УДК 533.72

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В БАРНЕТТОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЯХ

М. Ш. ШАВАЛИЕВ

(*Новосибирск*)

Сравнение решений уравнений Навье – Стокса и Барнетта с точным решением уравнения Больцмана [1, 2] показало, что поправки Барнетта оказываются существенными. В [3, 4] показано, что барнеттовское приближение представляет следующий шаг по уточнению гидродинамических уравнений. Для однокомпонентных газов были получены полные выражения для напряжений и теплового потока в барнеттовском приближении [5, 6], в то же время для смеси газов имеются лишь частные результаты [6]. Поэтому данная работа посвящена систематическому получению барнеттовских вкладов в напряжения, тепловой поток и диффузионные скорости и вычислению барнеттовских коэффициентов в многокомпонентной газовой смеси, состоящей из атомов со сферически-симметричным потенциалом взаимодействия. Получены условия, при которых новые члены сравнимы с навье-стоксовскими, и показано, что в линейном случае коэффициенты удовлетворяют соотношениям взаимности Онсагера.

1. Интегральные уравнения для $f_i^{(2)}$. Барнеттовские поправки $f_{i(2)}=f_i^{(0)}\Phi_i^{(2)}$ к функциям распределения в N-компонентной смеси газов определяются из следующей системы интегральных уравнений и дополнительных условий [6]

$$\frac{\partial_2}{\partial t}f_i^{(0)}+\frac{\partial_1}{\partial t}f_i^{(1)}+v_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial r_\alpha}f_i^{(1)}+\frac{F_{i\alpha}}{m_i}\frac{\partial}{\partial v_{i\alpha}}f_i^{(1)}-\sum_j I_{ij}(\Phi_i^{(1)}\Phi_j^{(1)})=\sum_j I_{ij}(\Phi_i^{(2)}+\Phi_j^{(2)})\qquad (i=1,2,\ldots,N) \tag{1.1}$$

$$\sum_i\int f_i^{(0)}\Phi_i^{(2)}\psi_i d\mathbf{v}_i=0,\quad \psi_i=\delta_{ij},\quad m_i(\mathbf{v}_i-\mathbf{u}),\quad \frac{m_i}{2}(\mathbf{v}_i-\mathbf{u})^2 \tag{1.2}$$

$$I_{ij}[\varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)]\equiv\iiint[\varphi(\mathbf{v}_i',\mathbf{v}_j')-\varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)]f_i^{(0)}f_j^{(0)}g_{ij}b\,db\,d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j$$

Здесь m_i, $\mathbf{v}_i$ – масса и скорость молекулы i-сорта, $\mathbf{F}_i$ – внешняя сила, действующая на молекулу i-сорта, $g_{ij}=|\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j|$ и b, ε – параметры столкновения. Здесь и далее индексы из букв греческого алфавита определяют компоненты векторов и тензоров, по повторяющимся индексам проводится суммирование; индексы из латинских букв определяют компоненты смеси, знак суммирования указывается. В качестве макроскопических величин, описывающих состояние смеси, возьмем молярные концентрации $x_i=n^{-1}n_i$ (n_i и n – парциальная и полная плотности числа молекул смеси), среднемассовую скорость $\mathbf{u}$, температуру T и давление p ($p=nkT$, k – постоянная Больцмана). Тогда операторы $\partial_s/\partial t$ ($s=1, 2, \ldots$) действуют на произвольный функционал $\varphi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i|x_1, \ldots \mathbf{u}, T, p)$ следующим образом:

$$\frac{\partial_s}{\partial t}\varphi_i=\sum_j\frac{\delta\varphi_i}{\delta x_j}X_j^{(s)}+\frac{\delta\varphi_i}{\delta u}U_\alpha^{(s)}+\frac{\delta\varphi_i}{\delta T}\theta^{(s)}+\frac{\delta\varphi_i}{\delta p}P^{(s)}$$

