

4. Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений. Сб. «Численные методы решения задач математической физики», дополнение к Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 4, стр. 242.
5. Гончаренко Б. Н., Уринцев А. Л. Об устойчивости движения жидкости, вызванного термокапиллярными силами. ПМТФ, 1971, № 6, стр. 94–98.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
7. Крылов А. Л., Шустер В. Г. Об устойчивости центрального положения шипа в гидродинамическом подшипнике. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 5, стр. 1030.
8. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Christiansen J. Numerical solution of ordinary simultaneous differential equations of the 1-st order using a method for automatic step change. Numer. Math., 1970, vol. 14, No. 4, p. 317.

УДК 532.517.4:518.5

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ДАЛЬНОГО СЛЕДА В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. И. СКУРИН

(Ленинград)

С помощью метода сеток исследуется распределение параметров в гиперзвуковом турбулентном изобарическом следе с учетом ионизации. Предполагается, что след представляет собой совершенный газ, содержащий малое количество примеси электронов и ионов, между которыми протекает реакция диссоциативной рекомбинации. Интегрирование уравнений движения, энергии и сохранения концентрации электронов проводится от некоторого начального сечения, параметры в котором оцениваются с помощью известных опытных данных о следе за тупым телом, движущимся в атмосфере аргона, до расстояний порядка 10^4 калибров. Исследуется также полуэмпирически замкнутое уравнение баланса турбулентной энергии.

Путем сравнения численных результатов с асимптотическими распределениями искомых параметров показано, что расстояния, на которых «достигается» асимптотический закон, различны для различных параметров следа и сильно зависят от числа Маха (это не относится к радиусу следа). Показано также слабое влияние формы начальных профилей на распределение параметров вниз по потоку.

Система уравнений безградиентного дальнего турбулентного осесимметричного следа в совершенном газе, включающая в себя уравнение сохранения концентрации ξ пассивной неконсервативной примеси, и соответствующие граничные условия в переменных Мизеса имеют вид

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \rho v_x r &= \psi \frac{\partial \psi}{\partial r}, & \rho v_r r &= -\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
 \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu \frac{\rho v_x r^2}{\psi} \frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right) \\
 \frac{\partial T}{\partial x} &= \alpha \mu \frac{\rho v_x r^2}{\psi^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\rho v_x r^2}{\psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \\
 \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{Sc} \frac{\rho v_x r^2}{\psi} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + \frac{w}{\rho v_x}, & \rho &= \frac{1}{T} \\
 (2) \quad \psi &= 0, & v_r &= \partial v_x / \partial \psi \neq \partial T / \partial \psi = \partial \xi / \partial \psi = 0 \\
 \psi &\rightarrow \infty, & v_x &\rightarrow 1, \quad T \rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow \xi_\infty \\
 x &= x_H, & v_x &= v_H(\psi), \quad T = T_H(\psi), \quad \xi = \xi_H(\psi)
 \end{aligned}$$

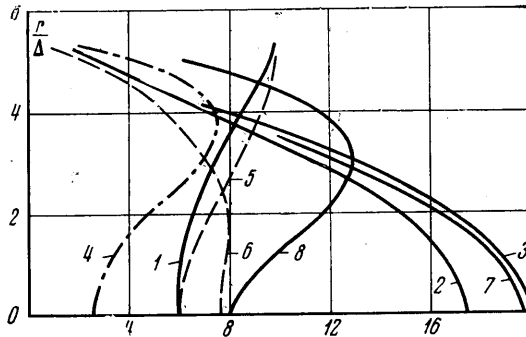
Здесь все величины безразмерные, $x, r(d)$ — продольная и радиальная координаты, $\psi(d\sqrt{\rho_\infty v_\infty})$ — функция тока, $v_x, v_r(v_\infty)$ — составляющие вектора скорости, $T(T_\infty)$ — температура, $\rho(\rho_\infty)$ — плотность, ξ — относительная массовая концентрация примеси, $\mu(\rho_\infty v_\infty d)$ — коэффициент турбулентной вязкости, $w(\rho_\infty v_\infty / d)$ — скорость образования примеси вследствие химической реакции, $\alpha = (\kappa_\infty - 1) M_\infty^2$, κ — показа-

тель адиабаты, M – число Маха, d – характерный диаметр тела. В скобках указан размерный делитель, с помощью которого получена данная безразмерная величина. Индексы ∞ относятся к набегающему потоку, H – к начальному сечению.

