

для системы (4) в осесимметричном случае. Это решение было сопоставлено с численным решением аналогичной задачи при учете гидравлического (турбулентного) сопротивления $-Kv|h^{-1}$, где K — коэффициент шероховатости (в гидравлике $K \sim 10^{-2}$). На фиг. 1 изображены распределения h вдоль осевого сечения для нескольких моментов времени, при этом пунктирные линии соответствуют аналитическому решению, сплошные — численному при $K=10^{-2}$. Таким образом, в начальной стадии движения гидравлическое сопротивление оказывается мало существенным, и можно пользоваться решениями системы (4).

На фиг. 2, 3 изображено численное решение соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений для более общего несимметричного случая. В расчетах было принято

$$v(x, 0) \equiv 0, \quad h(x, 0) = -0.025, \quad x_1^2 - 0.04x_2^2 + 10$$

$$z(x, t) = 0.004x_1^2 + 0.01x_2^2$$

На фиг. 2 представлено поведение $h(0, t)$, а фиг. 3 изображает границу распространения жидкости для нескольких моментов времени. Как видим, возникают, вообще говоря, непериодические колебания.

Приведенные решения описывают довольно сложные движения жидкости и газа, что может оказаться полезным при отработке различных численных методов для исходных систем уравнений в частных производных.

Поступила 25 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Остроумов А. В. Некоторые точные решения уравнений движения тяжелой жидкости в приближении мелкой воды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.

УДК 532.516.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ НЕНАГРУЖЕННОГО ШИПА В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОДШИПНИКЕ

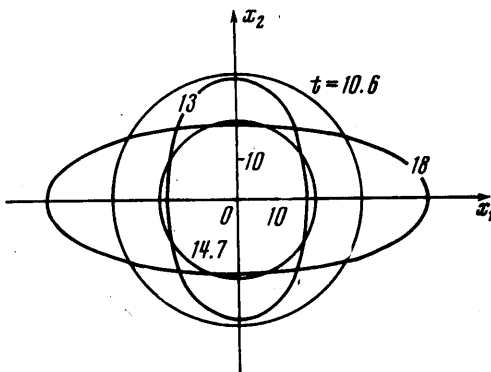
А. Л. УРИНЦЕВ

(Ростов-на-Дону)

На основе уравнений Навье — Стокса рассматривается двумерная задача об устойчивости центрального положения подвижного шипа в цилиндрическом подшипнике жидкостного трения с произвольным смазочным зазором. Математически задача устойчивости формулируется как задача на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных разделением переменных в линеаризованных уравнениях движения динамической системы шип — смазочная жидкость. Для двух случаев: а) малые числа Рейнольдса, б) малые толщины смазочного слоя — аналитически и численно с применением ЭВМ рассчитаны границы области устойчивости.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость (смазка) плотности ρ_2 и кинематической вязкости ν заполняет пространство между подвижным внутренним цилиндром (шипом) и неподвижным внешним цилиндром (подшипником), радиусы которых равны соответственно r_1 и r_2 . Шип вращается равномерно с заданной угловой скоростью Ω_1 и движется в слое смазочной жидкости под действием гидродинамических сил.

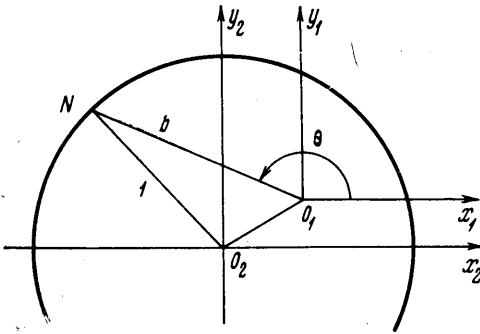
Предполагается, что внешняя нагрузка на шип отсутствует, а его ось сохраняет вертикальное положение. Обозначим через ρ_1 приведенную плотность материала шипа, определяемую по формуле $\rho_1 = M_1 / (\pi r_1^2 L_1)$, где M_1 — масса ротора, L_1 — ширина подшипника. Примем для получения безразмерной формы уравнений за единицы дли-



