

УДК 532.51.013.2

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕШЕТОК ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ, ВИБРИРУЮЩИХ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. П. РЯБЧЕНКО

(Новосибирск)

Расчету нестационарных аэродинамических характеристик решеток профилей, колеблющихся в потоке идеальной несжимаемой жидкости, посвящено много работ [1, 2]. Однако большинство имеющихся результатов получено для решеток, составленных из тонких слабоизогнутых профилей и тонких профилей — дужек. В случае решеток телесных профилей имеется лишь ряд частных примеров расчета. В работах [1, 3, 4] в квазистационарной постановке задачи различными методами получены некоторые аэродинамические характеристики решеток поступательно колеблющихся профилей. В [1] представлено также распределение скорости на профиле, определенное с учетом влияния вихревых следов и проведено сравнение с квазистационарным решением. В [5] приведена зависимость коэффициента аэродемпфирования от числа Струхала, полученная с учетом влияния вихревых следов и смещения, а также дано сравнение с результатами экспериментальных измерений. Эти примеры, однако, не позволяют в полной мере судить о влиянии ряда факторов, в частности вихревого следа и телесности профилей, на нестационарные аэродинамические характеристики решеток.

Результаты, представленные в данной работе, основаны на обобщении численного метода, предложенного в [4], на случай, когда задача обтекания решетки колеблющихся профилей решается с учетом вихревых следов за ними. Путем численного анализа исследовано влияние вихревых следов и телесности профилей на нестационарные аэродинамические характеристики решеток в зависимости от числа Струхала и сдвига фазы между колебаниями соседних профилей.

1. Рассмотрим обтекание плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости решетки, составленной из произвольных профилей, совершающих малые синхронные гармонические колебания с произвольной комплексной формой $f = f_x + if_y$ и произвольным постоянным сдвигом фазы $\mu\lambda$ ($0 \leq \mu < 2$) между колебаниями соседних профилей (фиг. 1). В отличие от [4] не будем делать предположения об отсутствии вихревых следов за профилями решетки. Тогда задача определения относительной скорости жидкости на профиле решетки $v(s)$ сводится к решению интегрального уравнения

$$(1.1) \quad \frac{1}{2} v(s) - \frac{1}{2\pi} \int_L v(\sigma) R_\mu(s, \sigma) d\sigma = \varphi(v_0(s), s)$$

$$(1.2) \quad R_\mu(s, \sigma) = \frac{\pi\tau}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} e^{j\mu\pi l} \left[K_l(s, \sigma) - jq \int_0^\infty e^{-jq u} K_l(s, u) du \right]$$

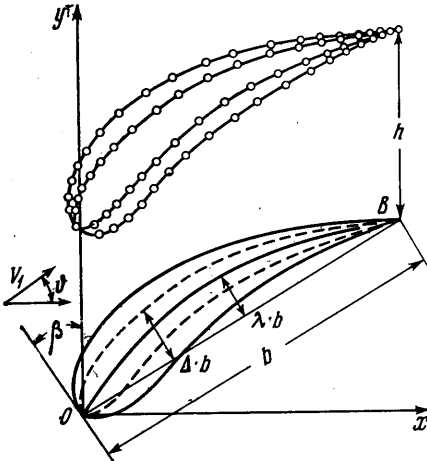
$$(1.3) \quad K_l(s, \sigma) = \frac{\sin \alpha(s) \operatorname{sh} x'(s, \sigma) - \cos \alpha(s) \sin(y'(s, \sigma) - l\pi/N)}{\operatorname{ch} x'(s, \sigma) - \cos(y'(s, \sigma) - l\pi/N)} + \sin \alpha(s)$$

$$(1.4) \quad \varphi(v_0(s), s) = \operatorname{Re}_s \Phi(s) + \frac{\tau}{4N} q^2 A_1 \sum_{l=0}^{2N-1} e^{j\mu\pi l} \int_0^\infty e^{-jq u} K_l(s, u) du$$

$$(1.5) \quad \Phi(s) = e^{i\alpha(s)} \left\{ \frac{j q \tau}{4 N i} \sum_{l=0}^{2N-1} e^{j l \mu \pi} \int_L f^*(\sigma) \left[\operatorname{cth} \frac{1}{2} \left(z' - \frac{i l \pi}{N} \right) + 1 \right] e^{i \alpha(\sigma)} d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{\tau^2 \pi}{8 N^2 i} \sum_{l=0}^{2N-1} \int_L v_0(\sigma) [f(s) - f(\sigma) e^{j l \mu \pi}] \operatorname{sh}^{-2} \frac{1}{2} \left(z' - \frac{i l \pi}{N} \right) d\sigma - \frac{j q}{2} f^*(s) \right\}$$

$$(1.6) \quad A_1 = \int_L f_x dx + f_y dy, \quad x' = \frac{\pi \tau}{N} [x(s) - x(\sigma)], \\ y' = \frac{\pi \tau}{N} [y(s) - y(\sigma)]$$