Коэффициент турбулентной вязкости рассчитывался по формуле, близкой к использованной в работе [1]

$$\mu = k\rho_0(1-v_0)\Delta, \quad \Delta = \left(2 \int_0^{\delta} \rho r dr\right)^{1/2}$$

где $\delta(d)$ – полурадиус следа. Значение $k=0.04$ принято из условия согласия асимптотического поведения дефекта скорости с известными опытными данными, относящимися к дальним расстояниям от тела [2, 3].



Фиг. 1

Для турбулентных чисел Прандтля и Шмидта в соответствии с данными измерений профиля температуры в следе [4, 5] принято значение $Pr=Sc=0.7$.

Задача (1), (2) интегрировалась методом сеток с использованием явной конечно-разностной схемы, изложенной в работе [6]. Условия при $\psi \rightarrow \infty$ предполагались выполняющимися при $\psi > \psi_*$, где ψ_* определялось условием

$$1 - v_x(x, \psi_*) = \lambda(1 - v_0)$$

(индекс 0 относится к оси следа). Величина постоянной в этом условии подбиралась так, чтобы интегральные инварианты

$$(3) \quad 16 \int_0^{\infty} \rho v_x (1 - v_x) r dr = c_x = \text{const}$$

$$16 \int_0^{\infty} \rho v_x (H_{\infty} - H) r dr = c_T = \text{const}, \quad H = \frac{T}{a} + \frac{v_x^2}{2}$$

сохранялись с заданной точностью.

Одна из целей настоящего расчета – оценка расстояний, на которых с заданной точностью выполняются асимптотические законы изменения основных параметров следа. Чтобы расчетные распределения скорости, температуры и концентрации примеси были по возможности ближе к реальным, условия в начальном сечении следа оценивались по данным экспериментов. В качестве начальных использовались данные, относящиеся к сечению $x=50$, которые получены для следов за моделями (затупленные по сфере цилиндры диаметром $d=0.0056$ м с конической юбкой диаметром 0.008 м, $c_x=1.36$), движущимися с гиперзвуковой скоростью в аргоне ($\mu_{\infty} = \mu^5/3$) при $p_{\infty}=100$ мм рт. ст., $T_{\infty}=290^\circ$ К [3].

Методы экспериментальных исследований, использованные в [3], дают осредненные по сечению характеристики следа. Предполагалось, что измеряемые в эксперименте «скорость следа» V и численная плотность электронов N близки к среднеинтегральным величинам

$$(4) \quad V = (2/R^2) \int_0^{\infty} (1 - v_x) r dr, \quad N = (2\rho_{\infty}/m_1 R^2) \int_0^{\infty} \rho \xi r dr$$

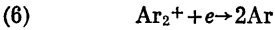
где m_1 — молекулярный вес электрона, R — радиус следа, определяемый в расчете условием

$$(5) \quad [1 - v_x(x, R)] / (1 - v_0) = 0.1$$

Заложенные в расчет начальные профили искомых параметров для случая $\sqrt{\alpha} = 12.4$ представлены на фиг. 1 сплошными линиями: 1 — $10v_H$, 2 — T_H , 3 — $3.5 \cdot 10^{11} \xi_H$. Влияние формы начальных профилей на параметры вниз по потоку исследуется ниже.

Значения чисел Рейнольдса в условиях экспериментов составляли $Re_{\infty, d} = (1.5 \div 3) \cdot 10^8$. Судя по данным работы [7], в этих условиях расстояние до точки, где вязкий след пересекает границу высокоэнтропийного слоя и прорывается в холодную внешнюю часть следа, порядка 150 калибров. Следовательно, использование простых условий (2) на внешней границе на начальном участке расчетной области является известным приближением.

