УДК 536.24 : 532.54

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОНИЧЕСКОМ ДИФФУЗОРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

В. И. НАЙДЕНОВ

(*Москва*)

В работе построено решение задачи о движении в коническом диффузоре несжимаемой жидкости с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры. В уравнениях движения и теплопроводности пренебрегается инерционными и диссипативными членами. Предполагается, что температура стенок диффузора зависит от величины, обратной сферическому радиусу. Показано, что функция тока и температура представимы равномерно сходящимися рядами, члены которых удовлетворяют бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследовано поведение линий тока и влияние градиента температуры на радиальную компоненту скорости. Этим же методом решена задача о течении жидкости между двумя соосными конусами.

1. Рассмотрим осесимметричное установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном коническом диффузоре. Задача об изотермическом течении изучена в [1, 2]. Здесь будем предполагать, что динамический коэффициент вязкости и температура жидкости, отсчитанная от температуры на бесконечности, связаны зависимостью

$$\mu / \mu_0 = \exp(-\beta T), \qquad \mu_0,\ \beta = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

Зависимость (1.1) использовалась в [3, 4] при изучении течений Куэтта и Пуазейля и, как показывают эксперименты, удовлетворительно описывает изменение вязкости в небольшом интервале температур.

Рассмотрим очень медленное движение, которое может быть в окрестности стенок или на достаточном удалении от вершины диффузора. В связи с этим инерционными и диссипативными эффектами в уравнениях движения и энергии пренебрегаем. С учетом постоянства коэффициента температуропроводности и осесимметричности течения эти уравнения и уравнение неразрывности запишутся следующим образом [5]:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi} - \tau_{\theta\theta} + \tau_{\theta r}\operatorname{ctg}\theta}{r} \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta + 3\tau_{\theta r}}{r}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r} = 0$$

$$a\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\right] =$$

$$= v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial r}$$

Здесь r, θ, φ — сферические координаты, v_r, v_θ — компоненты вектора скорости, p — давление, T — температура, a — коэффициент температуропроводности, $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{\varphi\varphi}$, $\tau_{r\theta}$ — компоненты тензора вязких напряжений

(1.3)
$$\tau_{rr}=2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r},\qquad \tau_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)$$
$$\tau_{\varphi\varphi}=2\mu\left(\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r}\right),\qquad \tau_{\theta\theta}=2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)$$

Уравнение неразрывности (третье уравнение системы (1.2)) тождественно удовлетворяется, если ввести функцию тока Стокса по формулам

(1.4)
$$v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Пусть

(1.5)
$$\xi=\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi;\quad -1\leqslant\xi\leqslant 1$$

Исключая давление перекрестным дифференцированием и используя соотношения (1.1), (1.3), (1.4), (1.5), придем к системе двух уравнений

(1.6)
$$DD\psi+(1-\xi^2)\left(\beta^2\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial\xi}-\beta\frac{\partial^2 T}{\partial r\,\partial\xi}\right)\left(\frac{4}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\xi}+\right.$$
$$+\frac{2\xi}{r^2(1-\xi^2)}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\left.\frac{6\partial\psi}{r^3\partial\xi}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\left(\beta^2\frac{\partial T^2}{\partial\xi}-\beta\frac{\partial^2 T}{\partial\xi^2}\right)(1-\xi^2)+\right.$$
$$\left.+\beta\xi\frac{\partial T}{\partial\xi}\right]\left[D\psi+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right]-\beta\frac{\partial T}{\partial r}\left[\frac{2}{r^2}(1-\xi^2)\frac{\partial^3\psi}{\partial r\,\partial\xi^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{4}{r^3}(1-\xi^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2\partial^3\psi}{\partial r^3}\right]-$$
$$-\left(\beta^2\frac{\partial T^2}{\partial r}-\beta\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)\left(D\psi+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)-\beta\frac{\partial T}{\partial\xi}(1-\xi^2)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{r^2}\frac{\xi}{1-\xi^2}D\psi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\xi}D\psi-\frac{2}{r^3}\frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\right.$$
$$\left.-\frac{4}{r^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\xi}+\frac{6}{r^4}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)=0$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\xi^2}(1-\xi^2)-\frac{2\xi}{r^2}\frac{\partial T}{\partial\xi}=$$
$$=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$
$$D=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1-\xi^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$$

