

получается уравнение (1.4) из работы [4]. Если в (2.9) принимается $k_1(x)=1$ и $k(z)=1$, то при учете (1.8) и (2.7) получается уравнение (3.9) из работы [1]. Уравнение (2.9) является нелинейным уравнением параболического типа. После умножения уравнения (2.9) на $\Delta\gamma/\gamma_1$, принятия $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ (т. е. $\Delta\gamma=0$ — пренебрегается различием плотностей воды и нефти) и введения в отличие от (1.8) и (2.7)

$$\tau^* = \frac{k^0 \gamma t}{m \mu_1 H}, \quad q^*(\tau^*) = \frac{\mu_2 Q(t)}{k^0 \gamma H}$$

оно становится квазилинейным уравнением первого порядка

$$\frac{\partial z^*}{\partial \tau^*} + q^*(\tau^*) \frac{d}{dz^*} \left[\frac{K(0, z^*)}{\mu_0 K(0, z^*) + K(z^*, 1)} \right] \frac{\partial z^*}{\partial x} = 0$$

интегрирование которого можно провести методом характеристик. Из нелинейного уравнения параболического типа (3.9) из [1] при $\Delta\gamma=0$ получается квазилинейное уравнение первого порядка (2.9) из [8].

Умножив уравнения (1.6) и (1.9) на $\Delta\gamma/\gamma_1$, полагая $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ (т. е. $\Delta\gamma=0$) и вводя вместо (1.8)

$$\tau^* = \frac{k^0 \gamma t}{m \mu_1 H}, \quad \Pi^* = \frac{p_0 + \gamma \sin \alpha x'}{\gamma H}$$

придем к следующей системе:

$$\partial z^*/\partial \tau^* - \nabla [k_1(x, y) K(0, z^*) \nabla \Pi^*] = 0, \quad \nabla \{k_1(x, y) [\mu_0 K(0, z^*) + K(z^*, 1)] \nabla \Pi^*\} = 0$$

Сравнение полученных уравнений с уравнениями (1.6) и (1.9) показывает, что пренебрежение различием плотностей воды и нефти ведет лишь к незначительному упрощению системы уравнений (1.6) и (1.9), определяющей пространственное перемещение ВНК в наклонном неоднородном пласте.

Поступила 7 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 4.
2. Зигангареев М. А., Теплов Ю. А. Расчеты перемещения водо-нефтяного контакта в наклонном пласте и сравнение их с данными моделирования. Тр. Всес. нефтегазового научн. исслед. ин-та, 1966, вып. 47.
3. Теплов Ю. А. О перемещении водо-нефтяного контакта в неоднородном пласте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
4. Зигангареев М. А. Движение границы раздела двух жидкостей в неоднородной пористой среде. Материалы 27-й межвузовской научной конференции математических кафедр педагогических институтов Уральской зоны. Ижевск, 1969.
5. Зигангареев М. А. О движении границы раздела двух жидкостей и фильтрации двухфазной жидкости в неоднородной пористой среде. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1970, т. 130, кн. 1.
6. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., Гостехиздат, 1947.
7. Теплов Ю. А. Дифференциальные уравнения, определяющие совместное течение нефти и подошвенной воды к скважине. Казанск. физ.-техн. ин-т. Тезисы докл. юбилейной научн. конф., посвященной 20-летию ин-та. Секции механ.-матем. н., Казань, 1966.
8. Пирвердян А. М. О движении подошвенной воды в слабо наклоненных пластах. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.

УДК 532.546

О ФИЛЬТРАЦИИ ВБЛИЗИ НОВЫХ КАНАЛОВ И ВОДОХРАНИЛИЩ

А. БЕГМАТОВ

(Ташкент)

Рассматривается фильтрация вблизи новых каналов и водохранилищ при наличии испарения, зависящего от глубины залегания грунтовых вод. При некоторых ограничениях на закон испарения для определения нестационарного перемещения уровня грунтовых вод получена система интегральных уравнений, для решения которой предложен метод последовательных приближений, а также один из численных методов. Приводится пример расчета.

