УДК 533.6.011.5

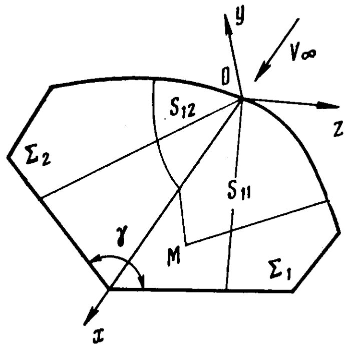
# К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КРЫЛЬЕВ

Н. Ф. ВОРОБЬЕВ

(*Новосибирск*)

Рассматривается в линейной постановке [1] задача обтекания сверхзвуковым потоком пересекающихся слабоизогнутых крыльев в случае, когда плоскости, на которые сносятся граничные условия на крыльях, образуют произвольный двугранный угол $\gamma\leqslant\pi$. Задача нахождения потенциала скорости сводится в общем случае к решению интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра, ядра которых имеют особенности [2]. При двугранном угле $\gamma=\pi/n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) потенциал скорости может быть выражен в явном виде через значения нормальных производных на гранях. Задача обтекания пересекающихся неплоских крыльев, образующих двугранные углы $\gamma=\pi/n$, с учетом концевого эффекта рассмотрена в [3, 4]. В работе автора [5] рассмотрен концевой эффект для неплоских крыльев в случае двугранного угла $\gamma=m\pi/n$. В случае обтекания сверхзвуковым потоком пересекающихся плоских крыльев, образующих произвольный угол $\gamma$, течение в зоне взаимодействия граней коническое и значение давления находится в элементарных функциях [6].

Ниже показано, что интегродифференциальные уравнения, к которым сводится задача обтекания неплоских крыльев в случае произвольного двугранного угла $\gamma$, могут быть решены методом последовательных приближений. Найдены в квадратурах приближенные решения, мало отличающиеся от точного решения во всей области взаимодействия крыльев и совпадающие с точным решением на характерных линиях (границе, ребре двугранного угла).




Фиг. 1

Движение рассматривается в системе координат, перемещающейся вместе с крылом. Система координат выбирается таким образом, что ось $x$, являющаяся осью характеристического конуса $\Gamma_0$ с вершиной в точке пересечения передних кромок, совпадает с ребром двугранного угла, а плоскость $xz$ совпадает с гранью $\Sigma_1$ (фиг. 1). Проводится преобразование координат

$$\frac{x}{x_0}(M_\infty^2-1),\qquad \frac{y}{x_0},$$

$$\frac{z}{x_0},\qquad [x_0=\sup(x\in\Sigma_i),\ i=1,2]$$

Здесь $M_\infty$ — число Маха набегающего потока, так что угол при вершине характеристического конуса равен $\pi/2$ и на крыле $|x|\leqslant1$.

Решение ищется в зоне взаимодействия крыльев, которая лежит внутри характеристического конуса $\Gamma_0$. Вне зоны взаимодействия параметры потока могут быть вычислены по формулам для изолированного крыла и считаются известными.

В случае угла $\gamma\leqslant\pi$ применение формулы Вольтерра для решения волнового уравнения сводит задачу нахождения потенциала скорости $\varphi(x,\ y,\ z)$ на крыле $\Sigma_i$ в общем случае к решению двух интегродифференциальных уравнений [2]

$$\varphi_i=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\iint\limits_{S_{ii}} v_i\frac{\partial\varphi}{\partial N}\,ds+\iint\limits_{S_{ij}}\left(v_i\frac{\partial\varphi}{\partial N}-\varphi\frac{\partial v_i}{\partial N}\right)ds\right]\tag{1}$$

$$i,\ j=1,\ 2,\qquad j\neq i,\qquad M(x,\ y,\ z)\in\Sigma_i,\qquad y^2+z^2\leqslant x^2$$

где $S_{ii}(S_{ij})$ — область зависимости точки $M\in\Sigma_i$ на крыле $\Sigma_i(\Sigma_j)$, $v_i$ — функция Вольтерра точки $M\in\Sigma_i$. После проведения в формуле (1) дифференцирования по $x$ (предварительно необходимо в двойном интеграле выполнить интегрирование по частям по переменной $\xi$) с учетом того, что на передней кромке крыльев значение потенциала равно нулю, потенциал в точке $M\in\Sigma_i$ представляется в виде композиции двух интегродифференциальных уравнений со слабой особенностью в ядре

$$\varphi_i=F_i+B_j\varphi_j,\qquad i,\ j=1.\ 2,\qquad i\neq j,\qquad y^2+z^2\leqslant x^2\tag{2}$$

$$F_i = -\sum_{n=1}^{2} \frac{l_n}{\pi} \iint\limits_{S_{in}} \frac{\alpha_n(\xi, R_n\zeta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - r_{in}^2(\zeta)}} d\xi\, d\zeta + B_j^\circ \varphi_j$$