Предположим, что скорость жидкости на стенке равна нулю

(1.7)
$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(r,\xi_0)=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial r}(r,\xi_0)=0,\qquad \xi_0=\cos\theta_0,\quad r>0$$

Через каждое сечение диффузора зададим постоянный расход жидкости

(1.8)
$$2\pi[\psi(r,1)-\psi(r,\xi_0)]=Q$$

Формула (1.8) справедлива для сходящегося течения, для расходящегося потока необходимо изменить знак расхода. На бесконечности будем предполагать течение строго радиальным

$$\psi(r,\xi)\to\psi(\xi),\quad r\to\infty,\quad 1\geqslant\xi\geqslant\xi_0 \tag{1.9}$$

Соотношение (1.9) верно для углов раствора диффузора, меньших 90°. Как показывают эксперименты [6] и теоретические результаты [7], поле течения вдали от вершины при $\theta_0\geqslant 90°$ является нерадиальным. Температуру жидкости на стенке диффузора будем считать известной функцией r

$$T(r,\xi_0)=\sum_{k=2}^{j}T_k r^{-k},\quad r>0 \tag{1.10}$$

где T_k — заданные числа.

Будем искать решение уравнений (1.6) в виде

$$\psi(r,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\xi)r^{-k},\quad T(r,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\xi)r^{-k} \tag{1.11}$$

Если ряды (1.11) формально подставить в систему уравнений (1.6) и приравнять члены при одинаковых степенях r, то получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left[(k+2)(k+3)+(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2}\right]\left[k(k+1)a_k+(1-\xi^2)\frac{d^2a_k}{d\xi^2}\right]= \tag{1.12}$$

$$=-\beta^2\Bigg[\sum_{m=0}^{k}\ \sum_{n=0,m+n+l=k}^{k}2(1-\xi^2)m(2l+3)b_mb_n'a_l'+$$

$$+2\xi mlb_mb_n'a_l+(1-\xi^2)^2b_m'b_n'a_l''-(1-\xi^2)l(l+3)b_m'b_n'a_l+$$

$$+mnl(l+3)b_mb_na_l-(1-\xi^2)mnb_mb_na_l''\Bigg]+$$

$$+\beta\Bigg[\sum_{m=0,m+l=k}^{k}2(1-\xi^2)(l^2+l(2m+3)+3(m+1))b_m'a_l'+$$

$$+2\xi(l^2+l(m+3))b_m'a_l+(1-\xi^2)^2b_m''a_l''-(1-\xi^2)l(l+3)b_m''a_l-$$

$$-4\xi(1-\xi^2)b_m'a_l''+(1-\xi^2)(4m+m(2l-1)-$$

$$-m^2)b_ma_l''+2(1-\xi^2)^2b_ma_l''\Bigg]$$

$$(1-\xi^2)b_k''-2\xi b_k'+k(k-1)b_k=\frac{1}{a}\sum_{m=2,m+l+1=k}^{k-1}[mb_ma_l'-lb_m'a_l]$$

Нетрудно заметить, что если известны $(k-1)$-приближения для функции тока и температуры, то из второго уравнения системы (1.12) можно определить $b_k(\xi)$, а затем из первого уравнения и $a_k(\xi)$, т. е. правые части системы (1.12) являются известными функциями. Существенной особенностью уравнений (1.12) является то обстоятельство, что они исследуются отдельно друг от друга. Условия (1.7)—(1.10) с учетом (1.11) перепишутся следующим образом:

$$a_k'(\xi_0)=0, \quad k=0,1,2,\ldots; \quad a_k(\xi_0)=0, \quad k=1,2,\ldots$$
$$2\pi[a_0(1)-a_0(\xi_0)]=Q, \quad b_k(\xi_0)=T_k, \quad k=2,3,\ldots \tag{1.13}$$

По существу, для решения задачи предлагается метод последовательных приближений, примененный в [1] для решения уравнения Навье — Стокса.

