ЛИТЕРАТУРА

1. *Preice D., Treadgold D.* Some examples of the use of a conical shadowgraph the chnique. ARO CP, 1964, No. 763.
2. *Peckham D. H.* On three-dimensional bodies of delta planform wich can support plane attached shock waves. ARC CP, 1963, No. 640.
3. *Squire L. C.* Pressure distributions and flow patterns at M=4.0 on some delta wings of inverted V-cross-sections. ARC RM, 1964, No. 3373.
4. *Pennelegion L., Cach R. F.* Preliminary measurements in shock tunnel of shock angle undersurface pressure related to a Nonweiler wing. ARC CP, 1963, No. 684.
5. *Гонор А. Л., Швец А. И.* Исследование распределения давления на некоторых звездообразных телах при числе M=4. ПМТФ, 1965, № 6.
6. *Küchemann D.* Hypersonic aircraft and their aerodynamic problems. Progress Aeronaut. Sci. Perg. Press., 1965, vol. 6.
7. *Гонор А. Л., Швец А. И.* Исследование скачков уплотнения при обтекании звездообразных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
8. *Гонор А. Л., Швец А. И.* Обтекание *V*-образных крыльев при числе M=4. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
9. *Келдыш В. В.* Исследование течения в окрестности *V*-образных крыльев, образованных поверхностями тока за плоским скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
10. *Kamimoto G., Venaka U.* Measurements of the hypersonic aerodynamic characteristics for several kinds of wave riders. Dep. of Aeronaut. Engin, Kyoto Univ., C. P., 1968, No. 25.
11. *Гонор А. Л., Казаков М. И., Швец А. И.* Экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания *V*-образных крыльев. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 1.
12. *Зайцев Ю. И., Келдыш В. В.* Особые случаи течения вблизи сверхзвуковой кромки и линии пересечения скачков уплотнения. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, № 1.
13. *Майкапар Г. И.* О волновом сопротивлении неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
14. *Nonveiler T.* Aerodynamic problems of manned space vehicles. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1959, vol. 63, pp. 521—528.

УДК 533.951.2/3

К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ СВЕТА ТУРБУЛЕНТНЫМИ ПОТОКАМИ

С. П. БАКАНОВ

(*Москва*)

В гидродинамическом приближении рассмотрена задача о колебаниях плотности заряженных частиц в низкотемпературной плазме, вызванных колебаниями нейтральной компоненты при постоянной температуре. Получена связь между фурье-компонентами пульсаций электронной плотности и скорости нейтралов. Показано, что в условиях, когда средняя плотность электронов отличается от равновесной, реализуются три области решений, существенно различающихся между собой. Полученные результаты позволяют уточнить теорию рассеяния света турбулентной средой.

Оптические методы измерения пульсационных характеристик турбулентного потока основаны на зависимости показателя преломления среды от свойств потока. В частности, рассеивающие свойства ионизованного газа определяются, главным образом, концентрацией свободных электронов. В оптически почти прозрачной среде со случайными изменениями диэлектрической проницаемости интенсивность рассеяния тесно связана с корреляционной функцией пульсаций электронной плотности.

При анализе экспериментов по оптической диагностике турбулентных потоков ионизованного газа, в частности гиперзвуковых потоков при обтекании тел, течений в трубах и т. п., обычно предполагается, что пульсации плотности электронов, определяющие оптические свойства среды, линейно связаны с пульсациями скорости (следовательно, плотности, температуры и т. д.) основной, нейтральной компоненты газа. Ниже показано, что такое предположение реализуется лишь в одном из частных случаев.