При наполнении новых каналов и водохранилищ происходит подъем уровня грунтовых вод $h(x, t)$, и если первоначальный уровень H_0 расположен ниже критической глубины y_0 (расстояние от поверхности земли до уровня, начиная с которого

происходит испарение), то с некоторого момента времени $t > t_0$ появятся две области фильтрации с подвижной границей раздела $x = l(t)$, причем в области $H_1(t) = h(0, t) > h(x, t) > h(l(t), t) = h_0$ ($0 < x < l(t)$, h_0 — уровень грунтовых вод, соответствующий y_0) будет иметь место испарение и вне этой области испарение отсутствует.

Интенсивность испарения ϵ в некоторых случаях достаточно хорошо описывается формулой [1]

$$\epsilon = \epsilon_0 (h - h_0)^m, \quad h_0 < h; \quad \epsilon = 0, \quad h < h_0 \quad (m=1, 2, 3)$$

Случай $m=0, 1$ при $H_1 < h_0 \leq H_0 \leq H_2$ (H_2 — постоянный уровень на некотором конечном расстоянии) рассматривался в работе [2] при помощи другого метода. Однако в общем случае

$$(1) \quad \epsilon = \epsilon_0 f(h - h_0, t), \quad h \geq h_0; \quad \epsilon = 0, \quad h < h_0 \quad (f(h - h_0, t) = f_0(h - h_0) \eta(t), \quad 0 \leq \eta(t) \leq 1)$$

Здесь $\eta(t)$ — кусочно-непрерывная функция, которую в дальнейшем полагаем непрерывной¹, $f_0(z)$ — удовлетворяющая условию Липшица и монотонно неубывающая функция при $z > 0$, причем из физических соображений $f_0(0) = 0$ (в частном случае $f_0 = \text{const}$ последнее не имеет места); ϵ_0 — постоянная, пропорциональная интенсивности испарения с поверхности земли.

Требуется определить функцию $u(x, t) = h(x, t) - H_0$, удовлетворяющую уравнению ($x \neq l(t)$) со следующими условиями

$$(2) \quad Lu \equiv \partial u / \partial t - a \partial^2 u / \partial x^2 + bu = -\epsilon / \mu, \quad t_0 < t \leq T_0$$

$$(3) \quad u(x, t)|_{t=t_0+0} = \varphi(x), \quad u|_{x=+0} = \psi(t)$$

имеющую непрерывную производную u_x и принимающую значение $\psi_0 = h_0 - H_0$ на подвижной границе раздела $x = l(t)$, а также непрерывную функцию $l(t)$, такую, что $l(t_0) = 0$. При этом

$$\psi(t) = H_1(t) - H_0, \quad \psi'(t) \geq 0, \quad \varphi(0) = \psi(t_0) = H_1(t_0) - H_0 = \psi_0$$

Функция ϵ задана формулой (1); $b > 0$ — параметр, характеризующий переток через слабопроницаемую подошву пласта, a — коэффициент урвннепроводности при среднем значении

$$h \in [h_0, h_1], \quad h_1 = \max H_1(t) \quad (t_0 < t \leq T_0)$$

Функция $\varphi(x)$, определяющая положение уровня грунтовых вод в момент t_0 , находится из решения задачи

$$Lu = 0, \quad 0 < t \leq t_0, \quad u|_{t=+0} = 0, \quad u|_{x=+0} = \psi(t)$$

и имеет вид

$$(4) \quad \varphi(x) = u(x, t_0) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a_0}} \int_0^{t_0} \frac{\psi(\tau)}{(t_0 - \tau)^{3/2}} \exp \left[-b(t_0 - \tau) - \frac{x^2}{4a_0(t_0 - \tau)} \right] d\tau$$

где $\psi'(t) > 0$, a_0 — коэффициент урвннепроводности при среднем значении $h \in [H_0, h_0]$. Функцию $u(x, t)$ представим в виде суммы

$$(5) \quad u = u_0(x, t) + v(x, t)$$

$$(6) \quad u_0(x, t) = \frac{\exp[-b(t-t_0)]}{2\sqrt{\pi a(t-t_0)}} \int_0^\infty \varphi(\xi) E(x, \xi; t-t_0) d\xi +$$

$$+ \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_{t_0}^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left[-b(t-\tau) - \frac{x^2}{4a(t-\tau)} \right] d\tau$$