Фиг. 3

ны, времени, плотности соответственно величины r_2 , $\Omega_1^{-1}(r_1/r_2)^{-2}$, ρ_2 и введем безразмерные параметры $a=r_1/r_2$, $M=\rho_1/\rho_2$, $Re=\Omega_1 r_1^2/\nu$. Выбрав начало O_1 декартовых координат $O_1 x_1 y_1$ в центре шипа и направив подвижные оси параллельно осям неподвижной системы отсчета $O_2 x_2 y_2$ (фиг. 1), введем полярные координаты r , θ с полюсом в точке O_1 . Запишем уравнения абсолютного движения жидкости, отнесенного к подвижной системе координат (см. [1], стр. 226)

$$(1.1) \quad \dot{v}_r + (v_r - \dot{e}_r) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (v_\theta - \dot{e}_\theta) \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - Re^{-1} \frac{\partial \Omega_z}{r \partial \theta}$$



Фиг. 1

Здесь и ниже точкой обозначена производная по явно входящему времени t , e_r и e_θ — проекции вектора смещения центра шипа на направления осей r и θ ; $\xi = \xi(t)$ и $\eta = \eta(t)$ — декартовы координаты центра шипа в системе отсчета $O_2 x_2 y_2$, $\Omega_z = (\text{rot } \mathbf{v})_z$ — не равная нулю компонента вихря в проекции на ось шипа. На шпипе и подшпипнике выполняются условия прилипания

$$(1.2) \quad v_r = \dot{e}_r, \quad v_\theta = a^{-1} + \dot{e}_\theta \quad (r=a); \quad v_r = v_\theta = 0 \quad (r=b)$$

Величина $b = (1 - e_\theta^2)^{1/2} - e_r$ вычисляется при помощи геометрических соображений из треугольника $O_1 N O_2$ (фиг. 1). Движение центра шипа в неподвижной системе координат описывается уравнениями

$$(1.3) \quad M \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{rr} \\ p_{r\theta} \end{pmatrix} a \, d\theta$$

$$p_{rr} = -p + 2 Re^{-1} \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{r\theta} = Re^{-1} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \right)$$

где p_{rr} , $p_{r\theta}$ — нормальное и касательное напряжения в слое смазки, индекс a означает, что соответствующая величина вычисляется при $r=a$. Используя граничные условия на шпипе и уравнение неразрывности, выразим напряжения на шпипе через давление p и вихрь Ω_z . Подставляя затем найденные p_{rr} , $p_{r\theta}$ в (1.3) и исключая давление при помощи (1.1), (1.2), приходим к соотношению

$$(1.4) \quad Re(M-1) \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial r} - \frac{\Omega_z}{r} \right) a \, d\theta$$

Положим в (1.1)–(1.4)

$$v_r = -\frac{\partial \Psi}{r \partial \theta}, \quad v_\theta = w + \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \Omega_z = \frac{dw}{dr} + \frac{w}{r} + \Omega$$

где $w = w(r) = (r^{-1} - r)/(1 - a^2)$ — известное решение уравнений Навье — Стокса (течение Куэтта между соосными цилиндрами). Исключив давление из (1.1), получим уравнения, описывающие возмущенное движение шипа и смазочной жидкости

$$Re(M-1) \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\Omega}{r} \right) a \, d\theta, \quad \Delta \Psi = \Omega$$

$$\begin{aligned}
 \text{(1.5)} \quad \operatorname{Re}^{-1} \Delta \Omega &= \dot{\Omega} + w \frac{\partial \Omega}{r \partial \theta} - \left(\frac{\partial \Psi}{r \partial \theta} + \dot{\epsilon}_r \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \dot{\epsilon}_\theta \right) \frac{\partial \Omega}{r \partial \theta} \\
 \frac{\partial \Psi}{r \partial \theta} &= -\dot{\epsilon}_r, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \dot{\epsilon}_\theta \quad (r=a); \quad \frac{\partial \Psi}{r \partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -w(b) \quad (r=b) \\
 \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}, \quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)_a d\theta = 0
 \end{aligned}$$

где Ψ и Ω есть 2π – периодические функции угла θ ; последнее уравнение системы (1.5) вытекает из требования периодичности давления.