где $\delta\varphi_i / \delta x_j, \ldots$ — функциональные производные, $X_j^{(s)}$, $U_\alpha^{(s)}$, $\theta^{(s)}$ и $P^{(s)}$ получаются из разложений уравнений переноса для x_j, u_α, T и p по параметру однородности (см., например, [7]). $f_i^{(0)}$ является локально-максвелловской функцией распределения. $f_i^{(1)}=f_i^{(0)}\Phi_i^{(1)}$ можно записать в следующем виде [8]:

$$f_i^{(1)}=f_i^{(0)}\left(-A_iW_{i\alpha}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}-B_i\langle W_{i\alpha}W_{i\beta}\rangle e_{\alpha\beta}+n\sum_j C_i^{(j)}W_{i\alpha}d_{j\alpha}\right)=$$

$$=A_i^*V_{i\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}+B_i^*\langle V_{i\alpha}V_{i\beta}\rangle e_{\alpha\beta}+\sum_j C_i^{(j)*}V_{i\alpha}d_{j\alpha}$$

где A_i^*, B_i^* и $C_i^{(j)*}$ определяются из последнего равенства,

$$\langle T_{\alpha\beta}\rangle\equiv\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta}+T_{\beta\alpha})-\frac{1}{3}T_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta},\qquad e_{\alpha\beta}=\left\langle\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta}\right\rangle \tag{1.3}$$

$$\mathbf{d}_i=\nabla x_i+\left(x_i-\frac{\rho_i}{\rho}\right)\frac{1}{p}\nabla p-\frac{\rho_i}{p}\left(\frac{\mathbf{F}_i}{m_i}-\frac{1}{\rho}\sum_j n_j\mathbf{F}_j\right)$$

$$\mathbf{V}_i=\mathbf{v}_i-\mathbf{u},\qquad \mathbf{W}_i=\theta_i\mathbf{V}_i,\qquad \theta_i=\sqrt{\frac{2kT}{m_i}}$$

ρ_i и ρ — парциальная и полная плотности масс смеси.

2. Барнеттовские напряжения. Появляющиеся в барнеттовском приближении новые члены в тензоре напряжений, диффузионных скоростях и тепловом потоке можно вычислить без нахождения явного вида функций $\Phi_i^{(2)}$. В случае однокомпонентного газа это было сделано в [6].

Последовательно используя последнее условие из (1.2), уравнения для $B_{i\alpha\beta}=B_i\langle W_{i\alpha}W_{i\beta}\rangle$ и свойства симметрии интегралов столкновений в смеси газов [8], выражение для барнеттовской поправки к тензору напряжений запишем как

$$p_{\alpha\beta}^{(2)}=\sum_i m_i\int V_{i\alpha}V_{i\beta}f_i^{(2)}d\mathbf{v}_i=kT\sum_i\int\Phi_i^{(2)}(2f_i^{(0)}\langle W_{i\alpha}W_{i\beta}\rangle)\,d\mathbf{v}_i=$$

$$=-kT\sum_i\sum_j\int\Phi_i^{(2)}I_{ij}(B_{i\alpha\beta}+B_{j\alpha\beta})\,d\mathbf{v}_i=$$

$$=-kT\sum_i\int B_{i\alpha\beta}\left[\sum_j I_{ij}(\Phi_i^{(2)}+\Phi_j^{(2)})\right]d\mathbf{v}_i$$

Заменяя выражение в квадратных скобках на левую часть уравнения (1.1), выполняя указанные в (1.1) операции и исключая $\mathbf{F}_i$ с помощью (1.3), получим

$$p_{\alpha\beta}^{(2)}=\xi_1 e_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{u}+\xi_2\left(\frac{D_1}{Dt}e_{\alpha\beta}-2\left\langle\frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\alpha}e_{\gamma\beta}\right\rangle\right)+\xi_3\langle e_{\alpha\gamma}e_{\gamma\beta}\rangle+ \tag{2.1}$$

$$+\xi_4\left\langle\frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha\partial r_\beta}\right\rangle+\xi_5\left\langle\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right\rangle+\xi_6\left\langle\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial p}{\partial r_\beta}\right\rangle+$$

$$+\sum_i\xi_{7,i}\left\langle\frac{\partial d_{i\alpha}}{\partial r_\beta}\right\rangle+\sum_i\sum_j\xi_{8,i}^{(j)}\langle d_{i\alpha}d_{j\beta}\rangle+\sum_i\xi_{9,i}\left\langle\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}d_{i\beta}\right\rangle+$$