Нулевым приближением для системы (1.12) является решение [8]

$$a_0(\xi)=\frac{Q(\xi^3-3\xi_0^2\xi)}{2\pi(\xi_0-1)^2(2\xi_0+1)}, \quad b_0(\xi)\equiv 0 \tag{1.14}$$

Соотношения (1.14) представляют собой решение задачи изотермического течения вязкой жидкости в коническом диффузоре без учета инерционных членов.

Рассмотрим однородные уравнения системы (1.12). Независимыми решениями первого уравнения являются функции

$$J_{k+1}(\xi), \quad H_{k+1}(\xi), \quad J_{k+3}(\xi), \quad H_{k+3}(\xi) \tag{1.15}$$

связанные с функциями Лежандра первого и второго рода, которые образуют фундаментальную систему решений второго уравнения, соотношениями

$$dJ_{k+1}/d\xi=P_k(\xi), \quad dH_{k+1}/d\xi=Q_k(\xi) \tag{1.16}$$

Достаточно подробное описание функций (1.15) и явное их выражение можно найти в [1, 2], обобщающих метод Стокса на случай больших r.

Все решения однородных уравнений (1.12) являются конечными и аналитическими во всей области течения, но производные от $H_{k+1}(\xi)$, $H_{k+3}(\xi)$, $Q_k(\xi)$ на оси диффузора $\xi=1$ перестают быть ограниченными и при построении общего решения системы (1.12) не могут быть использованы.

Частные решения $Y_k(\xi)$ и $Z_k(\xi)$ соответственно первого и второго уравнений системы (1.12) нетрудно вычислить по формулам

$$\begin{gathered}
Y_k(\xi)=k(k+1)\int_1^\xi [J_{k+1}(\alpha)H_{k+1}(\xi)-H_{k+1}(\alpha)J_{k+1}(\xi)]\frac{V_k(\alpha)}{1-\alpha^2}d\alpha \\
V_k(\xi)=(k+2)(k+3)\int_1^\xi [J_{k+3}(\alpha)H_{k+3}(\xi)-H_{k+3}(\alpha)J_{k+3}(\xi)]\frac{X_k(\alpha)}{1-\alpha^2}d\alpha \\
Z_k(\xi)=\frac{1}{a}\int_1^\xi [Q_{k-1}(\xi)P_{k-1}(\alpha)-P_{k-1}(\xi)Q_{k-1}(\alpha)]F_k(\alpha)(1-\alpha^2)d\alpha
\end{gathered} \tag{1.17}$$

где $X_k(\xi)$, $F_k(\xi)$ — правые части рассматриваемых уравнений. Соотношения (1.17) получены методом варьирования постоянных [9], причем детерминант Вронского для последнего уравнения (1.12) равен

$$\begin{vmatrix} P_{k-1}(\xi) & Q_{k-1}(\xi) \\ P_{k-1}'(\xi) & Q_{k-1}'(\xi) \end{vmatrix} = \frac{1}{1-\xi^2}$$

Предположим, что все решения до k-последовательности уравнений (1.12) непрерывны и аналитичны для значения $\xi=1$. Тогда функция $F_k(\xi)(1-\xi^2)$ будет аналитичной и обращается в нуль для $\xi=1$ и поэтому

$Z_k(\xi)$ является непрерывной функцией, обращающейся в нуль на оси диффузора. Аналитичность функции $Y_k(\xi)$ можно доказать точно так же, как это делалось в [1], так как $X_k(1)=0$ для $k=1, 2, \ldots$

