

ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В ТРУБЕ

С. Л. ГОРЕЛОВ (Москва)

В данной работе на основе полного уравнения Больцмана исследуется течение разреженного газа в круглой трубе бесконечной длины. Для решения уравнения применяется метод Монте-Карло, аналогичный методу, который был применен в [1] для исследования течения газа в плоском канале. Газ движется либо под действием малого градиента давления (течение Пуазейля), либо под действием малого градиента температуры, направленного вдоль трубы.

Ранее исследование этих течений проводилось на основе модельного уравнения, в работе [2] исследовалось течение Пуазейля, а в работах [3, 4] рассматривались оба случая течения для малых чисел Кнудсена.

Пусть газ движется по круглой трубе радиуса R бесконечной длины под действием малого градиента давления $\partial p/\partial z$ или малого градиента температуры $\partial T/\partial z$ (координата z направлена вдоль трубы). Поскольку случай осесимметричный, то поле течения можно разделить на равные части с углом раствора α , которые не будут отличаться друг от друга, а на плоскостях сечения задать закон зеркального отражения молекул.

Рассматривается сектор с малым углом раствора $\Delta\alpha$. Этот случай удобен тем, что в сечении, перпендикулярном потоку, сектор с углом раствора $\Delta\alpha$ можно заменить треугольником, и тогда поле течения будет представлять собой клин высотой R , бесконечной длины, с углом раствора $\Delta\alpha \sim \Delta z/R$. Сечение клина разбивается на ячейки по x с ребром Δz . Молекулы влетают со стороны основания клина, а от его образующих отражаются зеркально. От основания клина молекулы отражаются диффузно, т. е. с функцией распределения

$$(1) \quad f(x_0, \xi) = f^{(0)}[1 - zq(\xi)], \quad \xi_x > 0, \quad f^{(0)} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right) \exp \left(- \frac{m\xi^2}{2kT_0} \right)$$

Здесь ξ — скорость молекулы, x, z — координаты, m — масса молекулы, t — постоянная Больцмана, n_0, T_0 — характерные плотность и температура. В случае течения Пуазейля $q(\xi) = \partial \ln p/\partial z$, в случае течения под действием градиента температуры

$$q(\xi) = (m\xi^2/2kT_0 - 5/2) \partial \ln T/\partial z.$$

Решение уравнения Больцмана ищется в виде

$$(2) \quad f(x, \xi) = f^{(0)}[1 + \varphi(x, \xi) - zq(\xi)] = F(x, \xi) - zf^{(0)}q(\xi)$$

Здесь $\varphi(x, \xi)$ — малая величина, квадратом которой можно пренебречь. Уравнение Больцмана в этом случае можно записать так:

$$(3) \quad \xi_x \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x} - \xi_z f^{(0)}q(\xi) = \int [F(x, \xi')F(x, \xi_1') - F(x, \xi)F(x, \xi_1)] gb db d\epsilon d\xi_1$$

Здесь ξ' и ξ_1' — скорость молекул после столкновения, $g = |\xi - \xi_1|$ — относительная скорость молекул при столкновении, b и ϵ — прицельное расстояние и угол.

Уравнение (3) можно записать в интегральной форме [5]

$$\begin{aligned} F(x, \xi) = & F(x_0, \xi) \exp \left[- \int_{x_0}^x \int \frac{1}{\xi_x} F(s, \xi_1) gb db d\epsilon d\xi_1 ds \right] + \\ & + \int_{x_0}^x \frac{\xi_z}{\xi_x} f^{(0)}q(\xi) \exp \left[- \int_t^x \int \frac{1}{\xi_x} F(s, \xi_1) gb db d\epsilon d\xi_1 ds \right] dt + \\ & + \int_{x_0}^x \int \frac{1}{\xi_x} F(t, \xi') F(t, \xi_1') \exp \left[- \int_t^x \int \frac{1}{\xi_x} F(s, \xi_1) gb db d\epsilon d\xi_1 ds \right] gb db d\epsilon d\xi_1 dt \end{aligned}$$

