11. *Owen F. K.* Transition experiments on a lfat plate at subsonic and supersonic speeds. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 3.
12. *Reshotko E.* Stability theory as a guide to the evaluation of transition data. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 6.

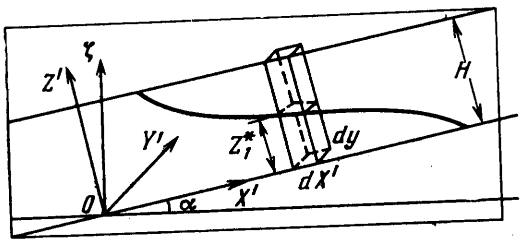
УДК 532.546

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВОДО-НЕФТЯНОГО КОНТАКТА В НАКЛОННОМ НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Ю. А. ТЕПЛОВ

(*Казань*)

В работе [1] для нахождения перемещающегося в пласте водо-нефтяного контакта (ВНК) предложено использовать две схемы предельно анизотропных пластов $k_z=\infty$ и $k_z=0$ (k_z – проницаемость по нормали к пласту), дающие оценку решения задачи для изотропного пласта. Проведенное в работе [2] сравнение результатов численного решения задачи о перемещении ВНК для обеих схем предельной анизотропии пласта с экспериментальными данными показало, что схема с $k_z=\infty$ дает результаты, весьма близкие к экспериментальным данным для изотропного пласта. В [1] при $k_z=\infty$ получены нелинейные уравнения параболического типа, определяющие плоское и осесимметричное перемещение ВНК в однородном пласте. В [3–5] при $k_z=\infty$ получены нелинейные уравнения параболического типа, определяющие плоское и осесимметричное перемещение ВНК в неоднородном пласте. Ниже рассматривается пространственное перемещение ВНК в наклонном неоднородном пласте в предположении бесконечной проницаемости по нормали к пласту. Получена система двух нелинейных уравнений в частных производных второго порядка, определяющая пространственное перемещение ВНК.



1. Рассматривается наклонный под углом α к горизонту пласт постоянной мощности H (см. фигуру), проницаемость которого $k'(x', y', z')=k_1(x'/H, y'/H)k'(z')$, где $k_1(x'/H, y'/H)$ — величина безразмерная, а $k'(z')$ имеет размерность проницаемости. Предполагается, что в пласте имеется зона, где более тяжелая вода находится в нижней части пласта, а нефть – в верхней. Пласт и жидкости считаются несжимаемыми, фильтрация — подчиняющейся закону Дарси. Влияние фазовых проницаемостей и капиллярного давления не учитывается, т. е. считается, что происходит поршневое вытеснение нефти водой. Оси координат x' и y' помещены в плоскости подошвы пласта, причем ось y' направлена вдоль линии пересечения горизонтальной плоскости с подошвой, ось x' – по подъему пласта, а ось z' – вверх по нормали к плоскости подошвы. Скорости фильтрации воды и нефти определяются законом Дарси

$$V_i=-\frac{k_1(x'/H, y'/H)k'(z')}{\mu_i}\nabla p_i^* \tag{1.1}$$

Здесь индекс $i=1$ соответствует воде, $i=2$ – нефти

$$p_i^*=p_i+\gamma_i\zeta \tag{1.2}$$

μ, γ – вязкость и весовая плотность жидкости, $p(x', y', z', t)$, $p^*(x', y', z', t)$ – гидродинамическое и приведенное к горизонтальной плоскости, проходящей через начало координат, давления жидкости, ζ – расстояние от горизонтальной плоскости, проходящей через начало координат.

Далее принимается, что $k_z=\infty$, тогда распределение давлений по нормали к пласту определяется гидростатическим законом. Для приведенных давлений в водяной и нефтяной зонах согласно (1.2) и формуле поворота осей

$$\zeta=\cos\alpha z'+\sin\alpha x'$$

получим

$$p_1^*=p_0+\gamma_1\sin\alpha x',\qquad p_2^*=p_0+\gamma_2\sin\alpha x'-\Delta\gamma\cos\alpha z_1^* \tag{1.3}$$

где $p_0(x', y', t)$ – гидродинамическое давление на подошве пласта, $\Delta\gamma=\gamma_1-\gamma_2$, $z_1^*(x', y', t)$ – координата точки ВНК.

Из (1.3) видно, что приведенные давления в водяной и нефтяной зонах при $k_z=\infty$ не зависят от z', т. е. $p_1^*=p_1^*(x', y', t)$, $p_2^*=p_2^*(x', y', t)$. Следовательно, согласно (1.1) составляющие скоростей фильтрации воды и нефти по нормали к пласту равны нулю, т. е. $V_{1z}=0$, $V_{2z}=0$.