2. Уравнения линейной задачи. Нормальные колебания. Нелинейная задача (1.5) имеет тривиальное решение

$$(2.1) \quad \xi = \eta = 0, \quad \Psi = \Omega = 0$$

соответствующее центральному положению вращающегося шипа. Линеаризуя систему (1.5) в окрестности этого основного решения и отделяя время при помощи замены

$$(\xi, \eta, \Psi, \Omega) = (\alpha, \beta, \psi_1, \omega_1) \exp(-ict), \quad \psi_1 = \psi_1(r, \theta), \quad \omega_1 = \omega_1(r, \theta)$$

где α и β постоянные, $c = c_r + ic_i$ – неизвестная комплексная частота, приходим к задаче на собственные значения

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}^{-1} \Delta \omega_1 &= w \frac{\partial \omega_1}{r \partial \theta} - ic \omega_1, \quad \Delta \psi_1 = \omega_1, \quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial r} \right)_a d\theta = 0 \\
 \text{(2.2)} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \end{bmatrix} &= ic \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (r=a) \\
 \frac{\partial \psi_1}{r \partial \theta} &= 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{dw(1)}{dr} (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) \quad (r=1) \\
 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial r} - \frac{\omega_1}{r} \right)_a e^{\mp i\theta} d\theta &= i \operatorname{Re} c^2 (M-1) (\pm \alpha - i\beta)
 \end{aligned}$$

Требуется отыскать такие значения параметра c , при которых задача (2.2) имеет нулевое решение. Устойчивость определяется знаком c_i .

При помощи разложения в ряд Фурье убеждаемся, что решение задачи (2.2) представляет собой линейную комбинацию решений вида

$$(2.3) \quad (\psi_1, \omega_1) = (\psi(r), \omega(r)) \exp(in\theta), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Случай $n=0$ исключен из рассмотрения, так как вращательно-симметричные возмущения в двумерной задаче экспоненциально затухают. Ограничимся рассмотрением случая целых $n > 0$, так как решение, соответствующее $n < 0$, получается из решения для $n > 0$ преобразованием $(\psi, \omega, \alpha, \beta, c) \rightarrow (\psi, \omega, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, -\bar{c})$, где черта означает операцию комплексного сопряжения.

Пусть сначала $n \neq 1$. Из граничных условий тогда находим, что $\alpha = \beta = 0$ (шип не смещается), и задача после отделения угловой переменной θ принимает вид

$$\begin{aligned}
 \text{(2.4)} \quad D_n \psi &= \omega, \quad D_n \omega = i \operatorname{Re} \left(\frac{nw}{r} - c \right) \omega, \quad D_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{r dr} - \frac{n^2}{r^2} \\
 \psi &= \frac{d\psi}{dr} = 0 \quad (r = a, 1)
 \end{aligned}$$

При $\psi, \omega \neq 0$ эта задача аналогична задаче Орра – Зоммерфельда для плоского течения Куэтта [2]. Положив

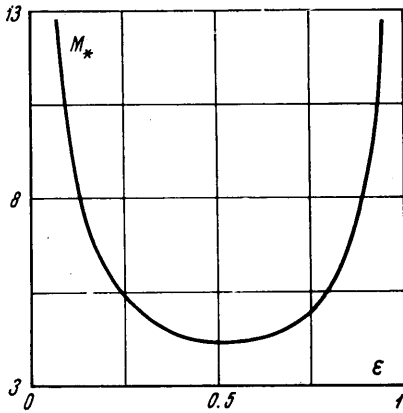
$$r^2 = 1 - \varepsilon x, \quad \varepsilon = 1 - a^2 \quad (0 < \varepsilon < 1), \quad R = \varepsilon^2 \operatorname{Re}/4$$

