpha(k, \omega) \delta z_\beta(k_1, \omega_1) \delta z_i(k_2, \omega_2)} \right)_0 = 0 \tag{3.4}$$

Убедимся, что приведенный на фиг. 2 функционал $\Phi[z]$ удовлетворяет условию (3.4). Действительно, из приближенных уравнений для функций

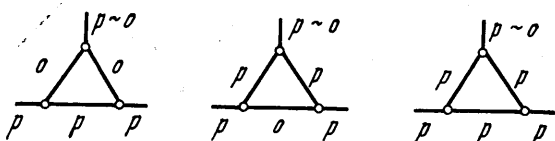
B_{ij} и Ψ_{ij} фиг. 3, получившихся из функционалов фиг. 1, 2 и точных уравнений (2.9), (2.14), следует:

$$k_\alpha \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Pi_{\beta, mn}(\mathbf{k}'; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = k_\alpha \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Lambda_{\beta, mn}(\mathbf{k}'; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \\ = k_\alpha \Psi_{\alpha\beta}^0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Lambda_{\beta, mn}(\mathbf{k}'; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 0$$

так как по определению вершинной части

$$k_\alpha \Pi_{\alpha, mn}(\mathbf{k}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = k_\alpha \Lambda_{\alpha, mn}(\mathbf{k}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 0, \quad k_\alpha B_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 0$$

Перейдем к исследованию приближенной системы уравнений фиг. 3 для функций B_{ij} , Ψ_{ij} и $\Pi_{i, \alpha\beta}$. Если в них заменить эффективную вершину простой, то, как было показано в [13], уравнения не дают колмогоровской



Фиг. 4

автомодельности для инерционного диапазона волновых чисел. Причина этого разъяснена в [12] и заключается в том, что в схеме Крейчнана увеличивается влияние крупномасштабных пульсаций (волн с малыми \mathbf{k} , ω) на эволюцию мелкомасштабных неоднородностей (волн с большими \mathbf{k} , ω). В работе [15] было сделано предположение, что недостатки схемы Крейчнана могут быть исправлены введением эффективной вершины $\Pi_{i, \alpha\beta}(p; p_1, p_2)$, причем, если один из аргументов p, p_1, p_2 этой функции намного меньше двух других, то $|\Pi| \ll 1$. Интересно, что это же требование, как было показано в [14], необходимо для согласования гипотезы подобия Колмогорова с уравнениями фиг. 3.

Так как в [15] был исследован вклад в уравнение для эффективной вершинной части Π только одной треугольной диаграммы, что не правомерно, рассмотрим все первое уравнение, выписанное на фиг. 3. Решение ищем в виде

$$\Pi_{i, \alpha\beta}(p; p_1, p_2) = \Lambda_{i, \alpha\beta}(p; p_1, p_2) \Pi(p; p_1, p_2)$$

и пусть один из аргументов p, p_1, p_2 мал по сравнению с другими. Тогда, предполагая, что $\Pi(p; p_1, p_2) \sim 1$, если все аргументы одного порядка (это значит, что волновые пакеты одного масштаба одинаково взаимодействуют друг с другом), и учитывая, что в каждой вершине $p = p_1 + p_2$, выпишем порядок вклада различных областей интегрирования в правую часть первого уравнения фиг. 3. Основными являются следующие вклады, представленные на фиг. 4. Вершину, где $p' \sim 0$, можно взять любую из трех; аргумент p достаточно большой, например, \mathbf{k} или ω находятся в инерционном диапазоне. Наконец, одна из внутренних линий соответствует $B_{ij}(p, p') = B_{ij}(p) \delta(p + p')$, а две другие — $\Psi_{ij}(p, p') = \Psi_{ij}(p) \delta(p - p')$. Последние соотношения выражают однородность турбулентности, которая предполагается.

Таким образом, выписывая вклады графов фиг. 4, получаем уравнение для сокращения вершины Λ в правой части первого уравнения фиг. 3

$$(3.5) \quad \Pi^2 \{ (\Psi k)_0^2 B_p + (\Psi k)_0 (\Psi k)_p B_0 \} + \\ + \Pi^3 \{ (\Psi k)_p^2 B_0 + (\Psi k)_0 (\Psi k)_p B_p \} + \Pi \{ (\Psi k)_p^2 B_p \} \sim 1$$

$$\Pi \sim \Pi(0; p, p) \sim \Pi(p; 0, p) \sim \Pi(p; p, 0)$$

$$B_0 = B_{ij}(0) \sim u_0^2, \quad B_p = B_{ij}(p) \sim u^2$$

$$(\Psi k)_0 = (\Psi k) \quad (p \rightarrow 0), \quad (\Psi k)_p \sim (\Psi_{ij} \Lambda_{j, \alpha\beta}) \sim (\Psi_{ij} k)$$