является решением задачи (2), (3) при $\epsilon = 0$, а функция $v(x, t)$ имеет вид

$$(7) \quad v(x, t) = T(x, t; t_0; u, l) = \\ = -\frac{\epsilon_0}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{\exp[-b(t-\tau)]}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}} d\tau \int_0^{l(t)} f[u(\xi, \tau) - \psi_0, \tau] E(x, \xi; t-\tau) d\xi$$

¹ В случае кусочно-непрерывной функции $\eta(t)$ задача рассматривается отдельно на каждом отрезке непрерывности.

$$\left(E(x, \xi; t - \tau) = \exp \left[-\frac{|x - \xi|^2}{4a(t - \tau)} \right] - \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4a(t - \tau)} \right] \right)$$

Кроме того, записывая условие

$$(8) \quad u(l(t), t) = \psi_0$$

в виде

$$(9) \quad l(t) = l(t) - \beta^{-1} [\psi_0 - u(l(t), t)]$$

получим систему для определения v и $l(t)$.

Пусть

$$\beta = \max \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|, \quad \alpha = \min \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right| \quad (t_0 < t \leq T_0)$$

$$0 \leq x \leq X; \quad X = \max_t l(t)$$

Применим к системе (7), (9) метод последовательных приближений

$$(10) \quad v_{m+1}(x, t) = v_{m+1} = T(x, t; t_0; u_0 + v_m, l_m), \quad v_0 = 0$$

$$l_{m+1} = l_m - \beta^{-1} \{ \psi_0 - [u_0 + v_{m+1}(l_m(t), t)] \}, \quad l_0 = 0$$

Полагая

$$\|w\| = \max_t [l + \max_{0 \leq x \leq X} |v|]$$

нетрудно получить

$$\|w_{m+1} - w_m\| \leq q \|w_m - w_{m-1}\|$$

$$q = \max_t (\lambda_{11} + \lambda_{21}, \lambda_{12} + \lambda_{22}),$$

$$\lambda_{ij} = \varepsilon_0 \lambda_{ij}^\circ(t) \quad (i, j=1, 2; i \neq j=2), \quad \lambda_{22} = 1 - (\alpha/\beta) - (\varepsilon_0/\beta) \lambda_{22}^\circ(t)$$

$$\lambda_{ij}^\circ \in C, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{ij}^\circ = 0 \quad (i, j=1, 2)$$

Отсюда следует, что, налагая определенные ограничения на функции $\psi(t)$, $\varphi(x)$ и ε_0 или t , всегда можно удовлетворить неравенству $q < 1$. Следовательно, последовательные приближения сходятся.

Приведем также один из возможных методов численного решения системы (7), (9). Разбивая рассматриваемый промежуток времени на достаточно малые интервалы $\Delta t_p = t_p - t_{p-1}$ ($p=1, 2, 3, \dots$), заменим интегралы по малому отрезку Δt_p по формуле трапеций

$$(11) \quad \int_{t_{p-1}}^{t_p} g(x, \tau) d\tau = \frac{\Delta t_p}{2} [g(x, t_p) + g(x, t_{p-1})]$$

и получим рекуррентную формулу

$$(12) \quad v(x, t_p) = \overline{T}^p T(x, t_m; t_{m-1}; u_0 + v, l) = \sum_{m=1}^p T_{m, m-1}$$

$$(13) \quad T_{p, p-1} = -\frac{\varepsilon_0 \sqrt{\Delta t_p}}{2\mu \sqrt{\pi a}} l^{-b\Delta t_p} \int_0^{t_{p-1}} f[u(\xi, t_{p-1}) - \psi_0, t_{p-1}] E(l_p, \xi; \Delta t) d\xi$$

ибо по условию $f(0, t) = 0$ (в случае $f_0 = \text{const}$ $v(x, t)$ будет известной функцией от $l(t)$); $T_{m, m-1}$ ($m=1, 2, \dots, p-1$) вычисляются по формуле (11).