умножим обе части второго уравнения (2.4) на $r\bar{\psi}$, затем проинтегрируем по отрезку $0 \leq x \leq 1$, где требуется, используем интегрирование по частям и в полученном равен-

стве отделим вещественную часть

$$\int_0^1 \left| (r^2 \psi')' - \left(\frac{n\varepsilon}{2r} \right)^2 \psi \right|^2 dx = i n R \int_0^1 \frac{\bar{\psi}}{r} d \left(\frac{\psi}{r} \right) - c_i R \int_0^1 \left| \psi' + \frac{n\varepsilon}{2r} \psi \right|^2 r^2 dx$$

Из этого тождества с помощью энергетических оценок можно вывести, что при достаточно малых приведенных числах Рейнольдса R величина $c_i < 0$ (устойчивость). Таким образом, при малых R стационарный режим (2.1) устойчив относительно возмущений с азимутальным волновым числом n , не равным единице. При $n=1$ движения жидкости и шипа взаимосвязаны и уравнения (2.2) в силу (2.3) дают



Фиг. 2

$$\beta = i\alpha, \quad D_1 \psi = \omega, \quad D_1 \omega = i \operatorname{Re} (w/r - c) \omega$$

$$\frac{d\omega}{dr} - \frac{\omega}{r} = i \operatorname{Re} c^2 (M-1) \alpha,$$

$$\frac{\psi}{r} = \frac{d\psi}{dr} = c\alpha \quad (r=\alpha)$$

$$\psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dr} = -\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \quad (r=1)$$

Полагая здесь $\psi = B(x)r^{-1} + \alpha w$, $\omega = 4\varepsilon^{-2} r A(x)$ и исключая затем функцию $B(x)$ и амплитуду α отклонения центра шипа, получаем систему

$$(2.5) \quad \begin{aligned} ((1-\varepsilon x)^2 A')' &= iR(x-c(1-\varepsilon x))A, \\ \int_0^1 (x-c(1-\varepsilon x))A dx &= 0 \end{aligned}$$

$$A'(0) = (1-\varepsilon)^2 A'(1) = 0.5iRc\varepsilon(1-\varepsilon)(M-1) \int_0^1 Ax dx$$

3. Случай малых чисел Рейнольдса. При небольших числах R естественно использовать метод малого параметра, применявшийся для решения задач гидродинамической устойчивости, например, в [3-5]. Добавим для определенности условие нормировки $A(0)=1$ и будем разыскивать решение задачи на собственные значения (2.5) в виде

$$(3.1) \quad A = \sum_{h=0}^{\infty} (iR)^h A_h(x), \quad c = \sum_{h=0}^{\infty} (iR)^h c_h$$

Собирая члены с одинаковыми степенями параметра iR , приходим к серии задач, которые можно решать последовательно. В самом деле, порождающая задача при $(iR)^0$ имеет решение $A_0=1$, $c_0=(2-\varepsilon)^{-1}$, остальные, если принять соглашение полагать величины A_h, c_h равными нулю для отрицательных значений индекса, могут быть записаны в форме ($k=1, 2, 3, \dots$)

$$(3.2) \quad ((1-\varepsilon x)^2 A_k')' = x A_{k-1} - (1-\varepsilon x) \sum_{s=0}^{k-1} A_s c_{k-1-s}, \quad A_k(0) = 0$$

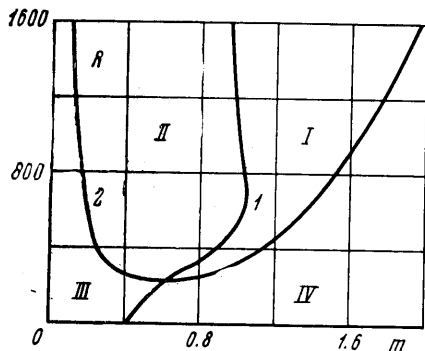
$$A_k'(0) = 0.5\varepsilon(1-\varepsilon)(M-1) \sum_{s=0}^{k-1} c_{k-1-s} \int_0^1 A_s x dx$$

$$(3.3) \quad c_k/c_0 = \int_0^1 x A_{k-1} dx - \sum_{s=0}^{k-1} c_s \int_0^1 (1-\varepsilon x) A_{k-s} dx$$