Рассмотрим задачу о колебаниях плотности свободных электронов в низкотемпературной изотермической квазинейтральной плазме, которая возмущается турбулентными пульсациями скорости нейтральных частиц $\mathbf{v}_m$. В квазигидродинамическом приближении [1] имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t}+(\mathbf{v}_e\nabla)\mathbf{v}_e=\frac{e}{m}\mathbf{E}+\nu_e(\mathbf{v}_m-\mathbf{v}_e)-\frac{1}{mn_e}\nabla p_e \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}+(\mathbf{v}_i\nabla)\mathbf{v}_i=-\frac{e}{M}\mathbf{E}+\nu_i(\mathbf{v}_m-\mathbf{v}_i)-\frac{1}{Mn_i}\nabla p_i$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t}+(\mathbf{v}_m\nabla)\mathbf{v}_m=\frac{1}{Mn_m}\nabla p_m$$

Здесь v_e, v_i и v_m — скорости электронов, ионов и нейтралов соответственно, m и M — массы электронов и ионов (нейтралов), ν_e и ν_i — частоты соударений электронов и ионов с нейтралами, E — электрическое поле, T — температура газа.

Уравнение непрерывности для частиц сорта a имеет вид

$$\partial n^a/\partial t+\operatorname{div}(n_a\mathbf{v}_a)=\Gamma_a$$

где Γ_a — скорость образования частиц сорта a в единице объема.

Уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi e(n_e-n_i)$$

при $T=\mathrm{const}$ замыкает систему.

Пусть

$$\mathbf{v}_m(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)+\delta\mathbf{v}_m(\mathbf{r},t)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\langle\mathbf{v}_m(\mathbf{r},t)\rangle\delta\mathbf{v}_m(\mathbf{r},t)$ – малое отклонение.

Будем искать малые отклонения $\delta\mathbf{v}_e$, $\delta\mathbf{v}_i$, δn_a, δp_a от соответствующих осредненных значений $\mathbf{u}_e$, $\mathbf{u}_i$, $\langle n_a\rangle$, $\langle p_a\rangle$.

Тогда для средних величин получается уравнение вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t}+(\mathbf{u}_e\nabla)\mathbf{u}_e+\langle(\delta\mathbf{v}_e\nabla)\delta\mathbf{v}_e\rangle=\nu_e(\mathbf{u}_m-\mathbf{u}_e)-\frac{1}{mn}\nabla p_e$$

а для отклонений от среднего (в первом порядке теории возмущений)

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}_e}{\partial t}+(\mathbf{u}_e\nabla)\delta\mathbf{v}_e+(\delta\mathbf{v}_e\nabla)\mathbf{u}_e=\frac{e}{m}\delta\mathbf{E}+\nu_e(\delta\mathbf{v}_m-\delta\mathbf{v}_e)-\frac{1}{mn_e}\nabla\delta p_e$$

Аналогично для уравнений непрерывности

$$\frac{\partial n_a}{\partial t}+\operatorname{div}(n_a\mathbf{u}_a)+\langle\operatorname{div}(\delta n_a\,\delta\mathbf{v}_a)\rangle=\langle\Gamma_a\rangle$$

$$\frac{\partial \delta n_a}{\partial t}+\operatorname{div}(n_a\delta\mathbf{v}_a)+\operatorname{div}(\delta n_a\mathbf{u}_a)=\delta\Gamma_a$$

Наконец

$$\operatorname{div}\delta\mathbf{E}=4\pi e(\delta n_e-\delta n_i)$$

В отсутствие внешних агентов (типа ионизирующего излучения и т. п.) скорость образования частиц Γ_a зависит от температуры плазмы и концентрации частиц. При возмущении соответствующих величин происходит и возмущение Γ_a. Считая для простоты $\delta T=0$, имеем

$$\delta\Gamma_a=\sum_b\frac{\partial\Gamma_a}{\partial n_b}\delta n_b$$

где суммирование ведется по всем сортам частиц.

Рассмотрим плазму, в которой гибель заряженных частиц обусловлена в основном рекомбинацией [1]

$$\Gamma_e=k_1n_m^2-\rho n_en_i=-\Gamma_m$$

где k_1 – скорость реакции ионизации ударами тяжелых частиц, ρ – коэффициент рекомбинации.