В работе [3] по экспериментальным данным о проводимости следа были проведены оценки коэффициента рекомбинации в предположении, что рекомбинация электронов обусловлена в основном парными соударениями с ионами. Полученные значения коэффициента рекомбинации оказались близкими к данным работы [8] для реакции диссоциативной рекомбинации



В соответствии с этим предполагается, что след представляет собой смесь атомов аргона с малым количеством двухатомных ионов аргона и электронов (судя по опытным данным, относительная концентрация порядка 10^{-10}), между которыми протекает реакция (6). Эти компоненты ввиду малости их концентрации можно рассматривать как пассивную примесь.

Константа скорости реакции (6) в соответствии с данными [8, 9] рассчитывалась по формуле

$$K(T) = A(TT_{\infty})^{-3/2},$$

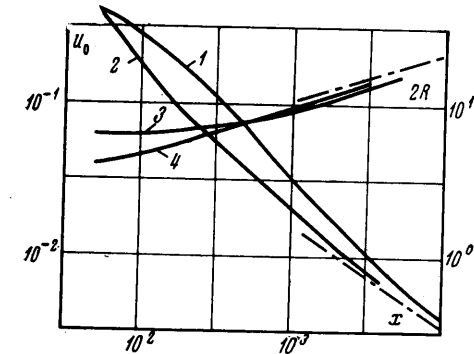
$$A = 4.2 \cdot 10^{15} \frac{\text{м}^3 \cdot \text{град}^{3/2}}{\text{моль} \cdot \text{сек}}$$

Скорость образования электронов w вычислялась с учетом условия квазинейтральности по соотношению

$$w = A_1 T^{-3/2} \rho^2 \xi^2,$$

$$A_1 = A \rho_{\infty} d / (T_{\infty}^{3/2} v_{\infty} m_1)$$

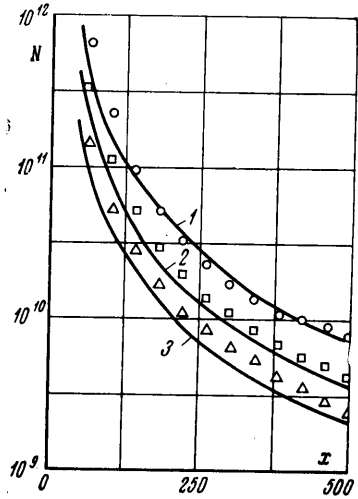
На фиг. 2 приводится сравнение расчетных данных с опытными по распределению среднеинтегральной концентрации электронов вдоль следа. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют числам $M_{\infty} = 15.2, 13.0$ и 10.9 . Сравнение с данными эксперимента по другим параметрам следа приведено в работе [3]. Согласно расчетных и опытных данных оправдывает упрощающие предположения (относящиеся главным образом к краевым условиям и химической кинетике), лежащие в основе расчета.



Фиг. 3

На фиг. 3 представлено распределение осевого дефекта скорости $u_0 = 1 - v_0$ (кривые 1 ($\sqrt{\alpha} = 12.4$) и 2 ($\sqrt{\alpha} = 7.1$)) — и диаметра следа $2R$ (кривые 3 ($\sqrt{\alpha} = 12.4$) и 4 ($\sqrt{\alpha} = 7.1$); начальные условия для случая $\sqrt{\alpha} = 7.1$ получены экстраполяцией опытных данных работы [3] на соответствующее значение числа Маха). При $x \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические соотношения [10]

$$u_0 \sim (12\sqrt{2} \ln 2kx / \sqrt{c_x})^{-2/3}, \quad R \sim \sqrt{\ln 10} (3\sqrt{\ln 2k c_x x / 4})^{1/2}$$



Фиг. 2

(\sim — знак асимптотического равенства). Соответствующие этим соотношениям прямые нанесены на фиг. 3 штрихпунктирной линией.