Как и при выводе уравнения Буссинеска для неглубокой воды [6], выделим в пласте элементарный параллелепипед, перпендикулярный напластованию, высота которого H, а основание – элемент площади $dx'dy'$. Для этого параллелепипеда при учете, что $k_z=\infty$, и принятой неоднородности пласта, приводящей к зависимости скорости фильтрации от координаты z', запишем уравнения неразрывности для воды и для нефти

$$m\frac{\partial z_1^*}{\partial t}+\operatorname{div}\int\limits_0^{z_1^*}V_1\,dz'=0 \tag{1.4}$$

$$m\frac{\partial (H-z_1^*)}{\partial t}+\operatorname{div}\int\limits_{z_1^*}^{H}V_2\,dz'=0 \tag{1.5}$$

При подстановке (1.1) с учетом (1.3) в (1.4) и (1.5) найдем

$$\frac{\partial z^*}{\partial \tau}-\nabla[k_1(x,y)K(0,z^*)\nabla(\Pi+\bar\gamma_1\sin\alpha x)]=0 \tag{1.6}$$

$$\mu_0\frac{\partial z^*}{\partial \tau}+\nabla[k_1(x,y)K(z^*,1)\nabla(\Pi+\bar\gamma_2\sin\alpha x-\cos\alpha z^*)]=0 \tag{1.7}$$

Здесь

$$\tau=\frac{k^\circ\Delta\gamma t}{m\mu_1 H},\quad \Pi=\frac{p_0}{\Delta\gamma H},\quad \bar\gamma_1=\frac{\gamma_1}{\Delta\gamma},\quad \bar\gamma_2=\frac{\gamma_2}{\Delta\gamma},\quad \mu_0=\frac{\mu_2}{\mu_1},\quad k=\frac{k'}{k^\circ}$$

$$z^*=\frac{z_1^*}{H},\quad x=\frac{x'}{H},\quad y=\frac{y'}{H},\quad k^\circ=\frac{1}{H}\int\limits_0^H k'(z')\,dz' \tag{1.8}$$

$$K(0,z^*)=\int\limits_0^{z^*}k(z)\,dz,\qquad K(z^*,1)=\int\limits_{z^*}^{1}k(z)\,dz$$

Система уравнений (1.6), (1.7), где безразмерные координата точки ВНК $z^*=z^*(x, y, \tau)$ и давление на подошве пласта $\Pi=\Pi(x, y, \tau)$ являются искомыми функциями, определяет перемещение ВНК в наклонном неоднородном пласте. После исключения $\partial z^*/\partial\tau$ из (1.6) и (1.7) получим

$$\begin{aligned}&\mu_0\nabla[k_1(x,y)K(0,z^*)\nabla(\Pi+\bar\gamma_1\sin\alpha x)]+\\&+\nabla[k_1(x,y)K(z^*,1)\nabla(\Pi+\bar\gamma_2\sin\alpha x-\cos\alpha z^*)]=0\end{aligned} \tag{1.9}$$

Для решения задачи необходимо проинтегрировать систему нелинейных уравнений (1.6), (1.9) в частных производных второго порядка при соответствующих краевых условиях.

Рассмотрим пласт, ограниченный цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси z, а направляющая, называемая контуром Γ, лежит в плоскости xy. Пусть на контуре Γ задано распределение давления $\Pi_\Gamma=\Pi(\beta, \tau)$ (β – дуговая абсцисса точки контура), а в пласте – форма ВНК в начальный момент времени $\tau=0$ ($z_{(0)}^*=z^*(x, y, 0)$). Тогда при численном интегрировании задачи (1.6), (1.9) с известной начальной формой ВНК $z_{(0)}^*$ и заданным давлением на границе Π_Γ по уравнению (1.9) определяется распределение давления Π в пласте, а по найденному распределению давления Π в пласте и известной форме ВНК $z_{(0)}^*$ в начальный момент времени из уравнения (1.6) находится новая форма ВНК в последующий момент времени $\tau=\tau_1$ ($z_{(1)}^*=z^*(x, y, \tau_1)$). Принимая найденную форму ВНК за начальную, аналогично находится форма ВНК в последующий момент времени $\tau=\tau_2$ ($\tau_2>\tau_1$) ($z_{(2)}^*=z^*(x, y, \tau_2)$) и т. д.