Тогда

$$\frac{\partial\Gamma_e}{\partial n_e} = -\rho n_i, \quad \frac{\partial\Gamma_m}{\partial n_m} = -2k_1 n_m + n_e n_i \frac{\partial\rho}{\partial n_m} \tag{2}$$

Учитывая условия равновесия ($\Gamma_a=0$, $n_e=n_{e0}$) и $n_e \approx n_i$, имеем

$$\frac{\partial\Gamma_m/\partial\ln n_m}{\partial\Gamma_e/\partial\ln n_e} = 2\frac{n_{e0}^2}{n_e^2} - \frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln n_m} \tag{3}$$

Полагая, что характерные размеры неоднородностей средних величин велики по сравнению с размерами пульсаций, имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\delta\mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e\nabla)\delta\mathbf{v}_e = \frac{e}{m}\delta\mathbf{E} + \nu_e(\delta\mathbf{v}_m - \delta\mathbf{v}_e) - \frac{1}{mn_e}\nabla(T_e\delta n_e)\\
&\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u}_i\nabla)\delta\mathbf{v}_i = -\frac{e}{M}\delta\mathbf{E} + \nu_i(\delta\mathbf{v}_m - \delta\mathbf{v}_i) - \frac{1}{Mn_i}\nabla(T_i\delta n_i)\\
&\frac{\partial\delta\mathbf{v}_m}{\partial t} + (\mathbf{u}_m\nabla)\delta\mathbf{v}_m = -\frac{1}{Mn_m}\nabla(T\delta n_m)\\
&\frac{\partial\delta n_a}{\partial t} + n_a\,\mathrm{div}\,\delta\mathbf{v}_a + \mathbf{u}_a\,\mathrm{grad}\,\delta n_a = \sum_b \frac{\partial\Gamma_a}{\partial n_b}\delta n_b\\
&\mathrm{div}\,\delta\mathbf{E} = 4\pi e(\delta n_e - \delta n_i)
\end{aligned} \tag{4}$$

Решение системы (4) будем искать в виде $\sim\exp[i(kr-\omega t)]$.

Положив $\Omega_a=\omega-\mathbf{k}\mathbf{u}_a$ и считая $\Omega_a\approx\Omega$ одинаковыми для частиц любого сорта (что достаточно хорошо выполняется при больших частотах соударений) при соблюдении условий

$$\frac{\partial\Gamma_m}{\partial n_m}, \quad \frac{\partial\Gamma_e}{\partial n_e}\frac{\delta n_e}{\delta n_m} \ll \Omega \ll \nu_i, \quad \frac{n_e}{n_m} \ll 1 \tag{5}$$

имеем с учетом (3)

$$\frac{\delta n_e}{n_e} = \left\{1 - \frac{2i}{\Omega}\frac{\partial\Gamma_e}{\partial n_e}\left(\frac{n_{e0}^2}{n_e^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln n_m}\right)\right\}\frac{(\mathbf{k}\delta\mathbf{v}_m)}{\Omega}\left[1 - \frac{2i}{\Omega}\frac{\partial\Gamma_e}{\partial n_e}\right]^{-1} \tag{6}$$

Частота собственных колебаний системы Ω определяется главным образом колебаниями нейтральной компоненты. Дисперсионное уравнение колебаний имеет вид

$$\Omega\left(\Omega - i\frac{\partial\Gamma_m}{\partial n_m}\right) = k^2 v_s^2 \tag{7}$$

где v_s – скорость звука.