Здесь $\tau = b/h$ — густота решетки, равная отношению длины хорды профиля b к шагу h ; $\alpha(s)$ — угол наклона касательной контура L к оси x ; N при $\mu > 0$ — наименьшее целое число, определяемое из условия: $N\mu$ — целое, $N = 1/2$ при $\mu = 0$; s и σ — дуговые координаты точек контура L профиля решетки; $v_0(s)$ — скорость жидкости в стационарном потоке; j — мнимая единица, связанная только с временными процессами; $q = \omega b / V_1$ — число Струхалия; ω — круговая частота колебаний профилей; V_1 — скорость потока на бесконечном удалении перед решеткой, которая предполагается заданной; l — номер профиля в решетке; $z' = x' + iy'$, $f^* = f_x - if_y$.



Фиг. 1

Линейные размеры в соотношениях (1.1) — (1.6) и далее нормированы к длине хорды профиля b , а функции v_0 и v — к скорости набегающего потока V_1 . В этих формулах контур профиля L представляет собой кривую, гладкую в смысле Ляпунова

всюду, за исключением задней кромки B , которая является точкой возврата. Интегрирование в формулах (1.2), (1.4) ведется по линии вихревого следа, который моделируется линией разрыва касательных скоростей, расположенной вдоль критической линии тока стационарного течения. Выбор контура L с точкой возврата в задней кромке определен требованием однозначности направления скорости в этой точке, что необходимо для построения линии вихревого следа за профилем решетки.

Выражения (1.2) и (1.4) отличаются от формул для ядра и правой части интегрального уравнения, приведенных в [1], наличием членов, содержащих несобственный интеграл по линии вихревого следа. Нетрудно видеть, что этот интеграл сходится и для практических расчетов можно перейти к конечному промежутку интегрирования. Дополнительные члены в формулах (1.2) и (1.4) при $q \rightarrow 0$ исчезают, и в результате получаем интегральное уравнение, соответствующее задаче определения возмущенных скоростей при стационарном обтекании решетки, профили которой расположены с некоторым сдвигом фазы μl относительно друг друга. Так как в уравнении (1.1) функция $v(s)$ нормирована к скорости потока V_1 вдали перед решеткой, то в данном случае не возникает трудностей, связанных с предельным переходом $q \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$, отмеченных в [1, 2] при изу-

чении нестационарного обтекания решеток пластин. Решетку вихрей на бесконечности за решеткой, которую предлагается в этих работах ввести при синфазных колебаниях профилей, учитывает второй член формулы (1.3).

При $q \rightarrow \infty$ интеграл по следу имеет порядок $1/q$ для всех точек контура L , кроме точки B , в которой он расходится и вносит в ядро R_μ логарифмическую особенность. Исследование предельных случаев $q \rightarrow 0$ и $q \rightarrow \infty$ для решеток пластин проведено в [1, 2].

Интегральное уравнение (1.1) с ядром (1.2) справедливо для всех точек контура L , за исключением задней кромки B , в которой $s = \sigma = 0$ и ядро (1.2) имеет полюс первого порядка. Для однозначного определения решения уравнения (1.1) используется постулат Кутта — Жуковского, который можно сформулировать так: скачок касательной составляющей скорости жидкости в задней кромке равен интенсивности сходящего с нее вихря

$$(1.7) \quad v(+0) + v(-0) = -\frac{jq}{v_0(0)} \int_L v(s) ds + \frac{q^2}{v_0(0)} A_1$$

где $v_0(0)$ — скорость стационарного потока в задней кромке профиля, $v(+0)$ и $v(-0)$ — предельные значения относительной скорости жидкости при подходе к точке B снизу и сверху соответственно.