На фиг. 4 приведено распределение относительной массовой концентрации электронов (кривые 1 ($\sqrt{\alpha}=12.4$) и 2 ($\sqrt{\alpha}=7.1$)) и дефекта температуры $t_0=T_0-1$ (кривые 3 ($\sqrt{\alpha}=12.4$) и 4 ($\sqrt{\alpha}=7.1$)) вдоль оси следа. Соответствующие асимптотические соотношения, показанные штрихпунктирными прямыми, имеют вид [10]

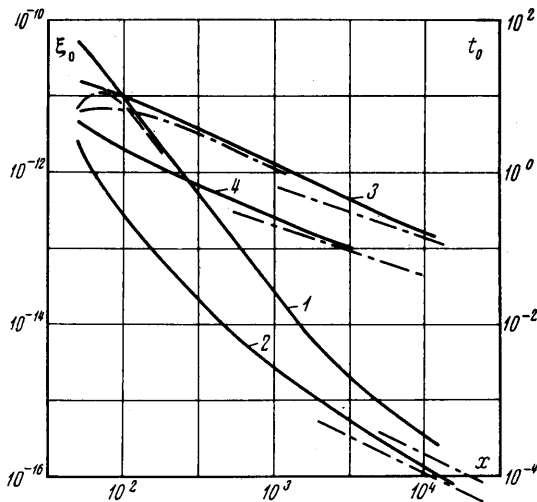
$$(7) \quad \xi_0 \sim a/(3A_1 x), \quad a=1.866 \dots, \quad t_0 \sim \alpha \text{Pr} (1-c_T/c_x) u_0$$

Из приведенных на фиг. 3 и 4 расчетных данных следует, что с увеличением числа Маха увеличивается расстояние, на котором «достигается» асимптотический режим. Это обстоятельство иллюстрируется следующими данными:

$\sqrt{\alpha}$	7.1	8.9	10.6	12.4
$S_1 \cdot 10^{-3}$	0.63	1.6	2.7	5.3
$S_2 \cdot 10^{-3}$	2.1	3.7	5.9	10.5

где S_1 и S_2 — расстояния в калибрах, на которых дефект скорости отличается от своего асимптотического значения в 1.3 раза и концентрация в 2 раза соответственно. Аналогичные данные для температурного дефекта практически совпадают с S_1 .

Наиболее быстро приближается к своей асимптотической величине радиус следа: различие между ними мало уже за первой сотней калибров (фиг. 3). Это согласуется с данными экспериментов (см., например, [7]).



Фиг. 4

Близость распределений дефектов скорости и температуры к асимптотическим согласно опытным данным [2] имеет место при значениях $x/\sqrt{c_x}$ порядка нескольких тысяч. Это согласуется с данными фиг. 3 и 4.

Начальный профиль для концентрации ξ (кривая 4 на фиг. 1) имеет то же значение N , что и профиль 3. Соответствующие расчетные данные показаны на фиг. 4 штриховой линией. Несмотря на то что в начальном сечении значения ξ_0 для кривых 3 и 4 фиг. 1 различаются почти на порядок, практическое выравнивание концентрации происходит уже на первой полусотне калибров.

Начальные профили скорости и температуры (кривые 5 и 6 на фиг. 1) обладают теми же интегральными характеристиками c_x и c_T (3), что и профили 1 и 2. Результаты расчета для них по распределению дефекта температуры вдоль следа представлены на фиг. 4 штрихпунктирной кривой. Эта кривая и кривая 3 выходят на одну и ту же асимптоту, что согласуется с соотношением (7).

Расчетные данные свидетельствуют о том, что профили всех параметров уже на первых сотнях калибров оказываются близкими к асимптотическим. По определению (5) радиус следа связан с профилем скорости. Отсюда понятно сравнительно быстрое приближение радиуса следа к асимптотической величине. Этим же объясняется и отмеченное выше слабое влияние формы начальных профилей на распределение параметров вниз по потоку.