$$+\sum_i \xi_{10,i}\left\langle \frac{\partial p}{\partial r_\alpha} d_{i\beta}\right\rangle + \sum_i\sum_j \xi_{11,i}^{(j)}\left\langle \frac{\partial x_i}{\partial r_\alpha} d_{j\beta}\right\rangle +$$

$$+\sum_i \xi_{12,i}\left\langle \frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial r_\beta}\right\rangle$$

$$\frac{D_1}{Dt} e_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\sum_i n_i F_{i\beta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_\beta}\right)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\alpha}\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\gamma}\right\rangle$$

$$\xi_1' = -\frac{2}{3}\sum_i \frac{1}{m_i}\int B_i (LB_i^*) W_i^4\, d\mathbf{v}_i,$$

$$L = T\frac{\partial}{\partial T} + W_i^2 \frac{\partial}{\partial W_i^2} + \frac{5}{2} p \frac{\partial}{\partial p}$$

$$\xi_2' = -\sum_i \frac{1}{m_i}\int B_i B_i^* W_i^4\, d\mathbf{v}_i$$

$$\xi_3' = -\frac{8}{7}\sum_i \frac{1}{m_i}\int B_i \frac{\partial B_i^*}{\partial W_i^2} W_i^6\, d\mathbf{v}_i +$$

$$+\frac{9}{7kT}\sum_i\sum_j \int B_{i\alpha\beta} I_{ij}(B_{i\beta\gamma} B_{j\gamma\alpha})\, d\mathbf{v}_i$$

$$\xi_4' = -\sum_i \frac{1}{m_i}\int B_i A_i^* W_i^4\, d\mathbf{v}_i$$

$$\xi_5' = -\sum_i \frac{1}{m_i}\int B_i \frac{\partial A_i^*}{\partial T} W_i^4\, d\mathbf{v}_i +$$

$$+\frac{3}{4kT^3}\sum_i\sum_j \int B_{i\alpha\beta} I_{ij}(A_{i\beta} A_{j\alpha})\, d\mathbf{v}_i$$

$$\xi_6' = -\frac{1}{p}\sum_i \frac{1}{m_i}\int B_i \left(\frac{\partial A_i^*}{\partial W_i^2} + p\frac{\partial A_i^*}{\partial n}\right) W_i^4\, d\mathbf{v}_i$$

$$\xi_{7,i}' = -\sum_j \frac{1}{m_j}\int B_j C_j^{(i)*} W_j^4\, d\mathbf{v}_j$$

$$\xi_{8,i}^{(j)\prime} = \frac{1}{x_i m_i}\int B_i \frac{\partial C_i^{(j)*}}{\partial W_i^2} W_i^4\, d\mathbf{v}_i + \tag{2.2}$$

$$+\frac{3n^2}{4kT}\sum_k\sum_h \int B_{k\alpha\beta} I_{kh}(C_{k\alpha}^{(i)} C_{h\beta}^{(j)})\, d\mathbf{v}_k$$

$$\xi_{9,i}' = -\sum_j \frac{1}{m_j}\int B_j \left(\frac{\partial C_j^{(i)*}}{\partial T} - \delta_{ij}\frac{1}{x}\frac{\partial A_j^*}{\partial W^2}\right) W_j^4\, d\mathbf{v}_j -$$

$$-\frac{3n}{4kT^2}\sum_j\sum_k \int B_{j\alpha\beta} I_{jk}(A_{j\alpha} C_{k\beta}^{(i)} + C_{j\beta}^{(i)} A_{k\alpha})\, d\mathbf{v}_j$$

$$\xi'_{10,i}=-\frac{1}{n}\sum_j\frac{1}{m_j}\int B_j\left(\frac{\partial C_j^{(i)*}}{\partial W_j^2}+p\frac{\partial C_j^{(i)*}}{\partial p}\right)W_j^4\,d\mathbf{v}_j$$

$$\xi_{11,i}^{(j)\prime}=-\frac{1}{x_i}\sum_k\frac{1}{m_k}\int B_k\left(x_i\frac{\partial C_k^{(j)*}}{\partial x_i}+\delta_{ik}\frac{\partial C_k^{(j)*}}{\partial W_k^2}\right)W_k^4\,d\mathbf{v}_k$$