Таким образом, полные решения системы уравнений (1.12) представимы в виде

$$\begin{aligned}
&a_k(\xi)=A_kJ_{k+1}(\xi)+B_kJ_{k+3}(\xi)+Y_k(\xi)\\
&b_k(\xi)=C_kP_{k-1}(\xi)+Z_k(\xi)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Используя условия (1.13) для постоянных интегрирования, будем иметь соотношения

$$\begin{aligned}
&A_0[J_0(1)-J_1(\xi_0)]-B_0J_3(\xi)=Q/2\pi, \quad A_0J_1'(\xi_0)+B_0J_3'(\xi_0)=0\\
&A_kJ_{k+1}(\xi_0)+B_kJ_{k+3}(\xi_0)+Y_k(k_0)=0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad k\geqslant1\\
&A_kJ_{k+1}'(\xi_0)+B_kJ_{k+3}'(\xi_0)+Y_k'(\xi_0)=0\\
&C_k=(T_k-Z_k(\xi_0))/P_{k-1}(\xi_0)
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Для однозначной разрешимости поставленной задачи необходимо выполнение соотношений

$$\begin{aligned}
&\Delta_0=-(\xi_0-1)^2(\xi_0+1/2)\neq0, \quad \xi_0\neq1, \quad \xi_0\neq-1/2\\
&\Delta_k(\xi_0)=J_{k+1}(\xi_0)J_{k+3}'(\xi_0)-J_{k+3}(\xi_0)J_{k+1}'(\xi_0)\neq0\\
&P_{k-1}(\xi_0)\neq0
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Первое из условий (1.20) означает, что предельные углы раствора диффузора определяются значениями $0<\theta_0<120°$.

Из свойств функций $J_{k+1}(\xi)$, $J_{k+3}(\xi)$ и полиномов Лежандра следует, что определитель $\Delta_k(\xi_0)$ всегда отличен от нуля [1]. Из третьего условия (1.20) вытекает, что поставленная задача не может быть решена для счетного множества значений угла раствора диффузора. Для обеспечения непрерывного спектра решений, когда $P_{k-1}(\xi_0)=0$, будем полагать в последней формуле (1.19) $C_k=0$, а числа T_k считать не заданными, а равными $Z_k(\xi_0)$.

Если предположить отсутствие течения ($Q=0$) и считать температуру стенок диффузора равной нулю, то решением уравнения теплопроводности будут функции $C_kP_{k-1}(\xi)/r^k$, где $P_{k-1}(\xi_0)=0$. Очевидно, что эти решения не имеют физического смысла и должны быть отброшены, т. е. $C_k=0$. Поэтому следует ожидать, что построенные выше функции допускают физическую интерпретацию.

Перейдем к конкретному вычислению функции тока, ограничиваясь двумя приближениями.

Из вида краевых условий (1.13) следует, что $b_1(\xi)=a_1(\xi)=0$, поэтому для вычисления первого ненулевого приближения в системе уравнений (1.12) необходимо положить $k=2$

$$\begin{aligned}
&(1-\xi^2)^2a_2^{IV}-4\xi(1-\xi^2)a_2'''+24(1-\xi^2)a_2''+120a_2=\\
&=\beta[9(1-\xi^2)b_2'a_0'+(1-\xi^2)^2b_2''a_0''-4\xi(1-\xi^2)b_2'a_0''+\\
&+2(1-\xi^2)b_2a_0''+2(1-\xi^2)^2b_2'a_0''']\\
&(1-\xi^2)b_2''-2\xi b_2'+2b_2=0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Решением второго уравнения системы (1.21) будет полином Лежандра первого рода

$$b_2(\xi)=T_2\xi/\xi_0 \tag{1.22}$$

где T_2 — температура стенки диффузора при $r=1$.