Таким образом, с учетом (3) и (7) имеем

$$\frac{\delta n_e}{n_e} = \begin{cases}
\pm\dfrac{(\mathbf{k}\delta\mathbf{v}_m)}{kv_s} & \text{при } \dfrac{kv_s}{\rho n_e} \gg 1\\[2ex]
\pm\left(\dfrac{n_{e0}^2}{n_e^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\ln\rho}{\partial\ln n_m}\right)\dfrac{(\mathbf{k}\delta\mathbf{v}_m)}{kv_s} & \text{при } \dfrac{kv_s}{\rho n_e} \ll \dfrac{n_{e0}^2}{n_e^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\ln\rho}{\partial\ln n_m}\\[2ex]
-\dfrac{1}{2}\dfrac{(\mathbf{k}\delta\mathbf{v}_m)}{\rho n_e} & \text{при } 1 \gg \dfrac{kv_s}{\rho n_e} \gg \dfrac{n_{e0}^2}{n_e^2} - \dfrac{\partial\ln\rho}{\partial\ln n_m}
\end{cases} \tag{8}$$

Для ионизованного воздуха, где рождение и гибель частицы происходят по схеме $N+O \rightleftharpoons NO^+ + e$ можно принять $\partial\rho/\partial n_m=0$, формула (8) принимает более простой вид

$$
(9)\qquad \frac{\delta n_e}{n_e}=\begin{cases}\pm\dfrac{\mathbf{k}\delta\mathbf{v}_m}{kv_s} & \text{при}\quad \dfrac{kv_s}{\rho n_e}\gg 1\\[2ex] \pm\dfrac{n_{e0}^2}{n_e^2}\dfrac{\mathbf{k}\delta\mathbf{v}_m}{kv_s} & \text{при}\quad \dfrac{kv_s}{\rho n_e}\ll\dfrac{n_{e0}^2}{n_e^2}\\[2ex] -\dfrac{i}{2}\dfrac{\mathbf{k}\delta\mathbf{v}_m}{\rho n_e} & \text{при}\quad 1\gg\dfrac{kv_s}{\rho n_e}\gg\dfrac{n_{e0}^2}{n_e^2}\end{cases}
$$

Итак, в неравновесных условиях можно выделить три области:

1) область, где справедлива обычно принимаемая зависимость $\delta n_e\sim\delta v_m$;

2) область, где $\delta n_e\sim n_e^{-1}$;

3) область, где δn_e не зависит от n_e, но зависит от $k=2\pi/l$.

Когда $n_{e0}\sim n_e$, область 3) исчезает, а результаты областей 1) и 2) совпадают. Таким образом, зависимость интенсивности рассеянного ионизованным газом света от средней плотности свободных электронов и длины волны оказывается существенно различной.

При использовании полученных результатов следует иметь в виду, что рассмотренное гидродинамическое приближение справедливо для пульсаций, размеры которых удовлетворяют условию

$$\nu_e\gg k\sqrt{T/m},\qquad \text{т. е. } l\gg 10^{16}/n_m\ (см)$$

Автор благодарит А. А. Рухадзе за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 16 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме, Изд. 2. М., «Наука», 1967.

УДК 531/534:0.61.3

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. М. В. ЛОМОНОСОВА

СЕМИНАРЫ

Семинар по численным методам решения задач аэрогидродинамики под руководством Г. И. Петрова, Г. Ф. Теленина, Л. А. Чудова, Г. С. Рослякова

6 I 1972. **У. Г. Пирумов** (Москва). *Обратная задача теории сопла Лаваля и численное решение внутренних задач газовой динамики.*

Дана постановка обратной задачи теории сопла Лаваля, обобщенная на случай пространственных до- и сверхзвуковых течений. Построены некоторые асимптотические решения, включающие в себя разложение в ряд по функции тока в окрестности поверхности, на которой задаются данные Коши, разложение в окрестности прямолинейной звуковой линии и др. Для решения обратной задачи разработана неявная трехточечная схема с переменным шагом на слое, приспособленная для решения некорректной задачи Коши.

С использованием предложенной схемы проведено большое число расчетов течений в соплах и каналах переменного сечения. Исследованы течения в соплах с прямолинейной и криволинейной поверхностями перехода, течения с поверхностями тангенциальных разрывов, течения с положительными градиентами давления. Исследованы течения в кольцевых каналах сложной формы, в которых может производиться поворот потока до 90°. Рассмотрены аэродинамические сопла и сопла с закруткой потока на входе. Исследованы осесимметричные до- и сверхзвуковые