$$B_j\varphi_j = (-1)^j \frac{Rz}{\pi} \int\limits_0^{z_{ij}} \int\limits_{l_j\zeta}^{x-r_{ij}(\zeta)} \frac{(x-\xi)\varphi_{j\xi}'(\xi, k_j\zeta, \zeta)}{r_{ij}^2(\zeta)\sqrt{(x-\xi)^2 - r_{ij}^2(\zeta)}} d\xi\, d\zeta$$

$$r_{ij}^2(\zeta) = (z-\zeta)^2 + R_i^2 z^2 + R_j^2\zeta^2, \qquad R_1=0, \quad R_2=R, \quad R=\operatorname{tg}\gamma$$

$$l_n = \sqrt{1+R_n^2}$$

Функция $F_i$ определяется через известные на поверхности крыльев $\Sigma_i$, $\Sigma_j$ значения $\partial\varphi/\partial N = \partial\varphi/\partial n = \alpha$, а также через значение $\varphi_x'$ на крыле $\Sigma_j$ в части, не попадающей внутрь характеристического конуса $\Gamma_0$, где параметры потока определяются по формулам изолированного крыла и считаются известными величинами. Оператор $B_j^\circ$, стоящий в выражении для $F_i$, имеет такой же вид, как оператор $B_j$, только интегрирование в нем проводится по части $S_{ij}^\circ$ области зависимости точки $M \in \Sigma_i$ на крыле $\Sigma_j$, не попадающей внутрь характеристического конуса $\Gamma_0$. Для гладких крыльев $(\partial\varphi/\partial n | \Sigma_i,\ \Sigma_j \in C)$ функция $F$ и ее производная $F_x'$ принадлежат к классу $C$ непрерывных функций.

В операторе $B_j$ интегрирование проводится по части $S_{ij}^1$ области зависимости точки $M \in \Sigma_i$ на крыле $\Sigma_j$, лежащей внутри характеристического конуса $\Gamma_0$, которая ограничена ребром двугранного угла и линиями пересечения характеристического конуса $\Gamma_0$ и конуса зависимости точки $M \in \Sigma_i$ с плоскостью $\Sigma_j$

$$z_{ij} = {}^1/_2[x^2 - l_i^2 z^2](xl_j - z)^{-1}$$

$z_{ij}$ — координата точки пересечения этих линий.

У оператора $B_j$ ядро имеет особенность $[(x-\xi)^2 - r_{ij}^2(\zeta)]^{-1/2}$ на характеристическом конусе точки $M(x, y, z) \in \Sigma_i$ и особенность $zr_{ij}^{-2}(\zeta)$ при $z \to 0$, $\zeta \to 0$ на ребре двугранного угла. Оператор $B_j$ определен на пространстве непрерывных функций, имеющих непрерывную производную по переменной $x$ (в линейной задаче газовой динамики производная $\varphi_x'$ пропорциональна величине давления в потоке). Как можно убедиться, оператор $B_j$ преобразует непрерывным образом это пространство в себя:

$$\sup|B_j\varphi_j| < \infty, \qquad \sup|\partial/\partial x B_j\varphi_j| < \infty$$

при $\sup|\varphi_{jx}'| < \infty$ (при оценке $|\partial/\partial x(B_j\varphi_j)|$ перед проведением операции дифференцирования по $x$ необходимо провести интегрирование по частям по переменной $\xi$).

Норма оператора $B_j$ после проведения операции интегрирования по переменной $\xi$ может быть представлена в виде

$$\|B_j\| = \left| \frac{Rz}{\pi} \int\limits_0^{z_{ij}} \frac{[(x-l_j\zeta)^2 - r_{ij}^2(\zeta)]d\zeta}{r_{ij}^2(\zeta)\sqrt{(x-l_j\zeta)^2 - r_{ij}^2(\zeta)}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{Rzx}{\pi} \int\limits_0^{z_{ij}} \frac{(x-l_j\zeta)\,d\zeta}{r_{ij}^2(\zeta)\sqrt{(x-l_j\zeta)^2 - r_{ij}^2(\zeta)}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{Rzx}{\pi} \int\limits_0^{z_{ij}} \frac{d\zeta}{r_{ij}^2(\zeta)\sqrt{1 - r_{ij}^2(\zeta)(x-l_jz_{ij})^{-2}}} \right| =$$

$$= \left| \frac{x}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{(x-l_jz_{ij})}{|R|\sqrt{(x-l_jz_{ij})^2 - l_j^2 z^2}} \right] \right|$$

Так как на крыле $0 \leqslant x \leqslant 1$ и в области взаимодействия, где $|z| \leqslant x$, значение $(x-l_jz_{ij}) > 0$, то, как можно видеть, $\|B_j\| < {}^1/_2$.

