УДК 532.51

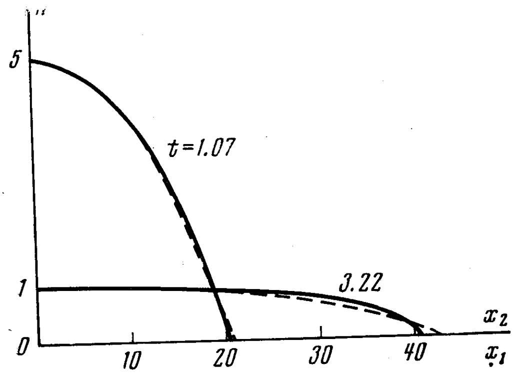
ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

А. В. ОСТРОУМОВ

(*Москва*)

В работе указан класс частных решений уравнений изэнтропических течений газа и уравнений движения тяжелой жидкости в приближении мелкой воды без учета сил внутреннего сопротивления. Решения имеют вид полиномов по пространственным координатам. В задаче о разрушении хранилища жидкости оценивается влияние гидравлического сопротивления.

Рассмотрим изэнтропические течения газа в поле массовых сил, имеющих потенциал U. Пусть изэнтропа аппроксимируется выражением вида: $p=A+B\rho^2$ (A, B – постоянные). Тогда в декартовой системе координат уравнения движения приобретают вид



Фиг. 1

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}(U-2B\rho),\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}=0\qquad (i,j=1,2,3) \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Если

$$U(\mathbf{x},t)=U_{ij}(t)x_ix_j+U_k(t)x_k \tag{2}$$

где $U_{ij}(t)$, $U_k(t)$ – заданные функции, то система (1) имеет частные решения

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{v}_i(t)x_i+\mathbf{v}_0(t),\qquad \rho(\mathbf{x},\ t)=\rho_{ij}(t)x_ix_j+\rho_k(t)x_k+\rho_0(t) \tag{3}$$

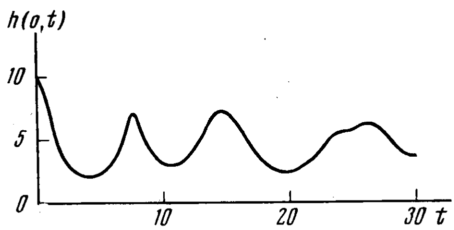
при этом можно считать $\rho_{ij}(t)\equiv\rho_{ji}(t)$.

Таким образом, задача Коши для системы (1) при U вида (2) и начальных данных вида (3) сводится к аналогичной задаче для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения движения мелкой воды при малых уклонах дна имеют в системе координат, связанной с поверхностью дна, вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-g\frac{\partial}{\partial x_i}(z+h),\qquad \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial(hv_j)}{\partial x_j}=0\qquad (i,j=1,2) \tag{4}$$

Здесь $h(\mathbf{x},\ t)$ – глубина жидкости, отсчитываемая по нормали к дну, $z=z(\mathbf{x},\ t)$ – уравнение поверхности дна, g – ускорение силы тяжести (внутреннее трение не учитывается). Структура систем (1) и (4) одинакова, поэтому при $z(\mathbf{x},\ t)=$ $=z_{ij}(t)x_ix_j+z_k(t)x_k$ система (4) имеет частные решения вида (3), в которых нужно плотность заменить на глубину жидкости.



Фиг. 2

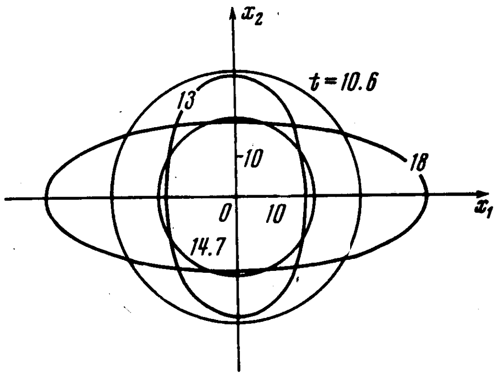
Заметим, что в ряде случаев пренебрежение внутренним трением представляется оправданным и указанными решениями можно пользоваться для оценки реальных движений жидкости. Рассмотрим, например, задачу о разрушении хранилища жидкости. В работе [1] приводится точное аналитическое решение соответствующей задачи Коши для системы (4) в осесимметричном случае. Это решение было сопоставлено с численным решением аналогичной задачи при учете гидравлического (турбулентного) сопротивления $-K\mathbf{v}|\mathbf{v}|h^{-1}$, где K – коэффициент шероховатости (в гидравлике $K\sim 10^{-2}$). На фиг. 1 изображены распределения h вдоль осевого сечения для нескольких моментов времени, при этом пунктирные линии соответствуют аналитическому решению, сплошные – численному при $K=10^{-2}$. Таким образом, в начальной стадии движения гидравлическое сопротивление оказывается мало существенным, и можно пользоваться решениями системы (4).

На фиг. 2, 3 изображено численное решение соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений для более общего несимметричного случая. В расчетах было принято

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)\equiv 0, \quad h(\mathbf{x}, 0)= -0.025 \ x_1^2-0.04x_2^2+10$$

$$z(\mathbf{x}, \ t)=0.004x_1^2+0.01x_2^2$$

На фиг. 2 представлено поведение $h(0, t)$, а фиг. 3 изображает границу распространения жидкости для нескольких моментов времени. Как видим, возникают, вообще говоря, непериодические колебания.



Фиг. 3

Приведенные решения описывают довольно сложные движения жидкости и газа, что может оказаться полезным при отработке различных численных методов для исходных систем уравнений в частных производных.

Поступила 25 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остроумов А. В.* Некоторые точные решения уравнений движения тяжелой жидкости в приближении мелкой воды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.

УДК 532.516.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ НЕНАГРУЖЕННОГО ШИПА В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОДШИПНИКЕ

А. Л. УРИНЦЕВ

(*Ростов-на-Дону*)

На основе уравнений Навье – Стокса рассматривается двумерная задача об устойчивости центрального положения подвижного шипа в цилиндрическом подшипнике жидкостного трения с произвольным смазочным зазором. Математически задача устойчивости формулируется как задача на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных разделением переменных в линеаризованных уравнениях движения динамической системы шип – смазочная жидкость. Для двух случаев: а) малые числа Рейнольдса, б) малые толщины смазочного слоя – аналитически и численно с применением ЭВМ рассчитаны границы области устойчивости.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость (смазка) плотности ρ_2 и кинематической вязкости ν заполняет пространство между подвижным внутренним цилиндром (шипом) и неподвижным внешним цилиндром (подшипником), радиусы которых равны соответственно r_1 и r_2. Шип вращается равномерно с заданной угловой скоростью Ω_1 и движется в слое смазочной жидкости под действием гидродинамических сил.

Предполагается, что внешняя нагрузка на шип отсутствует, а его ось сохраняет вертикальное положение. Обозначим через ρ_1 приведенную плотность материала шипа, определяемую по формуле $\rho_1=M_1/(\pi r_1^2 L_1)$, где M_1 – масса ротора, L_1 – ширина подшипника. Примем для получения безразмерной формы уравнений за единицы дли-