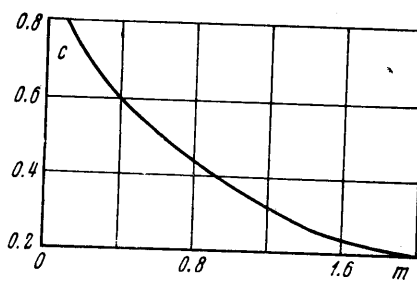
Пусть величины с индексом, меньшим фиксированного номера k , уже вычислены. Задача (3.2), будучи задачей с начальными данными, тогда однозначно разрешима. Решая ее, находим функцию A_k , а затем определяем постоянную c_k из соотношения (3.3). Таким образом, процесс вычисления коэффициентов разложений (3.1) может быть продолжен неограниченно, сходимость постоянных рядов доказывается при помощи теоремы о неявной функции [6]. В силу равенства $c_i = Rc_i + O(R^3)$, вытекающего из (3.1), знак c_i при малых R определяется знаком коэффициента c_1 , для которого вычисления дают формулу

$$(3.4) \quad \begin{aligned} c_1 &= K(M - M_*) \\ K &= ((1-\varepsilon)(\varepsilon-2) \ln(1-\varepsilon) - 2\varepsilon(1-\varepsilon)) / (2(2-\varepsilon)^3 \varepsilon^2) \\ M_* &= 1 + 4(3(1-\varepsilon)(\varepsilon-2) \ln(1-\varepsilon) - 6\varepsilon(1-\varepsilon))^{-1} - 8\varepsilon^{-3} \end{aligned}$$

Функции K и M_* положительны при всех значениях зазора $0 < \varepsilon < 1$. График зависимости M_* от ε изображен на фиг. 2. Точка минимума имеет координаты $\varepsilon = 0.5157$,



Фиг. 3



Фиг. 4

$M_* = 4.132$. При $\varepsilon \rightarrow 1$ (вихревая нить) и $\varepsilon \rightarrow 0$ (узкий зазор) величина M_* стремится к бесконечности, причем

$$M_* \sim 4(3(\varepsilon-1) \ln(1-\varepsilon))^{-1} (\varepsilon \rightarrow 1), \quad M_* \sim 0.8\varepsilon^{-1} + 1.8 (\varepsilon \rightarrow 0)$$

Погрешность последней асимптотической формулы не превышает 5% для $0 < \varepsilon < 0.2$.

Из формулы (3.4) вытекает, что необходимое и достаточное условие неустойчивости центрального положения шипа в случае малых чисел R и произвольного смазочного зазора выражается неравенством $M > M_*$. Иными словами, неустойчивость наступает при сколь угодно малых числах Рейнольдса, если только масса шипа достаточно велика. Отметим, что в работе [7] получен вывод об абсолютной неустойчивости с использованием уравнений гидродинамики в приближении узкого зазора.

Приведем выражение для собственного вектора задачи (2.2), справедливое при малых R ,

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Psi &= \gamma(1-\varepsilon x)^{-1/2} x(1-x/(2-\varepsilon)) \cos(\theta-\tau) \\ (\xi, \eta) &= \gamma(\cos \tau, \sin \tau), \quad \tau = t/(2-\varepsilon) \end{aligned}$$

Здесь γ — произвольный амплитудный множитель. Пусть Ω_* — размерная угловая скорость поворота прямой, соединяющей центр подшипника с центром шипа (скорость прецессии); Ω_* соответствует безразмерной угловой скорости c_0 . Из (3.5) находим, что $\Omega_* = \Omega_1 / (1 + (r_2/r_1)^2)$, и в предельном случае узкого зазора ($\varepsilon \rightarrow 0$) получаем простую формулу $\Omega_* = \Omega/2$.