Композицию уравнений (2) можно представить в виде уравнения

$$\varphi_i = g_{ij} + D\varphi_i, \qquad g_{ij} = F_i + B_jF_j, \qquad D = B_jB_i \tag{3}$$

Используя $B_i\varphi_i$, $\partial/\partial x B_i\varphi_i \in C$, для оператора $D$ можно показать, что он переводит пространство $\varphi$, $\varphi_x' \in C$ в себя, причем норма $|D| = |B_jB_i| < 1$. В классе непрерывных вместе со своей производной по $x$ функций решение уравнения (3) единственно и может быть найдено методом последовательных приближений [7]

$$\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty} D^n g_{ij}, \quad D^n = \underbrace{D\ldots D}_{n}, \quad D^{\prime} = I$$

Это решение и каждое из последовательных приближений на границе области взаимодействия ($y^2+z^2=x^2$) совпадает с известным решением для изолированного крыла. На ребре двугранного угла ($y=z=0$) также известно [8] точное значение потенциала скорости

$$(4) \qquad \varphi^\circ(x,0,0) = -\sum_{n=1}^{2} \frac{\sqrt{1+l_n}}{\gamma} \iint\limits_{S_{on}} \frac{a_n(\xi, R_n\zeta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - l_n^2\zeta^2}} d\xi\, d\zeta$$

где $S_{0i}$ — область зависимости на крыле $\Sigma_i$ точки $M$, лежащей на ребре двугранного угла. В случае, когда в качестве нулевого приближения выбирается значение $\varphi_{i,0}(x, R_i z, z) = g_{ij}$, каждое из последовательных приближений при конечном числе итераций на ребре в общем не совпадает с точным значением

$$\varphi_{i,n}(x,0,0) = \left[\sum_{R=0}^{n} D^R g_{ij}\right]_{y=z=0} \neq \varphi^\circ(x,0,0)$$

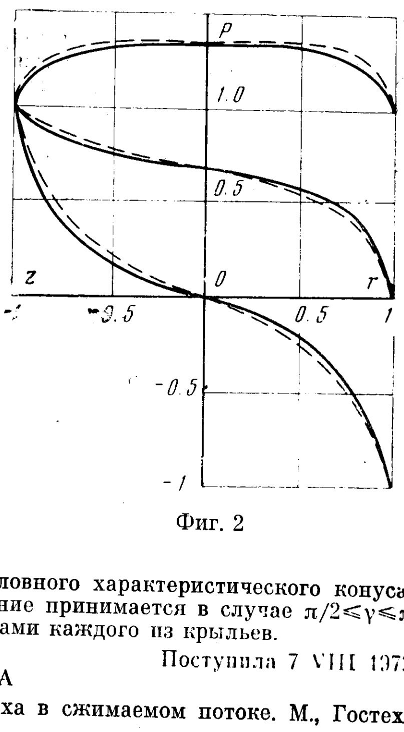
Если же в качестве нулевого приближения выбрать значение $\varphi_{i,0}(x, R_i z, z) = g_{ij} + D\varphi^\circ$, то каждое из последовательных приближений на ребре совпадает с точным значением

$$\varphi_{i,n}(x,0,0) = \left[\sum_{R=0}^{n} D^R g_{ij} + D^{n+1}\varphi^\circ\right]_{y=z=0} = \varphi^\circ(x,0,0)$$

На фиг. 2 приведены значения давления при $x=\text{const}$ на гранях двугранного угла $\gamma = {}^3/_4\pi$, составленного из прямоугольных пластин ($r^2=z^2+y^2$).

Давление отнесено к величине давления на части крыла $\Sigma_1$, лежащей вне зоны взаимодействия ($|z| \geqslant 1$). Значение давления на крыле $\Sigma_2$ вне зоны взаимодействия выбрано равным $P_2=1$; 0; $-1$. Ребру соответствует значение $z=y=0$. Пунктирной кривой нанесены значения нулевого приближения:

$$\varphi_{i,0} = F_i + B_j\varphi^\circ, \quad i, j=1, 2, \quad i \neq j,$$
$$M(x, y, z) \in \Sigma_i$$




Фиг. 2

а сплошной кривой — точное решение линейной задачи, полученное для конического течения согласно работе [6], причем на участке головного характеристического конуса, лежащего в зоне влияния обоих крыльев, давление принимается в случае $\pi/2 \leqslant \gamma \leqslant \pi$ равным алгебраической сумме давлений за скачками каждого из крыльев.

Поступила 7 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА


1. *Красильщикова Е. А.* Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М., Гостехиздат, 1952.
2. *Воробьев Н. Ф.* Обтекание сверхзвуковым потоком двух пересекающихся и двух параллельных крыльев. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1969, вып. 2, № 8.
3. *Фридлендер Б. И.* Крестообразные и Т-образные крылья конечного размаха в сжимаемом потоке. Инж. ж., 1962, т. 2, № 4.
4. *Фридлендр Б. И.* Крестообразное крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 6.
5. *Воробьев Н. Ф.* Концевой эффект при обтекании сверхзвуковым потоком двугранного угла. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1970. вып. 1, № 3.
6. *Воробьев Н. Ф., Федосов В. П.* Обтекание сверхзвуковым потоком двугранного угла (конический случай). Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин В. П.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
8. *Воробьев Н. Ф., Федосов В. П.* Применение метода Вольтерра для решения задач обтекания тел пространственной конфигурации. Аэрогазодинамика, Труды 1-й Сибирской конференции 28 июля — 2 августа 1969. М., «Наука», 1972.