$$\xi'_{12,i}=-\frac{1}{x_i}\sum_j\frac{1}{m_j}\int B_j\left(x_i\frac{\partial A_j^*}{\partial x_i}+\delta_{ij}\frac{\partial A_j^*}{\partial W_j^2}\right)W_j^4\,d\mathbf{v}_j$$

$$\xi_s=\xi_s'\frac{4(kT)^2}{15}$$

Для того чтобы получить значения коэффициентов ξ_s в первом приближении, ограничимся в раложении функций B_i и $C_i^{(j)}$ по полиномам Сонина первым членом разложения и в разложении A_i двумя членами и выразим коэффициенты разложения через коэффициенты переноса [8]. Пренебрегая в ξ_s слагаемыми, которые исчезают в случае максвелловских молекул (см. [6]), получим

$$[\xi_1]_1=\frac{4}{3p}\sum_i\frac{\mu_i^2}{x_i}\left(\frac{7}{2}-\frac{T}{\mu_i}\frac{\partial\mu_i}{\partial T}\right)$$

$$[\xi_2]_1=\frac{1}{4}[\xi_3]_1=\frac{2}{p}\sum_i\frac{\mu_i^2}{x_i}$$

$$[\xi_4]_1=\frac{4}{5p}\sum_i\frac{\mu_i\lambda_i}{x_i},\qquad [\xi_5]_1=\frac{4}{5p}\sum_i\frac{\mu_i}{x_i}\frac{\partial\lambda_i}{\partial T}$$

$$[\xi_6]_1=-\frac{2}{nTn}\sum_i\frac{\mu_iD_i^T}{m_ix_i},\quad [\xi_{7,i}]_1=-p[\xi_{10,i}]_1=-\frac{2nm_i}{\rho}\sum_j\frac{\mu_jD_{ij}}{x_j}$$

$$[\xi_{8,i}^{(j)}]_1=-\frac{2nm_j}{\rho}\frac{\mu_iD_{ij}}{x_i^2}+ \tag{2.3}$$

$$+\frac{6n^2m_im_j}{\rho^2}\sum_k\sum_h\left(m_hA_{kh}+\frac{m_k-m_h}{3}\right)\frac{\mu_kD_{ki}D_{hj}}{(m_k+m_h)x_kD_{kh}^*}$$

$$[\xi_{9,i}]_1=-\frac{2nm_i}{\rho}\sum_j\frac{\mu_j}{x_j}\frac{\partial D_{ji}}{\partial T}$$

$$[\xi_{11,i}^{(j)}]_1=\frac{2nm_j}{\rho x_i}\sum_k\frac{\mu_kD_{kj}}{x_k}\left(\delta_{ik}+\frac{\rho_i}{\rho}-\frac{x_i}{D_{kj}}\frac{\partial D_{kj}}{\partial x_i}\right)$$

$$[\xi_{12,i}]_1=\frac{4}{5p}\sum_j\frac{\mu_j}{x_j}\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i},\qquad A_{ij}=\frac{\Omega_{ij}^{(2,2)}}{5\Omega_{ij}^{(1,1)}}$$

$$D_{ij}^*=\frac{3m_im_jkT}{16(m_i+m_j)n\Omega_{ij}^{(1,1)}}$$

Здесь D_{ij} и D_i^T — первые приближения для коэффициентов диффузии и термодиффузии смеси, μ_i и λ_i — первые приближения для парциальных коэффициентов вязкости и теплопроводности, определяемые соотношениями

$$\mu_i=2kTn_ib_{i0}(1),\qquad \lambda_i={}^5/_4k\theta_in_ia_{i1}(2)$$

($b_{i0}(1)$ и $a_{i1}(2)$ см. в [8]). Для краткости в (2.3) в коэффициентах переноса опущены символы, указывающие порядок приближения.