Уравнение (4) решается методом последовательных приближений

$$(4) \quad F^{(0)}(x, \xi) = f^{(0)}, \quad F^{(k)}(x, \xi) = F^{(k-1)}(x, \xi) + M^{(k-1)}(x, \xi) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{x_0}^x \int \frac{1}{\xi_x} F^{(k-1)}(t, \xi') F^{(k)}(t, \xi_1') G^{(k-1)}(\xi, t, x) gb db d\varepsilon d\xi_1 dt \\
 (5) \quad & (F^* = F(x_0, \xi)) \\
 & G^{(k-1)}(\xi, t, x) = \exp \left[- \int_t^x \int \frac{1}{\xi_x} F^{(k-1)}(s, \xi_1) gb db d\varepsilon d\xi ds \right] \\
 & M^{(k-1)}(\xi, x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{\xi_z}{\xi_x} f^{(0)} q(\xi) \times \\
 & \times \exp \left[- \int_t^x \int \frac{1}{\xi_x} F^{(k-1)}(s, \xi_1) gb db d\varepsilon d\xi ds dt \right]
 \end{aligned}$$

Уравнение (5) – линейное интегральное. Пусть сходится метод последовательных приближений решения уравнения (5), т. е. решение $F^{(k)}$ может быть представлено в виде сходящегося ряда

$$\begin{aligned}
 F^{(k)} &= \sum_{i=0}^{\infty} F_i^{(k)}, \quad F_0^{(k)} = F^* G^{(k-1)} + M^{(k-1)} \\
 (6) \quad F_i^{(k)} &= \int_{x_0}^x \int \frac{1}{\xi_x} F^{(k-1)}(t, \xi') F_{i-1}^{(k)}(t, \xi_1') G^{(k-1)}(\xi, t, x) gb db d\varepsilon d\xi_1 dt
 \end{aligned}$$

Вычисляется макроскопическая скорость u_z , направленная вдоль оси z

$$u_z = \frac{1}{n} \int \xi_z F(x, \xi) d\xi$$

В k -м приближении

$$\begin{aligned}
 u_z^{(k)} &= \frac{1}{n} \int \xi_z F^{(k)}(x, \xi) d\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n} \int \xi_z F_i^{(k)} d\xi = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} u_{zi}^{(k)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{x_0}^x \int \int F^{(k-1)}(t, \xi') F_{i-1}^{(k)}(t, \xi_1') \times \\
 & \times G^{(k-1)}(\xi, t, x) \frac{\xi_z}{\xi_x} gb db d\varepsilon d\xi d\xi_1 dt = \\
 (7) \quad &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{x_0}^x \int \int F^{(k-1)}(t, \xi) F_{i-1}^{(k)}(t, \xi_1) G^{(k-1)}(\xi, t, x) \frac{\xi_z'}{\xi_x'} gb db d\varepsilon d\xi d\xi_1 dt
 \end{aligned}$$

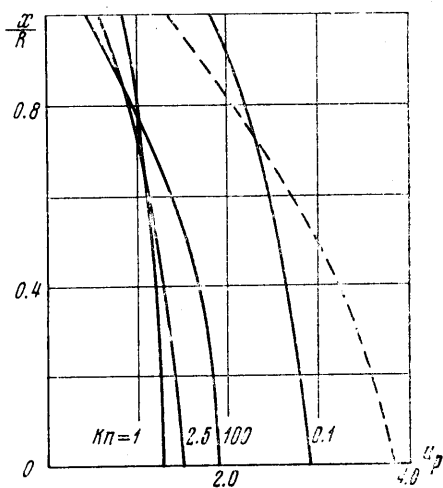
Интегралы суммы (7) вычисляются методом Монте-Карло [6]. Из равенства (2) следует:

$$(8) \quad F(x, \xi) = f^{(0)} [1 + \varphi(x, \xi)], \quad u_z = \frac{1}{n_0} \int \xi_z f^{(0)} \varphi d\xi$$

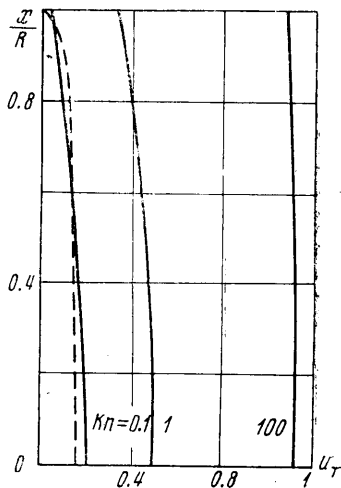
В этом случае подынтегральные выражения суммы (7) можно линеаризовать. Тогда

$$u_z^{(k)} = \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma_0[f^{(0)}] + \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma_i[\varphi]$$