4. Случай узкого смазочного зазора. Предположение о малости величины ε позволяет заменить задачу (2.5) следующей

$$(4.1) \quad \begin{aligned} A'' &= iR(x-c)A, \quad A'(0) = iRc^2 m \int_0^1 A dx \\ \int_0^1 (x-c)A dx &= 0, \quad m = (1-a)M, \quad R = \Omega_1(r_2-r_1)^2/\nu \end{aligned}$$

и получить для собственного значения на основании (3.4) выражение

$$(4.2) \quad c = \frac{1}{2} + \frac{iR}{48} \left(m - \frac{2}{5} \right) + O(R^2)$$

Границу устойчивости находим, решая уравнение $c_i(m, R) = 0$. Из (4.2) видно, что точка $m=0.4$, $R=0$ лежит на границе устойчивости. Для вычисления критического значения числа R , близкого к нулю при $m \approx 0.4$, положим $m = 0.4 + \mu^2$, $A(0) = 1$ (условие нормировки) и будем разыскивать решение системы (4.1) в виде

$$(4.3) \quad A = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k, \quad c = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k h_k, \quad R = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} R_k$$

требуя дополнительно, чтобы собственное число c было вещественным. Сходимость рядов обосновывается методами, развитыми в [6]. Последовательное решение задач при μ^0 , μ^1 , μ^2 , μ^3 позволяет вычислить коэффициент R_0 и дать для критического числа Рейнольдса асимптотическую формулу

$$(4.4) \quad R = 461.77(m - 0.4)^{1/2}$$

При немалых числах R ($R \leq 1600$) расчет производился путем сведения граничной задачи (4.1) к нескольким задачам Коши и численного интегрирования последних на ЭВМ «ODRA - 1204» по методу Кутты - Мерсона с автоматическим выбором шага [8, 9]. Комплексные собственные значения отыскивались при $R \leq 10$ обычным методом итераций с начальным приближением $c = 0.5$, а при $10 < R \leq 1600$ - методом линейной экстраполяции [2]. Всего было подсчитано несколько сот собственных чисел в узлах неравномерной сетки на плоскости m, R и найдено, что погрешность формулы (4.4) не превышает 5%, если $R \leq 200$. Результаты вычисления нейтральных кривых приведены на фиг. 3, зависимость c от m вдоль кривой 2 изображена на фиг. 4. В областях I и II центральное положение шипа устойчиво, а в зонах III и IV - неустойчиво.

В заключение отметим некоторые свойства задачи (4.1), существенно облегчившие расчет. Во-первых, на всей нейтральной кривой 1 скорость прецессии шипа точно равна половине скорости вращения вала. В самом деле, положив в (4.1) $c = 0.5$, $y = -x - c$, $A = u(y) + iRv(y)$ (где u и v вещественны) и отделив вещественную и мнимую части, убеждаемся, что, не теряя в общности, можно требовать, чтобы функция u была четной, а v - нечетной функцией переменной y . Часть полученных уравнений вследствие этой симметрии удовлетворяется автоматически, а остальные могут быть записаны в виде вещественной граничной задачи

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u'' &= -R^2 y v, & v'' &= y u \quad (0 \leq y \leq 0.5) \\ u(0) &= 1, & u'(0) &= v(0) = 0, & \int_0^{0.5} y v \, dy &= 0 \\ & & & & \left(m = 2v'(0.5) \int_0^{0.5} u \, dy \right) \end{aligned}$$

Последнее условие служит для вычисления массы шипа при найденных $u(y)$, $v(y)$ и заданном R . Таким способом была рассчитана кривая 1. Во-вторых, задача (4.1) при вещественном c , как можно видеть, инвариантна относительно преобразований

$$(4.6) \quad R \rightarrow R, \quad c \rightarrow 1 - c, \quad m \rightarrow mc^2(1 - c)^2, \quad x \rightarrow 1 - x, \quad A \rightarrow \bar{A}$$

Последнее обстоятельство позволяет сократить объем вычислений вдвое: зная m и c на правой ветви нейтральной кривой 2, можно получить их значения на левой ветви простым пересчетом по формулам (4.6).