При подстановке соотношений (1.14), (1.22) в первое уравнение (1.21), последнее примет следующий вид:

$$(1.23)\qquad \begin{aligned}&(1-\xi^2)^2a_2^{IV}-4\xi(1-\xi^2)a_2'''+24(1-\xi^2)a_2''+120a_2=\\&=6D(1-\xi^2)(5\xi^2-9\xi_0^2+2)\\&D=\beta T_2Q/2\pi\xi_0(\xi_0-1)^2(2\xi_0+1)\end{aligned}$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, находим частное решение уравнения (1.23)

$$(1.24)\qquad Y_2(\xi)={}^1/_8D(\xi^2-1)(5\xi^2+6\xi_0^2-3)$$

Так как

$$J_3(\xi)=\xi(\xi^2-1)/2,\quad J_5(\xi)={}^7/_8(\xi^2-1)(\xi^3-3\xi/7)$$

то общее решение исследуемого уравнения будет выглядеть так:

$$(1.25)\qquad a_2(\xi)=A\xi(\xi^2-1)+B(\xi^2-1)(\xi^3-3\xi/7)+{}^1/_8D(\xi^2-1)(5\xi^2+6\xi_0^2-3)$$

На основе краевых условий (1.13) вычислим значения произвольных постоянных A и B

$$(1.26)\qquad A=-\frac{D}{16}\left(23\xi_0-\frac{66}{7\xi_0}+\frac{9}{7\xi_0^3}\right),\quad B=\frac{D}{16}\frac{\xi_0^2-3}{\xi_0^3}.$$

Ограничиваясь двумя приближениями, для функции тока будем иметь

$$(1.27)\qquad \begin{aligned}&\psi(r,\xi)=-C(1-\xi)(\xi^2+\xi+1-3\xi_0^2)+r^{-2}[A\xi(\xi^2-1)+\\&+B(\xi^2-1)(\xi^3-3\xi/7)+1.8D(\xi^2-1)(5\xi^2+6\xi_0^2-3)]\\&(C=Q/2\pi(\xi_0-1)^2(2\xi_0+1))\end{aligned}$$

Произвольная постоянная, входящая в состав функции тока, находится из условия $\psi(r,1)=0$.

Используя формулы (1.4) и (1.27), вычислим компоненты скорости течения

$$(1.28)\qquad \begin{aligned}&v_r=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=-\frac{3C(\xi^2-\xi_0^2)}{r^2}-\\&-\frac{A(3\xi^2-1)+B(5\xi^4-{}^{30}/_7\xi^2+{}^3/_7)-{}^1/_8D[20\xi^3+2(6\xi_0^2-8)\xi]}{r^4}\\&v_\theta=-\frac{1}{r\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\partial\psi}{\partial r}=\\&=\frac{2}{r^4}\frac{A\xi(\xi^2-1)+B(\xi^2-1)(\xi^3-{}^3/_7\xi)+{}^1/_8D(\xi^2-1)(5\xi^2+6\xi_0^2-3)}{(1-\xi^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

Радиальную скорость на оси диффузора можно представить в виде

$$(1.29)\qquad v_r(r,1)=-\frac{3C(1-\xi_0^2)}{r^2}-\frac{D}{8}\frac{(1-\xi_0)^2}{\xi_0^3}\frac{(12\xi_0^3+\xi_0^2-6\xi_0-3)}{r^4}$$

Исследуя уравнение для радиальной скорости, отметим, что при достаточно малых углах раствора диффузора скорость на оси при $D>0$ возрастает, а в окрестности стенок убывает по сравнению с изотермическим течением. В этом случае на профиле скорости появляется точка перегиба. При $D<0$ (стенки нагревают жидкость) профиль скорости более равномерно распределен по сечению диффузора.

Исследуем поведение линий тока сходящегося течения ($C>0$), которое происходит при положительном градиенте давления. Для удобства соотношение (1.27) перепишем в виде

$$\psi(r,\xi)=-C\lambda_1(\xi)-D\lambda_2(\xi)/r^2 \tag{1.30}$$

$$\lambda_1(\xi)=(1-\xi)(\xi^2+\xi+1-3\xi_0^2)$$

внутри конуса $\xi_0\leqslant\xi\leqslant1$ положительна и монотонно возрастает при $\xi\to\xi_0$.

$$\lambda_2(\xi)=\frac{(1-\xi^2)(\xi-\xi_0)^2}{16\xi_0^3}[(\xi_0^2-3)\xi+12\xi_0^3-6\xi_0]$$

также положительна для достаточно малых углов раствора конического диффузора ($3/\sqrt{13}\leqslant\xi_0\leqslant1$).