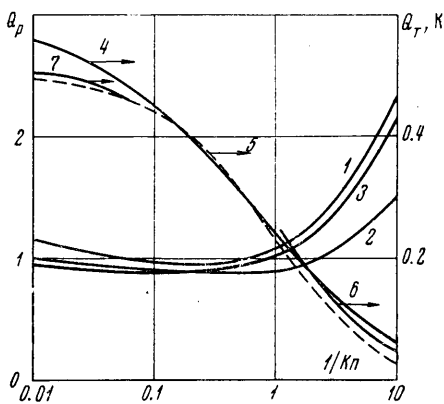
Но из (8) следует, что $\sum_{i=0}^{\infty} \Gamma_0[f^{(i)}]$ должна быть равна 0. Полагая эту сумму равной 0, избавляемся от ошибок, связанных с вычислением известной функции $f^{(0)}$.
 Все расчеты проводились для модели молекул — «максвелловых сфер», у которых сечение столкновения обратно пропорционально относительной скорости молекул.



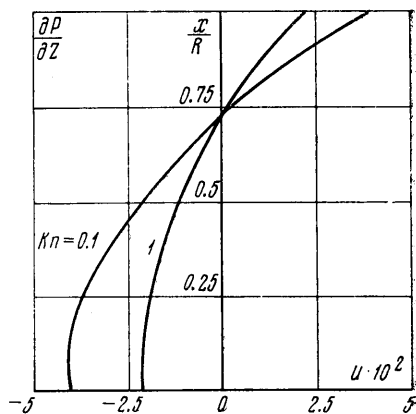
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 1 представлены профили скорости u_p в течении Пуазейля для разных чисел Кнудсена Kn

$$(9) \quad u_p = u_z \sqrt{\frac{m}{2kT_0}}, \quad Kn = \frac{\mu_0}{p_0 R} \sqrt{\frac{2kT_0}{m}}$$

где p_0 — характерное давление, μ_0 — коэффициент вязкости. На фиг. 2 представлены профили скорости u_T в течении под действием градиента температуры $u_T = u_i \sqrt{m/2kT_0}$

Пунктирными линиями на этих фигурах нанесены профили скорости для $Kn = 0.1$, взятые из [2].

На фиг. 3 представлены зависимости расходов Q_p и Q_T от числа K_n (кривая 1) в течении Пуазейля и в течении под действием градиента температуры

$$(11) \quad Q_p = 2Q \left[\frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{R^2}{p_0} \frac{dp}{dz} \sqrt{\frac{2kT_0}{m}} \right]^{-1},$$

$$Q_T = 2Q \left[\frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{R^2}{T_0} \frac{dp}{dz} \sqrt{\frac{2kT_0}{m}} \right]^{-1}$$

На фиг. 3 кривая 2 – решение модельного уравнения [1], кривая 3 – эксперимент [7] для аргона.

На фиг. 3 кривая 6 – решение модельного уравнения [2]. Кривая 7 – асимптотическое решение, которое получено Ниими и взято из [3].

На фиг. 3 кривой 5 представлена зависимость числа $K_n = \frac{dp}{p} / \frac{dT}{T}$ от числа

K_n для течения при совместном действии градиента давления и градиента температуры при нулевом расходе.

На фиг. 4 представлены профили скорости при нулевом расходе для различных чисел K_n . Интересно отметить, что в этом случае течение газа в центре трубы пропорционально направлению течения газа у стенки.

Поступила 16 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов С. Л., Коган М. Н. Течение разреженного газа между двумя параллельными пластинами. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 6.
2. Cercignani C., Sernagiotto F., Cylindrical poiseuille flow of a rearefied gas. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 1.
3. Loyalka S. K. Thermal transpiration in a cylindrical tube. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 11.
4. Sone Y., Yamamoto K. Flow of rarefied gas through a circular pipe. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 8.
5. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
6. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М., «Наука», 1971.
7. Milligan M. W. Low - density gas flow in long tubs. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 4.

УДК 533.6.07—3

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. Н. АЛЕКСЕЕВ, А. Л. ГОНОР

(Москва)

В экспериментальных исследованиях сверхзвуковых течений широкое распространение получили теневые методы визуализации, основанные на использовании приборов типа «Теплер» или других устройств аналогичного действия. Однако применение подобных приборов ограничено визуализацией в основном плоских или осесимметричных потоков. Пространственные течения, возникающие при обтекании тел сложной формы, остаются вне области применения стандартных оптических методов, особенно когда просветить поток в поперечном направлении не удается, например при исследовании течения в угле, при изучении интерференции крыла и фюзеляжа, взаимодействия подвесок летательного аппарата и т. д.

Ниже для подобного рода задач приведены результаты визуализации трехмерного течения, полученные простыми оптическими средствами, которые можно осуществить с помощью стандартного оборудования. Исследованы течения около плоского тре-