Автор благодарит В. И. Юдовича за внимание к работе.

Поступила 15 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
2. Бегчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
3. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.

4. Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений. Сб. «Численные методы решения задач математической физики», дополнение к Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 4, стр. 242.
5. Гончаренко Б. Н., Уринцев А. Л. Об устойчивости движения жидкости, вызванного термокапиллярными силами. ПМТФ, 1971, № 6, стр. 94–98.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
7. Крылов А. Л., Шустер В. Г. Об устойчивости центрального положения шипа в гидродинамическом подшипнике. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 5, стр. 1030.
8. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Christiansen J. Numerical solution of ordinary simultaneous differential equations of the 1-st order using a method for automatic step change. Numer. Math., 1970, vol. 14, No. 4, p. 317.

УДК 532.517.4:518.5

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ДАЛЬНОГО СЛЕДА В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. И. СКУРИН

(Ленинград)

С помощью метода сеток исследуется распределение параметров в гиперзвуковом турбулентном изобарическом следе с учетом ионизации. Предполагается, что след представляет собой совершенный газ, содержащий малое количество примеси электронов и ионов, между которыми протекает реакция диссоциативной рекомбинации. Интегрирование уравнений движения, энергии и сохранения концентрации электронов проводится от некоторого начального сечения, параметры в котором оцениваются с помощью известных опытных данных о следе за тупым телом, движущимся в атмосфере аргона, до расстояний порядка 10^4 калибров. Исследуется также полуэмпирически замкнутое уравнение баланса турбулентной энергии.

Путем сравнения численных результатов с асимптотическими распределениями искомых параметров показано, что расстояния, на которых «достигается» асимптотический закон, различны для различных параметров следа и сильно зависят от числа Маха (это не относится к радиусу следа). Показано также слабое влияние формы начальных профилей на распределение параметров вниз по потоку.

Система уравнений безградиентного дальнего турбулентного осесимметричного следа в совершенном газе, включающая в себя уравнение сохранения концентрации ξ пассивной неконсервативной примеси, и соответствующие граничные условия в переменных Мизеса имеют вид

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \rho v_x r &= \psi \frac{\partial \psi}{\partial r}, & \rho v_r r &= -\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
 \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu \frac{\rho v_x r^2}{\psi} \frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right) \\
 \frac{\partial T}{\partial x} &= \alpha \mu \frac{\rho v_x r^2}{\psi^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\rho v_x r^2}{\psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \\
 \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{Sc} \frac{\rho v_x r^2}{\psi} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + \frac{w}{\rho v_x}, & \rho &= \frac{1}{T}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \psi &= 0, & v_r &= \partial v_x / \partial \psi \neq \partial T / \partial \psi = \partial \xi / \partial \psi = 0 \\
 \psi &\rightarrow \infty, & v_x &\rightarrow 1, \quad T \rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow \xi_\infty \\
 x &= x_H, & v_x &= v_H(\psi), \quad T = T_H(\psi), \quad \xi = \xi_H(\psi)
 \end{aligned}$$

Здесь все величины безразмерные, $x, r(d)$ – продольная и радиальная координаты, $\psi(d\sqrt{\rho_\infty v_\infty})$ – функция тока, $v_x, v_r(v_\infty)$ – составляющие вектора скорости, $T(T_\infty)$ – температура, $\rho(\rho_\infty)$ – плотность, ξ – относительная массовая концентрация примеси, $\mu(\rho_\infty v_\infty d)$ – коэффициент турбулентной вязкости, $w(\rho_\infty v_\infty / d)$ – скорость образования примеси вследствие химической реакции, $\alpha = (\kappa_\infty - 1) M_\infty^2$, κ – показа-