Так как рассматривается поведение линий тока при достаточно больших значениях сферического радиуса, то естественно считать $\psi(r,\xi)<0$.

Из формулы (1.30) следует:

$$r^2=-D\lambda_2(\xi)/[C\lambda_1(\xi)+\psi(r,\xi)] \tag{1.31}$$

Пусть температура ядра течения будет больше, чем температура стенок для фиксированного значения радиуса, т. е. $D>0$. Тогда для существования равенства (1.31) ξ необходимо изменять в интервале $\xi_1\leqslant\xi\leqslant1$, где ξ_1 определяется равенством $\psi_1+C\lambda_1(\xi_1)=0$. Линии тока в данном случае будут располагаться ближе к оси конуса, обращаясь к ней своей выпуклостью. Если температура втекающей жидкости убывает в направлении движения ($D<0$, $\xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi_1$), то линии тока в этом случае при входе в конус из бесконечности будут отклоняться ближе к стенкам, обращаясь к прямой $\psi_1+C\lambda_1(\xi_1)=0$ своей вогнутостью. Таким образом, поведение частиц жидкости существенно зависит от градиента температур в области течения.

Следует отметить, что предложенный метод применим и для решения задачи о движении вязкой жидкости между соосными конусами. Так как особенность интегралов системы дифференциальных уравнений (1.12) исключена из рассмотрения, то для построения общего решения можно воспользоваться полным набором функций (1.15), (1.16). Для функции тока и температуры будем иметь

$$\psi(r,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}[A_kJ_{k+1}(\xi)+B_kJ_{k+3}(\xi)+L_kH_{k+1}(\xi)+ \tag{1.32}$$

$$+N_kH_{k+3}(\xi)+Y_k(\xi)]$$

$$T(r,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}[C_kP_{k-1}(\xi)+D_kQ_{k-1}(\xi)+Z_k(\xi)]$$

Во всей области течения $-1<\xi_2\leqslant\xi\leqslant\xi_1<1$ полученные функции будут конечны и аналитичны.

Произвольные постоянные A_k, B_k, L_k, N_k, C_k, D_k определяются из краевых условий

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}(r,\xi_1)=\frac{\partial\psi}{\partial r}(r,\xi_2)=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(r,\xi_1)=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(r,\xi_2)=0$$

$$2\pi[\psi(r,\xi_1)-\psi(r,\xi_2)]=Q,\quad T(r,\xi_1)=f_1(r),\quad T(r,\xi_2)=f_2(r)$$

где $f_1(r)$, $f_2(r)$ — рациональные функции величины $1/r$.

2. Обратимся к доказательству равномерной сходимости функций (1.11) и их производных в области $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $r>0$ при $k\to\infty$. Так как все функции $X_k(\xi)/(1-\xi^2)$ непрерывны на замкнутом интервале, то существует положительное число R_k, удовлетворяющее неравенству

$$\max|X_k(\xi)/(1-\xi^2)|\leqslant R_k, \quad \xi_0\leqslant\xi\leqslant 1 \tag{2.1}$$

Введем некоторую бесконечную последовательность чисел h_k таких, что

$$\begin{gathered}
\frac{\xi 2k|a_k|}{1-\xi^2}\leqslant R_k h_k, \quad 4\xi|a_k''|\leqslant R_k h_k\\
k(k+3)|a_k|\leqslant R_k h_k, \quad 2(1-\xi^2)|a_k'''|\leqslant R_k h_k\\
2(2k+3)|a_k'|\leqslant R_k h_k, \quad 2\xi k(k+3)|a_k|\leqslant R_k h_k\\
(1-\xi^2)|a_k''|\leqslant R_k h_k, \quad 2k|a_k''|\leqslant R_k h_k
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Доказательство существования и ограниченности построенной последовательности было получено в [1].