Представленные на фиг. 3, 4 данные свидетельствуют о том, что распределения локальных (а вместе с ними и интегральных) характеристик вдоль следа приближаются к асимптотическим законам на значительно более далеких расстояниях. Это естественно объяснить с взаимосвязанностью полей скорости и температуры и с влиянием этих полей на поле концентрации. Подтверждением этого предположения является увеличение длины стабилизации с увеличением числа Маха.

Для ряда задач представляет интерес расчет кинетической энергии турбулентности E вдоль следа. Уравнение для E в переменных Мизеса бралось в виде

$$(8) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu \frac{\rho v_x r^2}{\psi} \frac{\partial E}{\partial \psi} \right) + \mu \frac{\rho v_x r^2}{\psi^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right)^2 - c \frac{\mu}{\rho v_x} \frac{E}{\delta^2}$$

Полуэмпирические гипотезы, на основе которых получено уравнение (8), и анализ значения отдельных членов в уравнении баланса турбулентной энергии в сжимаемом следе представлены в [11].

Граничные условия для уравнения (8) имеют вид

$$(9) \quad \psi=0, \quad \partial E / \partial \psi=0; \quad \psi \rightarrow \infty, \quad E \rightarrow 0; \quad x=x_H, \quad E=E_H(\psi)$$

Исследование асимптотического поведения функции $E(x, r)$ можно провести аналогично тому, как это делается в [10]. Предположим, что при $x \rightarrow \infty$

$$E/E_0 \sim \vartheta(\eta), \quad \eta=r/\delta$$

Перейдем в системе (1), (8) к переменным x, η и устремим x к бесконечности. В результате приходим к следующей задаче относительно $\vartheta(z)$:

$$(10) \quad \vartheta'' + \left[\frac{1}{z} + z \right] \vartheta' + \left[4 - c / (2 \ln 2) \right] \vartheta = -2\gamma z^2 \exp(-z^2)$$

$$z = \sqrt{2 \ln 2} \eta, \quad 2\gamma \sim u_0^2 / E_0$$

$$(11) \quad \vartheta(0) = 1, \quad \vartheta'(\infty) = \vartheta(\infty) = 0$$

Задачей (10), (11) определяются функция $\vartheta(z)$ и постоянная γ . Решение этой задачи при $c=8 \ln 2$ имеет вид

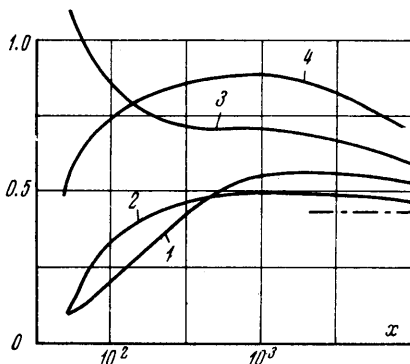
$$(12) \quad \vartheta = 2\gamma [Ei(-z^2) - Ei(-z^2/2) - e^{-z^2/2}], \quad 2\gamma = 2 / (2 \ln 2 - 1)$$

где $Ei(x)$ — интегральная показательная функция. При других значениях c решение может быть найдено численно.

Уравнение (8) интегрировалось совместно с системой (1) при граничных условиях (9).

На фиг. 5 приводятся численные результаты, характеризующие влияние числа Маха и начального профиля $E_H(r)$ на распределение турбулентной энергии вдоль оси следа. Штрихпунктирная прямая — асимптота, соответствующая решению (12). Кривые 1 и 2 получены при задании малого начального значения турбулентной энергии при $\sqrt{\alpha} = 12.4$ и 7.1 соответственно. Кривые 3 и 4 получены для случая $\sqrt{\alpha} = 12.4$ и соответствуют различным начальным профилям $E_H(r)$, обладающим одинаковой интегральной характеристикой. Соответствующие кривым 3 и 4 начальные профили $40\sqrt{E_H}$ отмечены на фиг. 1 цифрами 7 и 8. Следует отметить заметное влияние числа Маха и начального значения турбулентной энергии на скорость приближения энергии к асимптотическому значению.