Условие (1.7) может быть использовано для устранения особенности ядра уравнения (1.1) в точке B . Согласно уравнению (1.1) предельные значения скорости

$$(1.8) \quad v(\pm 0) = \frac{1}{\pi} \int_L v(\sigma) R_\mu(\pm 0, \sigma) d\sigma + 2\varphi(\pm 0)$$

Уравнение (1.1), учитывая соотношения (1.7) и (1.8), после несложных преобразований можно представить в виде

$$(1.9) \quad \frac{1}{2} v(s) - \frac{1}{2\pi} \int_L v(\sigma) \left[R_\mu(s, \sigma) - \frac{1}{2} \left[R_\mu(+0, \sigma) + R_\mu(-0, \sigma) + \frac{jq\pi}{v_0(0)} \right] \right] d\sigma = \\ = \varphi(s) - 1/2 [\varphi(+0) + \varphi(-0) - q^2/2v_0(0) A_1]$$

Нетрудно видеть, что ядро интегрального уравнения (1.9) не имеет особенностей на контуре L . Тем же путем, как это сделано в [4] для случая квазистационарной постановки задачи, можно показать, что решение интегрального уравнения (1.9) совпадает с решением системы (1.1), (1.7).

Гидродинамический смысл проведенного устранения особенности ядра состоит в том, что решение уравнения (1.1) ищется в классе функций, обеспечивающих непрерывность давления всюду в потоке, в том числе и в острой задней кромке профиля.

Критическая линия тока стационарного течения, необходимая для вычисления несобственных интегралов в формулах (1.2) и (1.4), определялась как решение следующей задачи Коши:

$$(1.10) \quad dx/dt = v_{0x}(x, y), \quad dy/dt = v_{0y}(x, y), \quad x(0) = x_B, \quad y(0) = y_B$$

Здесь x_B, y_B — координаты задней кромки профиля решетки в среднем положении. Функции $v_{0x}(x, y)$ и $v_{0y}(x, y)$ определялись по формуле

$$(1.11) \quad v_{0x} - iv_{0y} = -\frac{i\tau}{\gamma} \int_L v_0(\sigma) [\operatorname{cth} Z(\sigma) + 1] d\sigma + e^{-i\psi}$$

$$Z = \pi\tau [(x - \xi(\sigma)) + i(y - \eta(\sigma))]$$

где ξ, η — координаты точек контура L , а ψ — геометрический угол атаки.

Коэффициенты аэродинамических сил и момента относительно передней кромки, действующих на n -й профиль решетки,

$$(1.12) \quad C_x + iC_y = \frac{X_0 + iY_0 + (X + iY)e^{j(qt + n\mu\pi)}}{1/2\rho V_1^2 b}, \quad C_m = \frac{M_0 + Me^{j(qt + n\mu\pi)}}{1/2\rho V_1^2 b^2}$$

представим в виде

$$(1.13) \quad C_k = C_{0k} + \delta(t)C_{\delta k} \quad (k=x, y, m)$$

Здесь t — безразмерное время; ρ — плотность жидкости; через X_0 , Y_0 и M_0 обозначены соответственно аэродинамические силы и момент, действующие на профиль решетки в стационарном потоке, а через $C_{0x, y, m}$ — их безразмерные коэффициенты. Функция $\gamma(t)$ характеризует форму и амплитуду колебаний профилей решетки; в частности, при поступательных и вращательных колебаниях эта функция представляет собой перемещение или поворот профилей соответственно. Коэффициенты $C_{\delta k}$ ($k=x, y, m$) нестационарных аэродинамических сил $X+iY$ и момента M определялись по формулам

$$(1.14) \quad C_{\delta x} + iC_{\delta y} = -2ijq \left[z_B \Gamma - \int_L vz \, ds + \int_L v_0 f_\sigma \, dz \right] + 2iq^2 \left[(A_1 z_B - \int_L f_\sigma \, ds) - 2i \int_L v_0 v \, dz + \alpha_1 \int_L v_0^2 \, dz \right]$$

$$(1.15) \quad C_{\delta m} = -jq(\Gamma + jqA_1)r_B^2 + jq \int_L (v + jqf_\sigma)r^2 \, ds + (\alpha_1 - 1) \int_L v_0^2 f_\sigma \, ds - 2jq \int_L v_0 f_\sigma (x \, dx + y \, dy) - 2 \int_L v_0 v (x \, dx + y \, dy)$$

$$\Gamma = \int_L v(s) \, ds, \quad z = x + iy, \quad f_\sigma = f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha$$