Обозначая через h максимум чисел h_k при $k=1, 2, 3, \ldots$, образуем следующий ряд:

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k U_k; \quad \lambda=1/r, \quad U_k=hR_k. \tag{2.3}$$

Если удастся доказать сходимость разложения (2.3) в окрестности нулевой точки, то из соотношений (2.2) будет следовать равномерная сходимость полученных решений к точному решению задачи.

Для этой цели получим ряд соотношений для оценки модуля функции $b_k(\xi)$ и ее производных. Пусть M_k — число, превышающее максимум $|F_k(\xi)(1-\xi^2)|$, тогда для частного решения уравнения энергии справедливы неравенства

$$\begin{gathered}
|Z_k(\xi)|\leqslant\frac{M_k}{a}\left|\int_1^\xi Q_{k-1}(\xi)P_{k-1}(\alpha)\,d\alpha-P_{k-1}(\xi)\int_1^\xi Q_{k-1}(\alpha)\,d\alpha\right|\leqslant\\
\leqslant\frac{M_k}{a}\frac{|1-P_{k-1}(\xi)|}{k(k-1)}\\
|Z_k'(\xi)|\leqslant\frac{M_k}{a}\left|Q_{k-1}''(\xi)\int_1^\xi P_{k-1}(\alpha)\,d\alpha-P_{k-1}''(\xi)\int_1^\xi Q_{k-1}(\alpha)\,d\alpha\right|\leqslant\\
\leqslant\frac{M_k}{a}\frac{|P_{k-1}'(\xi)|}{k(k-1)}\\
|Z_k''(\xi)|\leqslant\frac{M_k}{a}\left|Q_{k-1}''(\xi)\int_1^\xi P_{k-1}(\alpha)\,d\alpha-P_{k-1}'''(\xi)\int_1^\xi Q_{k-1}(\alpha)\,d\alpha+\right.\\
\left.+Q_{k-1}'P_{k-1}-P_{k-1}'Q_{k-1}\right|\leqslant\frac{M_k a^{-1}|P_{k-1}''(\xi)|}{k(k-1)}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

При вычислении встречающихся интегралов использовались формулы (1.16) и свойства функций Лежандра, из которых следуют соотношения:

$$\begin{gathered}
H_k'(\xi)J_k(\xi)-H_k(\xi)J_k'(\xi)=1/k(k-1)\\
H_k''(\xi)J_k(\xi)-H_k(\xi)J_k''(\xi)=0
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для оценки полного решения $b_k(\xi)$ и его производных с учетом (2.4) будем иметь неравенства

$$k|b_k(\xi)|\leqslant|T_k|k\gamma_{1,k-1}(\xi)+(M_k/a(k-1))\gamma_{2,k-1}(\xi)$$

$$|b_k'(\xi)|\leqslant|T_k|\gamma_{1,k-1}'(\xi)+\frac{M_k}{ak(k-1)}\gamma_{2,k-1}(\xi) \tag{2.6}$$

$$|b_k''(\xi)|\leqslant|T_k|\gamma_{1,k-1}''(\xi)+\frac{M_k}{ak(k-1)}\gamma_{2,k-1}''(\xi)$$

$$k(k+3)|b_k(\xi)|\leqslant|T_k|k(k+3)\gamma_{1,k-1}(\xi)+\frac{M_k}{a}\frac{k+3}{k-1}\gamma_{2,k-1}(\xi)$$

$$\gamma_{1,k-1}(\xi)=\frac{|P_{k-1}(\xi)|}{|P_{k-1}(\xi_0)|},\quad \gamma_{2k-1}(\xi)=|1-P_{k-1}(\xi)|+$$