При таком подходе на каждом шаге по времени решается первая краевая задача для линейного уравнения эллиптического типа (1.9) относительно функции $\Pi=\Pi(x, y)$, а затем интегрируется квазилинейное уравнение первого порядка (1.6) относительно функции $z^*=z^*(x, y, \tau)$. Если на контуре Г задана нормальная производная давления, то решается вторая краевая задача для уравнения (1.9); если же на одной части контура Г задано давление, а на другой части – нормальная производная давления, то решается смешанная краевая задача для уравнения (1.9).

2. Система уравнений (1.6), (1.9) определяет перемещение ВНК в наклонном неоднородном пласте, причем проницаемость меняется как по простиранию пласта, так и по нормали к напластованию. Если рассматривается однородный пласт ($k_1(x, y)=1$, $k(z)=1$ и согласно (1.8) $K(0, z^*)=z^*$, $K(z^*, 1)=1-z^*$), то система (1.6), (1.9) упрощается

$$\frac{\partial z^*}{\partial\tau}-\nabla[z^*\nabla(\Pi+\bar{\gamma}_1\sin\alpha x)]=0 \tag{2.1}$$

$$\mu_0\nabla[z^*\nabla(\Pi+\bar{\gamma}_1\sin\alpha x)]+\nabla[(1-z^*)\nabla(\Pi+\bar{\gamma}_2\sin\alpha x-\cos\alpha z^*)]=0 \tag{2.2}$$

Рассматривая стационарную задачу для однородного пласта, когда $\partial z^*/\partial\tau=0$, из системы уравнений (2.1), (2.2) можно получить систему уравнений (3) из работы [7] для безразмерного приведенного давления воды на подошве пласта $\Pi=(p_0+\gamma_1\sin\alpha x)/$ $/\Delta\gamma H$ и относительной координаты ВНК $z^*=z_1^*/H$, определяющую установившееся совместное течение нефти и подошвенной воды к скважине.

Рассмотрим плоское, а не пространственное перемещение ВНК, т. е. пусть величины k_1, z^* и П не зависят от y, тогда система уравнений (1.6), (1.9) примет вид

$$\frac{\partial z^*}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial x}\left[k_1(x)K(0,z^*)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\bar{\gamma}_1\sin\alpha\right)\right]=0 \tag{2.3}$$

$$\mu_0\frac{\partial}{\partial x}\left[k_1(x)K(0,z^*)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\bar{\gamma}_1\sin\alpha\right)\right]+ \\ +\frac{\partial}{\partial x}\left[k_1(x)K(z^*,1)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\bar{\gamma}_2\sin\alpha-\cos\alpha\frac{\partial z^*}{\partial x}\right)\right]=0 \tag{2.4}$$

Интегрирование уравнения (2.4) дает

$$\mu_0k_1(x)K(0,z^*)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\bar{\gamma}_1\sin\alpha\right)+ \\ +k_1(x)K(z^*,1)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\bar{\gamma}_2\sin\alpha-\cos\alpha\frac{\partial z^*}{\partial x}\right)=C(\tau) \tag{2.5}$$

где $G(\tau)$ – произвольная функция. Формула суммарного расхода воды и нефти через произвольное поперечное сечение пласта

$$Q(t)=Q_1+Q_2=\int_0^{z_1^*}V_1\,dz'+\int_{z_1^*}^{H}V_2\,dz'$$

при учете формул (1.1), (1.3), (1.8) и независимости входящих в эти формулы величин от координаты y' преобразуется к следующему виду:

$$q(\tau)=-\mu_0k_1(x)K(0,z^*)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\bar{\gamma}_1\sin\alpha\right)- \\ -k_1(z)K(z^*,1)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\bar{\gamma}_2\sin\alpha-\cos\alpha\frac{\partial z^*}{\partial x}\right) \tag{2.6}$$

$$q(\tau)=\mu_2Q(t)/k^\circ\Delta\gamma H \tag{2.7}$$

Из сравнения формулы (2.6) с (2.5) следует:

$$C(\tau)=-q(\tau) \tag{2.8}$$

После исключения $\partial\Pi/\partial x$ из (2.3) и (2.5) с учетом (2.8) получим