Перепишем (3.5), обозначая $q = (\Psi k)_0 / (\Psi k)_p$

$$(3.6) \quad \Pi^3 \left\{ \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} \frac{u^2}{u_0^2} \right\} + \Pi^2 \left\{ \frac{u^2}{u_0^2} + \frac{1}{q} \right\} + \Pi \frac{u^2}{q^2 u_0^2} \sim \frac{1}{u_0^2 (\Psi k)_0^2}$$

Выписывая вклады основных областей интегрирования в диаграммах правой части уравнения для функции Грина фиг. 3, получим соотношение для величины $(\Psi k)_0$

$$(\Psi k)_0 \sim \frac{1}{\nu k_0} \left(1 + \frac{u_0^2 (\Psi k)_0^2}{(2\pi)^8} + \frac{u_0^4 (\Psi k)_0^4}{(2\pi)^{16}} \right)$$

где k_0 — волновое число энергосодержащего интервала. Заметим, что если $u_0^2 (\Psi k)_0^2 \sim (2\pi)^8$, то при очень больших числах Re

$$(\Psi k)_0 / \frac{1}{\nu k_0} \sim \frac{\nu k_0}{u_0} (2\pi)^4 \sim \frac{(2\pi)^4}{Re} \ll 1$$

Относительно величины q не имеем информации. Поэтому исследуем (3.6) при всех q . При самых малых q наибольшим является первое слагаемое левой части (3.6), причем $|\Pi| < (2\pi)^{-8} \ll 1$. При увеличении q до величины порядка $(2\pi)^8 u^4 / u_0^4$ максимален третий член в (3.6), тогда $|\Pi| < (u/u_0)^2$. Если q , увеличиваясь, остается все же меньше $(u_0/u)^2$, то $|\Pi| \approx (2\pi)^{-4} u_0/u$. При дальнейшем увеличении q основными будут третья, а затем второе слагаемое левой части (3.6), причем последняя оценка остается в силе. Так как u^2 — энергия инерционного диапазона волновых чисел, то $(u/u_0)^2 \ll 1$. Пусть инерционный диапазон достаточно широк, так что $(u/u_0)^2 \gg (2\pi)^{-8}$. При этих условиях $|\Pi(p; p_1, p_2)| \ll 1$, когда один из аргументов p, p_1, p_2 становится малым по сравнению с другими.

Таким образом, функция $\Pi_{i, \alpha\beta}(p; p_1, p_2)$ оказывается обрезанным фактором для крупномасштабных пульсаций. Они выпадут из уравнений фиг. 3, и последние дадут колмогоровский спектр в инерционном диапазоне волновых чисел.

Автор благодарит А. С. Мони́на за интерес к работе и обсуждения.

Поступила 27 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
2. Keller L., Friedmann A. Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressibelen Flüssigkeit, Proc. 1-st Internat. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924. Delft, Technische Boekhandel en Drukkerij Waltman, 1925.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.
4. Wyld H. W. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid. Ann. Phys. (USA), 1961, vol. 14, No. 2.
5. Lee L. L. A formulation of the theory of isotropic hydromagnetic turbulence in an incompressible fluid. Ann. Phys. (USA), 1965, vol. 32, No. 2.
6. Филимонов М. Л. Диаграммные уравнения для вырождения турбулентности. Турбулентные течения. Тр. Всес. Симпозиума по проблемам турбулентных течений, включая геофизические приложения. (Киев, 16–21 июня 1967 г.). М., «Наука», 1970.
7. Morton J. B., Corrsin S. Consolidated expansions for estimating the response of a randomly driven nonlinear oscillator. J. Statist. Phys., 1970, vol. 2, No. 2.
8. Кузьмин Г. А. Спектр турбулентности в области больших волновых чисел. ПМТФ, 1971, № 4.
9. Kraichnan R. H. Invariant principles and approximation in turbulence dynamics. Proc. Sympos. Dynamics Fluids and Plasmas, N. Y., Acad. Press., 1967.
10. Клячкин В. И. О пространственно-временном описании стационарной и однородной турбулентности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
11. Edwards S. F. The statistical dynamics of homogeneous turbulence. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, pt 2.
12. Кадо́мцев Б. Б. Турбулентность плазмы. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4. М., Атомиздат, 1964.
13. Kraichnan R. H. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 1956, vol. 5, No. 4.
14. Кузьмин Г. А., Пагашинский А. З. Гипотеза подобия и гидродинамическое описание турбулентности. ЖЭТФ, 1972, т. 62, № 3.
15. Шутько А. В. К статистической теории турбулентности. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 5.
16. Обузов А. М. О некоторых общих характеристиках уравнений динамики атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1971, т. 7, № 7.
17. Обузов А. М. Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.