$$+\frac{|P_{k-1}(\xi)||1-P_{k-1}(\xi_0)|}{|P_{k-1}(\xi_0)|}$$

Множители при $|T_k|$ в неравенствах (2.6) являются ограниченными функциями для всех k и ξ, так как $|T_k|$ принимают конечное число значений, также ограниченными являются множители при M_k (это следует из свойств полиномов Лежандра). Поэтому обозначая через d максимум упомянутых функций, придем к неравенству

$$|b_k(\xi)|\leqslant(|T_k|+M_k/a)d=V_k \tag{2.7}$$

Неравенства, аналогичные (2.7), могут быть получены для левых частей соотношений (2.6).

В качестве пока не определенных чисел R_k и M_k можно выбрать

$$R_k=U_k/h=6\beta^2\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,m+n+l=k}^{k}V_mV_nU_l+10\beta\sum_{m=0,m+l=k}^{k}V_mU_l \tag{2.8}$$

$$M_k=V_ka/d-a|T_k|=2\sum_{m=0,m+l+1=k}^{k-1}V_mU_l$$

Соотношения (2.8) также представляют собой выражение для общего члена рядов

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^kU_k,\qquad V=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^kV_k \tag{2.9}$$

Заменяя каждый член, кроме нулевого, рядов (2.9) его выражением (2.8), придем к уравнениям

$$U=6\beta^2hV^2U+10\beta hVU+U_0 \tag{2.10}$$
$$V=2da^{-1}\lambda VU+dT(\lambda)$$

$$\left(U_0=24Q/2\pi(\xi_0-1)^2(2\xi_0+1),\quad V_0=0,\quad T(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}|T_k|\lambda^k\right)$$

Обозначая через $W=UV$ произведения рядов (2.9), после незначительных преобразований получим

$$p_1(\lambda)W^3+p_2(\lambda)W^2+p_3(\lambda)W+p_4(\lambda)=0$$

$$\left(p_1(\lambda)=\frac{24\beta^2hd^2}{a^2}\lambda^2,\quad p_2(\lambda)=\frac{24\beta^2hd^2T(\lambda)}{a}\lambda+\frac{20\beta hd}{a}\lambda\right.$$

$$\left.p_3(\lambda)=6\beta^2hd^2T^2(\lambda)+10\beta hdT(\lambda)+\frac{2dU_0}{a}\lambda-1,\quad p_4(\lambda)=dT(\lambda)U_0\right)$$

Так как функции $p_i(\lambda)$ рациональные, то из уравнения (2.11) следует, что $W(\lambda)$ — функция алгебраическая и в окрестности $\lambda=0$ имеет некоторую регулярную ветвь сходимости. Расстояние до ближайшей особой точки (радиус сходимости) $W(\lambda)$ будет определяться наименьшим положительным корнем дискриминанта уравнения (2.11). Из сходимости функции $W(\lambda)$ вытекает сходимость разложений (2.9), а следовательно, на основании (2.2), (2.6), (2.7) функций (1.11).

В заключение автор благодарит Л. А. Галина за внимание к работе.

Поступила 18 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слёзкин Н. А.* Движение вязкой жидкости к конусу и между двумя конусами. Матем. сб., 1935, т. 42, № 1.
2. *Ackerberg R. C.* The viscons incompressible flow inside a cone. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No. 1. (Рус. перев.: Вязкое несжимаемое течение в конусе. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1966, № 3.)
3. *Регирер С. А.* Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
4. *Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. М.* О гидродинамическом тепловом взрыве. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 1.
5. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М., Гостехиздат, 1951.
6. *Bond W. N.* Viscous flow throw wide-angled cones. Philos Mag., Ser. 6, 1925, vol. 50, No. 299.
7. *Керчман В. И.* Медленное течение вязкой жидкости в коническом диффузоре. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
8. *Harrison W. T.* The pressure in a viscous liquid moving through a channel with diverging boundaries. Proc. Cambridg Philos. Soc., 1920, vol. 19, No. 307.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Изд-во иностр. лит., 1971.