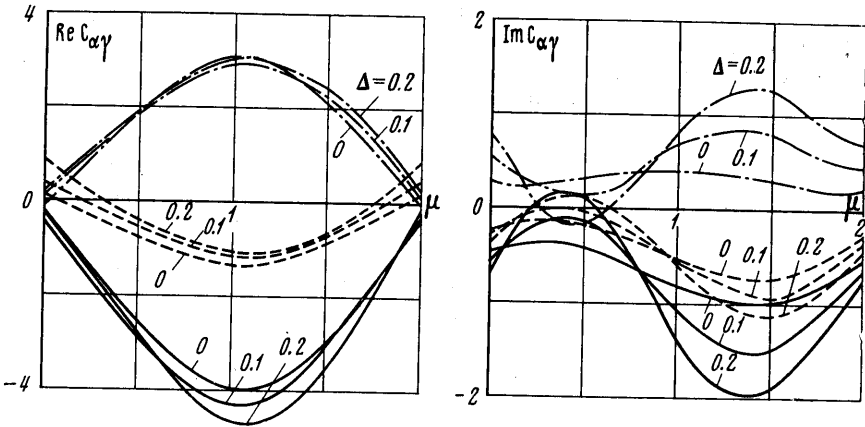
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r_B = r(0), \quad z_B = x_B + iy_B$$

Индекс δ у коэффициентов сил и момента в дальнейшем будет принимать значения y_1 при поступательных колебаниях перпендикулярно хорде профиля и α при вращательных колебаниях вокруг передней кромки. При поступательных колебаниях $\alpha_1 = 0$, а при вращательных $\alpha_1 = 1$.

2. Коэффициенты нестационарных аэродинамических сил и момента, действующих на профиль решетки, определялись численно на ЭВМ БЭСМ-6. Необходимая для их вычисления относительная скорость жидкости на профиле $v(s)$ определялась из уравнения (1.9). Интегральное уравнение для функции $v_0(s)$ и система интегральных уравнений, получаемая разделением действительной и мнимой (по j) частей уравнения (1.9), решались методом, предложенным в работе [4]. Число разбиений контура N_1 в расчетах принималось 40. Характер разбиения контура профиля определялся требованием минимальной ошибки при вычислении контурных интегралов в соответствии с оценками, полученными в этой работе. Это соображение и сравнение с известными результатами позволяют установить, что число разбиений $N_1 = 40$ приемлемо для практических расчетов.

Для вычисления несобственных интегралов по линии вихревого следа переходим к конечному промежутку интегрирования $[0, P]$, длина которого определяется задаваемой точностью и зависит от густоты и угла выноса решетки, сдвига фазы, числа Струхали и угла атаки. Интегралы по отрезку $[0, P]$ удобно вычислять по квадратурным формулам Филона [6] для интегралов от колеблющихся функций. При их применении ошибка вычисления интегралов не зависит от числа Струхали и, следовательно, шаг интегрирования Δu может быть выбран одинаковым для всех значений параметра q . Отметим, что величина Δu должна быть соизмерима с длиной первого отрезка разбиения контура L .

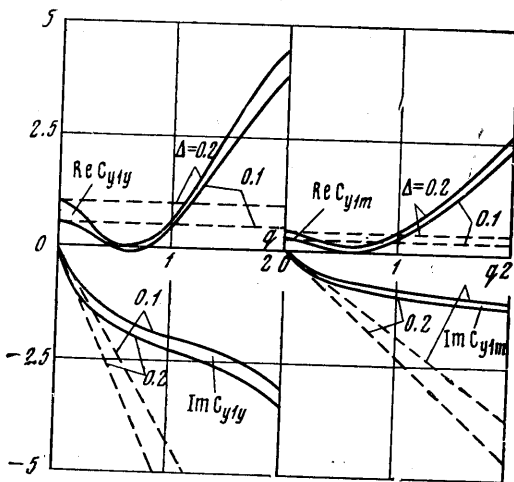
Системы линейных алгебраических уравнений, соответствующих интегральным уравнениям для функций v_0 и v , решались методом исключения, а интегралы в формулах для коэффициентов аэродинамических сил и момента вычислялись по формуле прямоугольников с ординатами в средних точках. Время счета варианта для одного сдвига фазы в приводимых ниже расчетах изменялось в пределах 0.5–4 мин. в зависимости от значения величины μ . Оценки, полученные в [4] при доказательстве сходности метода, и сравнение с результатами расчетов по теории тонкого профиля служат для контроля и определяют точность вычислений.



