

$$(l_p^{(0)} = l_{p-1}, l_0 = 0; n = 0, 1, 2, \dots)$$

где  $l_p$  можно также определять из (8) методом половинного деления или графически [3].

Произведены расчеты при следующих значениях параметров (фигура):

$$H_0 = 15 \text{ м}, h_0 = 18 \text{ м}, H_1 = 21 \text{ м},$$

$$a = 1800 \text{ м}^2/\text{сут.}, b_0 = 0,$$

$$\varepsilon_0 = 0.025 \text{ м/сут.}$$

для случая мгновенного подъема воды в канале. Принималось, что испарение происходит в течение  $t_k = 240$  сут. по закону

$$\varepsilon = 4\varepsilon_0(1-\tau)\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad h \geq h_0;$$

$$\varepsilon = 0, \quad h < h_0$$

$$\varepsilon = 4\varepsilon_0(1-\tau)\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (0 < x < \infty)$$

$$\varepsilon = 0, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (0 < x < \infty), \quad \tau = t/t_k$$

Шаг по времени был выбран равным  $\Delta t = 30$  сут. Кривая  $x=l(t)$ , на которой уровень грунтовых вод  $h(x, t)$  достигает значения  $h_0$ , находилось графическим способом. В заключение автор благодарит П. Я. Кочину за обсуждение результатов работы.

Поступила 20 VII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н. Математические методы в вопросах орошения. М., «Наука», 1969.
2. Кочина Н. Н. Об одном решении уравнения диффузии с нелинейной кривой частью. ПМТФ, № 4, 1969.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.

УДК 533.6.014

### О ФОРМЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО КОНУСА

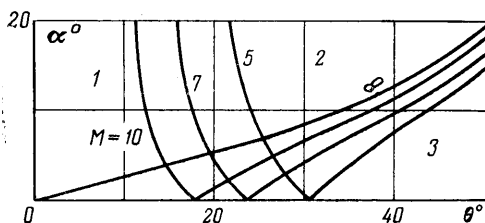
Н. В. ЗОЛотова

(Москва)

Долгое время считалось, что при несимметричном гиперзвуковом обтекании кругового конуса максимальное отклонение ударной волны от поверхности конуса всегда находится на теневой стороне. В работе [1] впервые было показано теоретически и подтверждено экспериментально, что существуют два типа расположения ударной волны в зависимости от числа  $M$  набегающего потока, угла полураствора конуса  $\theta$  и угла атаки  $\alpha$ , а именно: регулярное расположение с максимальным отклонением ударной волны от поверхности конуса на теневой стороне и обратное расположение с максимальным отклонением на наветренной стороне.

Эти результаты затем были подтверждены теоретически и экспериментально в работах [2] и [3]. В работе [3] были построены области значений  $M$  и  $\theta$  для регулярного и обратного расположения ударной волны и было показано, что такое же явление имеет место для затупленных конусов. В этих работах рассматривалось расположение ударной волны только в плоскости симметрии. При численном решении задачи методом установления в работе [4] также были получены ударные волны двух типов и, кроме того, было отмечено как интересное отклонение существование нескольких значений  $M$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ , при которых максимальное отклонение находится не в плоскости симметрии.

В настоящей работе проведено исследование формы ударной волны при несимметричном обтекании конуса гиперзвуковым потоком. На основе использования раз-



Фиг. 1

ложения искомых функций в ряд по малому параметру получено уравнение поверхности ударной волны в явном виде.

Анализ уравнения позволил установить, что в случае интенсивной ударной волны возникает аномальное расположение ударной волны относительно конуса. Выявлен диапазон изменения чисел Маха набегающего потока и геометрических параметров конуса, при которых возникает аномальное расположение ударной волны. Рассмотрен процесс перестройки расположения ударной волны с изменением параметров течения.

Получить выражение для формы ударной волны и проследить процесс перестройки ее расположения при изменении параметров можно, если использовать решение задачи об обтекании кругового конуса, полученное в работе [2]. В этой работе для формы ударной волны в первом приближении было получено следующее выражение:

$$\vartheta = \theta + \varepsilon \rho_0 \int_{\varphi'}^{\varphi_0} \frac{\delta w v_0'}{P (w_0')^2} d\varphi', \quad \delta = (v_0')^2 \left[ 1 + \frac{2a^2}{(\gamma-1)(v_0')^2} \right]$$

$$w = -\sqrt{(u_0')^2 + (w_0')^2} \sin [\sin \theta (\varphi - \varphi') + \arctg (u_0' / w_0')]$$

$$P = \rho_0 v_0^2 + \rho_0 \cos \theta \int_{\varphi'}^{\varphi} \frac{w^3 v_0'}{(w_0')^2} d\varphi'$$

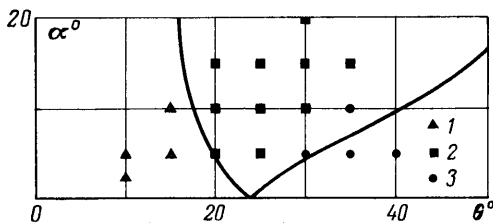
$$u_0 = V (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \cos \varphi), \quad v_0 = -V (\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta \cos \varphi)$$

$$w_0 = -V \sin \alpha \sin \varphi$$

Здесь  $V$  — скорость невозмущенного потока;  $\gamma = C_p / C_v$  — отношение удельных теплоемкостей;  $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$  — малый параметр;  $u, v, w$  — компоненты скорости набегающего потока в сферической системе координат, связанной с конусом соответственно в направлении осей  $r, \theta, \varphi$ ;  $\rho$  — плотность;  $P$  — давление.