Таким образом, барнеттовское приближение вносит в систему напряжений в смеси газов: 1) напряжения, создаваемые скоростными градиентами и зависящие от произведений первых производных $\mathbf{u}$; 2) напряжения, обусловленные неоднородностью ускорения смеси и зависящие от первых производных от $\rho^{-1}\left(\sum\limits_i n_i\mathbf{F}_i-\nabla p\right)$; 3) тепловые напряжения (термовязкость), зависящие от вторых производных и произведений первых производных T; 4) диффузионные напряжения (диффузионная вязкость), зависящие от первых производных $\mathbf{d}_i$, произведений $\mathbf{d}_i$ друг с другом и с ∇T, ∇p и ∇x_i; 5) напряжения, создаваемые совместным влиянием полей температуры, давления и концентраций и зависящие от произведений ∇T с ∇p и ∇x_i.

С помощью (2.3) диффузионные напряжения можно выразить непосредственно через диффузионные скорости в навье-стоксовском приближении $\overline{\mathbf{V}_i^{(1)}}$, тогда

$$p_{\alpha\beta}^{(2)}=-2\sum_i\mu_i\left\langle\frac{\partial\overline{V_{i\alpha}^{(1)}}}{\partial r_\beta}\right\rangle+\rho\sum_i\sum_j\alpha_{ij}\langle\overline{V_{i\alpha}^{(1)}}\,\overline{V_{j\beta}^{(1)}}\rangle+\sum_i[\xi_{12,i}]_1\left\langle\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial r_\beta}\right\rangle+\ldots \tag{2.4}$$

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{\rho}\sum_k\sum_h\frac{x_kx_h}{D_{ik}^*D_{jh}^*}[\xi_{8,k}^{(h)}]_1(1-\delta_{ik}-\delta_{jh}+\delta_{ik}\delta_{jh})$$

здесь многоточием обозначены первые шесть членов из (2.1) и приведены члены, возникающие лишь в случае смеси. Таким образом, диффузионные напряжения всегда возникают при наличии (пространственно однородных или неоднородных) диффузионных потоков. Кроме того отметим, что кинетическая теория приводит к диффузионным напряжениям, отличным от напряжений Кармана [9]

$$p_{\alpha\beta}^{(k)}=\sum_i\rho_i\langle\overline{V_{i\alpha}^{(1)}}\,\overline{V_{i\beta}^{(1)}}\rangle$$

Проведем сравнение барнеттовских напряжений с навье-стоксовскими напряжениями $p_{\alpha\beta}^{(1)}=-2\mu e_{\alpha\beta}$. Для напряжений, обусловленных скоростными градиентами, имеет место такая же оценка, как и в случае однокомпонентного газа [6]. Например, отношение первого члена из (2.1) к $p_{\alpha\beta}^{(1)}$ равно $\mu p^{-1}\operatorname{div}\mathbf{u}\sim KM$ (K — число Кнудсена, M — число Маха). Эти напряжения могут оказаться существенными в течениях с сильными неоднородностями средней скорости.

Более важными являются тепловые и диффузионные напряжения. Отношение тепловых напряжений к $p_{\alpha\beta}^{(1)}$ равно $\mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{Re}^{-1}T^{-1}\Delta T$ (Pr — число Прандтля, Re — число Рейнольдса, T и ΔT — характерные значения температуры и перепада температуры). Как показано в [10, 11], эти напряжения становятся существенными в медленных течениях газа около нагретых тел, когда $\mathrm{Re}\sim T^{-1}\Delta T$.

Для диффузионных напряжений, например, седьмого члена в (2.1) имеет место следующая оценка:

$$\mu\sum_i\sum_j \omega_{ij}D_{ij}\left\langle\frac{\partial d_{i\alpha}}{\partial r_\beta}\right\rangle\Big/ (2\mu e_{\alpha\beta})\sim \mathrm{Sc}^{-1}\,\mathrm{Re}^{-1}\,\Delta x_0$$

где ω_{ij} — безразмерные множители порядка 1 (однако при $m_j^{-1}m_i \ll 1$ $\omega_{ij}\sim\sim\sqrt{m_j^{-1}m_i}$), Sc — число Шмидта, Δx_i — характерные перепады концентраций, Δx_0 — максимальное среди них. Это отношение будет порядка единицы при $\mathrm{Re}\sim\Delta x_0$ (обычно $\mathrm{Sc}\approx 1$), при этом перепад концентрации должен создаваться граничными условиями. Эти условия могут выполняться в медленных течениях смеси газов около тел, создающих в газе конечный перепад концентрации.