Замечание. Коэффициент турбулентной вязкости стремится к нулю с увеличением продольной координаты. Поэтому вдали от тела течения в следе будет определяться молекулярной вязкостью. Покажем, однако, что при рассмотренных в настоящей работе внешних условиях область существенного влияния молекулярной вязкости лежит далеко вниз по потоку от участка, для которого проводились рас-



Фиг. 5

четы. Действительно, из данных [10] следует, что при $x \rightarrow \infty$

$$\mu \sim (\ln 2c_x^2 k^2 / 6x)^{1/2} / 4$$

Используя это соотношение, нетрудно найти, что для наименьшего из рассмотренных чисел Рейнольдса область, где молекулярная вязкость составляет 0.1 и более от турбулентной, описывается соотношением $x > 1.6 \cdot 10^6$.

Поступила 14 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорошко К. С. Гиперзвуковой след за затупленными телами. Изв. АН СССР, МЖТ, 1969, № 2.
2. Fox J., Rungaldier H. Anemometer measurements of velocity and density in projectile wakes. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 2. (Рус. перев.: Измерения термоанемометром скорости и плотности в следах за снарядами. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 2.)
3. Гадион В. Н., Иванов В. Г., Мишин Г. И., Палкин С. Н., Скурин Л. И. Исследование электронных и газодинамических параметров гиперзвукового следа за моделями, движущимися в аргоне. Ж. техн. физ., 1972, т. 42, вып. 5.
4. Demetriades A. Mean-flow measurements in an axisymmetric compressible turbulente wake. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 3. (Рус. перев.: Измерение средних величин при течении в осесимметричном турбулентном следе сжимаемой жидкости. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 3.)
5. Demetriades A. Observations on the transition process of two-dimensional supersonic wakes. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 11. (Рус. перев.: Исследование процесса перехода в плоских сверхзвуковых следах. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 11.)
6. Zeiberg S. L., Bleich G. D. Finite - difference calculation of hypersonic wakes. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 8. (Рус. перев.: Расчет гиперзвукового следа методом конечных разностей. Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 8.)
7. Wilson L. N. Far - wake behavior of hypersonic blunted cones. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 8. (Рус. перев.: Характеристики дальней части следа за затупленными конусами, движущимися с гиперзвуковыми скоростями. Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 8.)
8. Смирнов Б. М. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. М., Атомиздат, 1968.
9. Kretschmer C. B., Petersen H. L. Use of langmuir probes to study ion - electron recombination. J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, No. 11.
10. Скурин Л. И. Асимптотика реагирующего дальнего следа. В сб. «Тепло- и массо-перенос», т. 1, ч. 3. Минск, 1972.
11. Скурин Л. И. Расчет плоского следа за телом. Инж.-физ. ж., 1972, т. 23, № 1.

УДК 532.52.63

СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ ЧИСЕЛ МАХА И РЕЙНОЛЬДСА НА ПЕРЕХОД В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. Г. ПРИДАНОВ, А. М. ХАРИТОНОВ, В. В. ЧЕРНЫХ

(Новосибирск)

Рассматриваются результаты экспериментального исследования явления перехода в пограничном слое плоской пластины, проведенные в диапазоне чисел Маха $M_\infty = 2.0 \div 4.0$ и Рейнольдса $(U/v)_\infty = (10 \div 72) \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$. Приводятся также результаты измерений поля звукового давления, генерируемого турбулентным пограничным слоем стенок рабочей части аэродинамической трубы. Показано, что изменения числа Рейнольдса перехода и уровня пульсаций давления с ростом единичного числа Рейнольдса качественно согласуются.

Исследованию влияния различных факторов на положение и протяженность области перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при сверхзвуковых скоростях потока посвящено много работ [1-10]. Имеющиеся экспериментальные данные получены в различных установках, отличающихся размером рабочей части, характером и уровнем возмущений свободного потока, и относятся к моделям различной конфигурации (конус, клин, полый цилиндр, плоская пластина) с различной геометрией передней кромки. При этом, как правило, применялись различные методы определения положения области перехода, основанные как на измерении макроскопических характеристик (распределение теплового потока, поверхностного