Индекс нуля соответствует параметрам невозмущенного потока. Штрихи означают, что соответствующие параметры берутся при  $\varphi = \varphi'$ , т. е. на линии пересечения поверхности тока  $\varphi = \text{const}$  с ударной волной. Функция  $\varphi_0$ , соответствующая поверхности тока, которая подходит к поверхности конуса на линии  $\varphi = \text{const}$ , находится из следующего уравнения:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{\sin \theta} \arctg \frac{w_0(\varphi_0)}{u_0(\varphi_0)}$$



Фиг. 2

Практическое применение этой формулы для расчетов ограничено из-за сложности подынтегральных выражений. В случае малого угла атаки возникает возможность упростить это решение, введя еще и разложение по углу атаки  $\alpha$ . Подынтегральные функции раскладываются в ряд по степеням  $\alpha$ . Для удобства вычисления вводится новая переменная интегрирования

$$\xi = \varphi' - \varphi$$

$$\xi_0 = \varphi_0 - \varphi = -\frac{1}{\sin \theta} \arctg \frac{w_0(\varphi_0)}{u_0(\varphi_0)} \approx$$

$$\approx \frac{\sin \varphi}{\sin \theta \cos \theta} \alpha + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \theta} \alpha^2 + \frac{\sin \varphi \alpha^3}{\sin \theta \cos \theta} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{3} + \frac{\cos^2 \varphi \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{2}{3} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \theta} \right)$$

Если учесть, что  $\xi$  имеет порядок  $\alpha$ , и сохранить под знаком интеграла члены порядка  $\alpha$ , то получается, что в первом приближении форма ударной волны

$$\vartheta = \theta + \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{tg} \theta \left[ 1 + \frac{2}{(\gamma-1) M^2 \sin^2 \theta} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{3} \frac{\cos \varphi \varepsilon \alpha}{\cos^2 \theta} \left[ 1 + \frac{2(1-3 \cos^2 \theta)}{(\gamma-1)M^2 \sin^2 \theta} \right] + \\
& + \frac{\varepsilon \alpha^2}{\sin \theta \cos \theta} \left\{ \left[ \left( \frac{7}{12} + \frac{5}{24} \operatorname{tg}^2 \theta \right) + \right. \right. \\
& + \left. \left( \frac{17}{24} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{5}{24} \operatorname{tg}^2 \theta \right) \frac{2}{(\gamma-1)M^2} \right] - \\
& - \left[ \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{24} \operatorname{tg}^2 \theta \right) + \left( \frac{35}{24} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{24} \operatorname{tg}^2 \theta \right) \frac{2}{(\gamma-1)M^2} \right] \cos^2 \varphi \left. \right\}
\end{aligned}$$

Полученное соотношение позволяет легко рассчитать форму ударной волны для различных значений  $M$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ . Простой анализ этой формулы показывает, что при некоторых значениях параметров  $M$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$  возникает аномальное расположение ударной волны. При этих значениях параметров максимальное отклонение ударной волны от поверхности конуса находится не в плоскости симметрии.

Исходя из этого соотношения, получим условие для значения параметров  $M$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ , при которых возникает аномальное расположение ударной волны

$$|\alpha| > \left| \frac{-1/3 \operatorname{tg} \theta [(\gamma-1) \sin^2 \theta + 2(1-3 \cos^2 \theta)M^{-2}]}{(\gamma-1) \sin^2 \theta (2/3 - 1/24 \operatorname{tg}^2 \theta) + 2(35/24 \sin^2 \theta - 1/2 - 1/24 \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \theta)M^{-2}} \right|$$

С помощью этой формулы на фиг. 1 построены области значений  $\alpha$  и  $\theta$ ; соответствующие регулярному 1, аномальному 2, обратному 3 разложению ударной волны для различных значений  $M$ . Следует отметить, что с ростом  $M$ , область значений параметров, при которых волна имеет регулярное расположение, уменьшается, а для  $M = \infty$  она вообще не существует.

В тех случаях, когда это было возможно, результаты расчетов сравнивались с результатами, полученными в работе [4]. Во всех случаях получено хорошее совпадение.

На фиг. 2 результаты расчетов для  $M=7$  сопоставлены с результатами, полученными в [4], причем значки 1 — регулярное расположение, 2 — аномальное расположение, 3 — обратное расположение.

Полученные результаты позволяют рассмотреть картину перестройки расположения ударной волны.

При фиксированных  $\theta$  и  $\alpha$  расположение ударной волны с ростом  $M$  изменится следующим образом: из регулярного расположения возникнет аномальное, причем с ростом  $M$  максимальное отклонение перемещается с теневой стороны на наветренную, из аномального возникает обратное расположение с максимумом на наветренной стороне.

При фиксированных  $M$  и  $\alpha$  перестройка расположения ударной волны с ростом  $\theta$  происходит так же, как и при увеличении  $M$ .

Если зафиксировать  $M$ ,  $\theta$ , то с ростом  $\alpha$  либо расположение не изменится, либо из первоначального расположения возникнет аномальное.

В заключение автор благодарит А. Л. Гонора за внимание к работе.

Поступила 4 VII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. О расположении головной волны при несимметричном обтекании заостренного тела потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 5, стр. 117, 118.
2. Ginzler J. Two remarks on cones at angle of attack in high supersonic flow. J. Aero/Space Sci., 1962, vol. 29, No. 4, pp. 497, 498.
3. Greenberg R. A., Mrougott S. Shock wave asymmetry for cones and sphere cones at angle of attack. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 6.
4. Бабенко К. П., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
5. Гонор А. Л. Обтекание конуса под углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 7, стр. 102–105.