$$\frac{\partial z^*}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial x}\left[K(0,z^*)\frac{-q(\tau)+k_1(x)K(z^*,1)(\cos\alpha\,\partial z^*/\partial x+\sin\alpha)}{\mu_0K(0,z^*)+K(z^*,1)}\right]=0 \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) при учете (1.8) и (2.7) совпадает с уравнением (2.1) из работы [5]. Если в (2.9) принимается $k_1(x)=1$, то при учете (1.8) и (2.7) получается уравнение (1.7) из работы [3]. Если в (2.9) принимается $\alpha=0$ и $k(z)=1$ (при $k(z)=1$ согласно (1.8) имеет место $K(0, z^*)=z^*$, $K(z^*, 1)=1-z^*$), то при учете (1.8) и (2.7) получается уравнение (1.1) из работы [4]. Если в (2.9) принимается $k_1(x)=1$ и $k(z)=1$, то при учете (1.8) и (2.7) получается уравнение (3.9) из работы [1]. Уравнение (2.9) является нелинейным уравнением параболического типа. После умножения уравнения (2.9) на $\Delta\gamma/\gamma_1$, принятия $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ (т. е. $\Delta\gamma=0$ – пренебрегается различием плотностей воды и нефти) и введения в отличие от (1.8) и (2.7)

$$\tau^* = \frac{k^\circ\gamma t}{m\mu_1 H}, \qquad q^*(\tau^*) = \frac{\mu_2 Q(t)}{k^\circ\gamma H}$$

оно становится квазилинейным уравнением первого порядка

$$\frac{\partial z^*}{\partial\tau^*} + q^*(\tau^*)\frac{d}{dz^*}\left[\frac{K(0, z^*)}{\mu_0 K(0, z^*) + K(z^*, 1)}\right]\frac{\partial z^*}{\partial x} = 0$$

интегрирование которого можно провести методом характеристик. Из нелинейного уравнения параболического типа (3.9) из [1] при $\Delta\gamma=0$ получается квазилинейное уравнение первого порядка (2.9) из [8].

Умножив уравнения (1.6) и (1.9) на $\Delta\gamma/\gamma_1$, полагая $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ (т. е. $\Delta\gamma=0$) и вводя вместо (1.8)

$$\tau^* = \frac{k^\circ\gamma t}{m\mu_1 H}, \qquad \Pi^* = \frac{p_0 + \gamma\sin\alpha x'}{\gamma H}$$

придем к следующей системе:

$$\partial z^*/\partial\tau^* - \nabla[k_1(x, y)K(0, z^*)\nabla\Pi^*] = 0, \quad \nabla\{k_1(x, y)\,[\mu_0 K(0, z^*) + K(z^*, 1)]\nabla\Pi^*\} = 0$$

Сравнение полученных уравнений с уравнениями (1.6) и (1.9) показывает, что пренебрежение различием плотностей воды и нефти ведет лишь к незначительному упрощению системы уравнений (1.6) и (1.9), определяющей пространственное перемещение ВНК в наклонном неоднородном пласте.

Поступила 7 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах. Изв АН СССР, ОТН, 1954, № 4.
2. *Зигангареев М. А., Теплов Ю. А.* Расчеты перемещения водо-нефтяного контакта в наклонном пласте и сравнение их с данными моделирования. Тр. Всес. нефтегазового научн. исслед. ин-та, 1966, вып. 47.
3. *Теплов Ю. А.* О перемещении водо-нефтяного контакта в неоднородном пласте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
4. *Зигангареев М. А.* Движение границы раздела двух жидкостей в неоднородной пористой среде. Материалы 27-й межвузовской научной конференции математических кафедр педагогических институтов Уральской зоны. Ижевск, 1969.
5. *Зигангареев М. А.* О движении границы раздела двух жидкостей и фильтрации двухфазной жидкости в неоднородной пористой среде. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1970, т. 130, кн. 1.
6. *Лейбензон Л. С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., Гостехиздат, 1947.
7. *Теплов Ю. А.* Дифференциальные уравнения, определяющие совместное течение нефти и подошвенной воды к скважине. Казанск. физ.-техн. ин-т. Тезисы докл. юбилейной научн. конф., посвященной 20-летию ин-та. Секции механ.-матем. н., Казань, 1966.
8. *Пирвердян А. М.* О движении подошвенной воды в слабо наклоненных пластах. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.

УДК 532.546

О ФИЛЬТРАЦИИ ВБЛИЗИ НОВЫХ КАНАЛОВ И ВОДОХРАНИЛИЩ

А. БЕГМАТОВ

(*Ташкент*)

Рассматривается фильтрация вблизи новых каналов и водохранилищ при наличии испарения, зависящего от глубины залегания грунтовых вод. При некоторых ограничениях на закон испарения для определения нестационарного перемещения уровня грунтовых вод получена система интегральных уравнений, для решения которой предложен метод последовательных приближений, а также один из численных методов. Приводится пример расчета.

При наполнении новых каналов и водохранилищ происходит подъем уровня грунтовых вод $h(x, t)$, и если первоначальный уровень H_0 расположен ниже критической глубины y_0 (расстояние от поверхности земли до уровня, начиная с которого