Фиг. 2

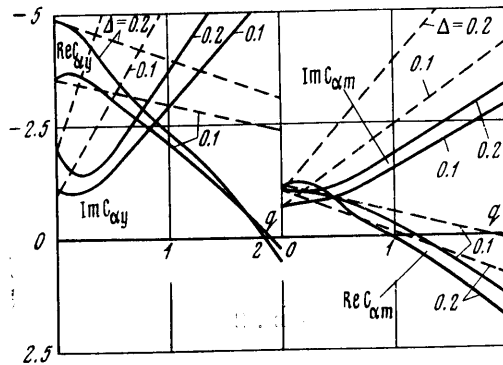
Для иллюстрации влияния телесности профилей и вихревого следа на силы и момент, действующие на колеблющиеся профили, приведем некоторые результаты расчетов.

На фиг. 2 представлены зависимости коэффициентов C_{ax} ($\gamma=x$, штрихпунктирные линии), C_{ay} ($\gamma=y$, сплошные линии) и C_{am} ($\gamma=m$, пунктирные линии) от сдвига фазы для густой ($\tau=2$) решетки профилей с относительным прогибом средней линии $\lambda=0.1$ при различных значениях относительной толщины $\Delta=0, 0.1, 0.2$. Эта решетка изображена на фиг. 1. Пунктирная линия соответствует профилю с относительной толщиной $\Delta=0.1$, а сплошная — профилю с $\Delta=0.2$. Точками отмечены концы отрезков разбиения контура L при $N_1=40$. Угол выноса решетки $\beta=30^\circ$, а число Струхала $q=0.5$. Расчеты по сдвигу фазы проведены с шагом $\Delta\mu=0.2$.



Фиг. 3

На фиг. 3 показаны зависимости коэффициентов C_{y1y} и C_{y1m} от числа Струхала q при $\Delta=0.1, 0.2$ для той же решетки профилей, совершающих поступательные колебания со сдвигом фазы π ($\mu=1$) в направлении, перпендикулярном хорде. На фиг. 4 изображены аналогичные зависимости коэффициентов C_{ay} и C_{am} при вращательных колебаниях со сдвигом фазы 1.5π ($\mu=1.5$). Этот сдвиг фазы рассмотрен потому, что, как видно из фиг. 2, наибольшее влияние телесности профилей наблюдается именно в этом случае. Расчеты были проведены для значений числа Струхала $q=0, 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2$ и густоты $\tau=1$ на фиг. 3 и $\tau=2$ на фиг. 4. Пунктирными прямыми на этих фигурах изображены зависимости соответствующих коэффициентов, рассчитанных по гипотезе стационарности.



Фиг. 4

В рассмотренных примерах геометрический угол атаки $\nu=0.925$ рад, максимальный прогиб средней линии расположен в середине хорды профиля, а максимальная толщина — на расстоянии $0.3b$ от передней кромки. Результаты при $\Delta=0$ получены методом, предложенным в [1]. Подробное обсуждение особенностей этого метода содержится в [2].

Результаты расчетов показали, что для решеток средней густоты ($\tau \leq 1$) при относительной толщине $\Delta \leq 0.1$ влияние телесности на нестационарные аэродинамические характеристики несущественно и теория тонкого профиля дает надежные результаты.

Для решеток большой густоты ($\tau > 1$) влияние телесности на зависимость нестационарных аэродинамических характеристик от числа Струхала и сдвига фазы становится существенным и ее необходимо учитывать. Сравнение с квазистационарной теорией показало, что учет влияния вихревых следов за профилями решетки необходим во всей области значений числа Струхала, за исключением малой окрестности точки $q=0$.

Поступила 12 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлович Г. С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М., «Наука», 1969.
2. Горелов Д. Н., Курзин В. В., Сарен В. Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск, «Наука», Сиб. отд., 1971.
3. Сарен В. Э. Решетка произвольных вибрирующих профилей в потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
4. Рябченко В. П., Сарен В. Э. К расчету аэродинамических характеристик решеток профилей произвольной формы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
5. Нигусов В. В., Самойлович Г. С. Расчет обтекания решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом фаз и с учетом смещения профилей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
6. Хемлинг Р. Численные методы. М., Изд-во иностр. лит., 1971.
7. Сарен В. Э. Обтекание решетки тонких криволинейных профилей нестационарным потоком несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.