Расчеты по формулам (12) можно производить, если известна $l(t_p) = l_p$. Для определения l_p , воспользовавшись (9), с учетом (11)–(13) получим сходящийся в силу сделанных выше предположений итерационный процесс [3]

$$(14) \quad l_p^{(n+1)} = l_p^{(n)} - \frac{1}{\beta} \{ \psi_0 - [u_0(l_p^{(n)}, t_p) + v(l_p^{(n)}, t_p)] \}$$

$$(l_p^{(0)} = l_{p-1}, l_0 = 0; n = 0, 1, 2, \dots)$$

где l_p можно также определять из (8) методом половинного деления или графически [3].

Произведены расчеты при следующих значениях параметров (фигура):

$$\begin{aligned} H_0 &= 15 \text{ м}, h_0 = 18 \text{ м}, H_1 = 21 \text{ м}, \\ a &= 1800 \text{ м}^2/\text{сут.}, b_0 = 0, \\ \varepsilon_0 &= 0.025 \text{ м/сут.} \end{aligned}$$

для случая мгновенного подъема воды в канале. Принималось, что испарение происходит в течение $t_k = 240$ сут. по закону

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 4\varepsilon_0(1-\tau)\tau, & 0 \leq \tau \leq 1, & h \geq h_0; \\ \varepsilon &= 0, & h < h_0 \\ \varepsilon &= 4\varepsilon_0(1-\tau)\tau, & 0 \leq \tau \leq 1 & (0 < x < \infty) \\ \varepsilon &= 0, & 0 \leq \tau \leq 1 & (0 < x < \infty), \quad \tau = t/t_k \end{aligned}$$

Шаг по времени был выбран равным $\Delta t = 30$ сут. Кривая $x=l(t)$, на которой уровень грунтовых вод $h(x, t)$ достигает значения h_0 , находилось графическим способом. В заключение автор благодарит П. Я. Кочину за обсуждение результатов работы.

Поступила 20 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.* Математические методы в вопросах орошения. М., «Наука», 1969.
2. *Кочина Н. Н.* Об одном решении уравнения диффузии с нелинейной кривой частью. ПМТФ, № 4, 1969.
3. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.

УДК 533.6.014

О ФОРМЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО КОНУСА

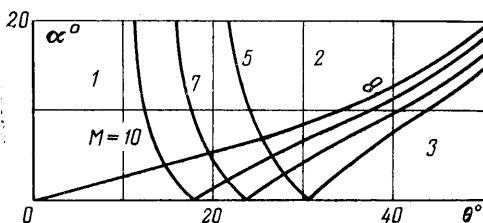
Н. В. ЗОЛотова

(Москва)

Долгое время считалось, что при несимметричном гиперзвуковом обтекании кругового конуса максимальное отклонение ударной волны от поверхности конуса всегда находится на теневой стороне. В работе [1] впервые было показано теоретически и подтверждено экспериментально, что существуют два типа расположения ударной волны в зависимости от числа M набегающего потока, угла полураствора конуса θ и угла атаки α , а именно: регулярное расположение с максимальным отклонением ударной волны от поверхности конуса на теневой стороне и обратное расположение с максимальным отклонением на наветренной стороне.

Эти результаты затем были подтверждены теоретически и экспериментально в работах [2] и [3]. В работе [3] были построены области значений M и θ для регулярного и обратного расположения ударной волны и было показано, что такое же явление имеет место для затупленных конусов. В этих работах рассматривалось расположение ударной волны только в плоскости симметрии. При численном решении задачи методом установления в работе [4] также были получены ударные волны двух типов и, кроме того, было отмечено как интересное отклонение существование нескольких значений M, θ, α , при которых максимальное отклонение находится не в плоскости симметрии.

В настоящей работе проведено исследование формы ударной волны при несимметричном обтекании конуса гиперзвуковым потоком. На основе использования раз-



Фиг. 1