Аналогично для девятого члена в (2.1) имеем оценку $\mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{Re}^{-1}(T^{-1}\Delta T)\Delta x_0$.

3. Барнеттовские члены в диффузионных скоростях и тепловом потоке. Используя уравнения для $C_{i\alpha}^{(j)}=C_i^{(j)}W_{i\alpha}$ и свойства симметрии интегралов столкновений [8], выражение для барнеттовской поправки к диффузионной скорости i-компоненты запишем как

$$\overline{V_{i\alpha}^{(2)}}=\sum_j\int\Phi_j^{(2)}\left[\frac{1}{n_j}f_j^{(0)}\mathrm{v}_{j\alpha}\left(\delta_{ij}-\frac{1}{\rho}\sum_h\rho_h\delta_{jh}\right)\right]d\mathbf{v}_j=$$

$$=\sum_j\sum_k\int\Phi_j^{(2)}I_{jk}\left(C_{j\alpha}^{(i)\prime}+C_{k\alpha}^{(i)\prime}\right)d\mathbf{v}_j=$$

$$=\sum_j\int C_{j\alpha}^{(i)\prime}\left[\sum_k I_{jk}\left(\Phi_j^{(2)}+\Phi_k^{(2)}\right)\right]d\mathbf{v}_j$$

$$C_{j\alpha}^{(i)\prime}=C_{j\alpha}^{(i)}-\frac{1}{\rho}\sum_h\rho_hC_{j\alpha}^{(h)}$$

Преобразуя выражение в квадратных скобках таким же образом, как и при вычислении $p_{\alpha\beta}^{(2)}$, и учитывая дополнительное условие на $C_i^{(j)}$ [8], получим

$$\begin{aligned}\overline{V_{i\alpha}^{(2)}}&=\zeta_{1,i}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\mathbf{u}+\zeta_{2,i}\left(\frac{D_1}{Dt}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}-\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right)+\\&+\sum_j\zeta_{3,i}^{(j)}d_{j\alpha}\operatorname{div}\mathbf{u}+\sum_j\zeta_{4,i}^{(j)}\left(\frac{D_1}{Dt}d_{j\alpha}-\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}d_{j\beta}\right)+\\&+\sum_j\zeta_{5,i}^{(j)}e_{\alpha\beta}d_{j\beta}+\sum_j\zeta_{6,i}^{(j)}e_{\alpha\beta}\frac{\partial x_j}{\partial r_\beta}+\zeta_{7,i}e_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}+\\&+\zeta_{8,i}e_{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial r_\beta}+\zeta_{9,i}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta}\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\frac{D_1}{Dt}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}=-\frac{2}{3}T\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\operatorname{div}\mathbf{u})-\frac{2}{3}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\mathbf{u}-\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}$$

$$\frac{D_1}{Dt}d_{i\alpha}=-\frac{5}{3}\left(x_i-\frac{\rho_i}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\operatorname{div}\mathbf{u})-$$

$$-\frac{2}{3}\frac{n}{p}\left(x_iF_{i\alpha}-\frac{\rho_i}{\rho}\sum_j x_jF_{j\alpha}\right)\operatorname{div}\mathbf{u}-$$

$$-\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\left[\frac{\partial x_i}{\partial r_\beta}+\left(x_i-\frac{\rho_i}{\rho}\right)\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial r_\beta}\right]+$$

$$+u_\beta\frac{n}{p}\left(x_i\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_\beta}-\frac{\rho_i}{\rho}\sum_j x_j\frac{\partial F_{j\alpha}}{\partial r_\beta}\right)$$

$$\zeta_{1,i}=-\frac{2}{9}\sum_j\theta_j\int C_j^{(i)\prime}(LA_j^*)W_j^2\,d\mathbf{v}_j$$

$$\zeta_{2,i}=\frac{1}{3}\sum_j\theta_j\int C_j^{(i)\prime}A_j^*W_j^2\,d\mathbf{v}_j$$

$$\zeta_{3,i}^{(j)}=-\frac{2}{9}\sum_k\theta_k\int C_k^{(i)\prime}(LC_k^{(j)*})W_k^2\,d\mathbf{v}_k$$

$$\zeta_{4,i}^{(j)}=\frac{1}{3}\sum_k\theta_k\int C_k^{(i)\prime}C_k^{(j)*}W_k^2\,d\mathbf{v}_k \tag{3.2}$$

$$\zeta_{5,i}^{(j)}=-\frac{2}{15}\sum_k\theta_k^3\int C_k^{(i)\prime}\left(\frac{m_k}{kT}\frac{\partial C_k^{(j)*}}{\partial W_k^2}W_k^4+\delta_{kj}\frac{1}{x_k}B_k'W_k^2\right)d\mathbf{v}_k+$$

$$+\frac{n}{5}\sum_k\sum_h\int C_{k\alpha}^{(i)\prime}I_{kh}(B_{k\alpha\beta}C_{h\beta}^{(j)}+C_{k\beta}^{(j)}B_{h\alpha\beta})\,d\mathbf{v}_k$$

$$B'=\frac{5}{2}B_k^*+W_k^2\frac{\partial B_k^*}{\partial W_k^2}$$

$$\zeta_{6,i}^{(j)}=\frac{2}{15}\sum_k\theta_k^3\int C_k^{(i)\prime}\left(\frac{\partial B_k^*}{\partial x_j}W_k^4+\delta_{kj}\frac{1}{x_k}B_k'W_k^2\right)d\mathbf{v}_k$$

$$\zeta_{7,i}=\frac{2}{15}\sum_j\theta_j^3\int C_j^{(i)\prime}\left(\frac{\partial B_j^*}{\partial T}-\frac{m_j}{kT}\frac{\partial A_j^*}{\partial W_j^2}\right)W_j^4\,d\mathbf{v}_j-$$

$$-\frac{1}{5T}\sum_j\sum_k\int C_{j\alpha}^{(i)\prime}I_{jk}(B_{j\alpha\beta}A_{k\beta}+A_{j\beta}B_{k\alpha\beta})\,d\mathbf{v}_j$$

$$\zeta_{8,i}=\frac{2}{15p}\sum_j\theta_j^3\int C_j^{(i)\prime}\left(p\frac{\partial B_j^*}{\partial p}W_j^4+B_j'W_j^2\right)d\mathbf{v}_j$$

$$\zeta_{9,i}=\frac{2}{15}\sum_j\theta_j^3\int C_j^{(i)\prime}B_j^*W_j^4\,d\mathbf{v}_j$$

Коэффициенты ζ_s в первом приближении равны

$$[\zeta_{1,i}]_1=-\frac{2}{3pT}\sum_j\frac{D_{ji}'D_j^T}{x_j}\left(\frac{7}{2}-\frac{T}{D_j^T}\frac{\partial D_j^T}{\partial T}\right)$$

$$(3.3)\qquad D_{ji}'=\frac{n}{\rho}\left(m_iD_{ji}-\frac{1}{\rho}\sum_k\rho_km_kD_{jk}\right),\qquad [\zeta_{2,i}]_1=-\frac{1}{pT}\sum_j\frac{D_{ji}'D_j^T}{x_j}$$

$$[\zeta_{3,i}^{(j)}]_1=\frac{2n^2m_j}{3\rho p}\sum_k\frac{m_kD_{ki}'D_{kj}}{x_k}\left(\frac{7}{2}-\frac{T}{D_{kj}}\frac{\partial D_{kj}}{\partial T}\right)$$

$$[\zeta_{4,i}^{(j)}]_1=\frac{1}{2}[\zeta_{5,i}^{(j)}]_1=\frac{n^2m_j}{\rho p}\sum_k\frac{m_kD_{ki}'D_{kj}}{x_k}$$

$$[\zeta_{6,i}^{(j)}]_1=-\frac{2}{p}\sum_k\frac{D_{ki}'}{x_k}\frac{\partial\mu_k}{\partial x_j},\qquad [\zeta_{7,i}]_1=-\frac{2}{p}\sum_j\frac{D_{ji}'}{x_j}\frac{\partial\mu_j}{\partial T}$$

$$[\zeta_{8,i}]_1=0,\qquad [\zeta_{9,i}]_1=-\frac{2}{p}\sum_j\frac{D_{ji}'\mu_j}{x}.$$

Таким образом, барнеттовское приближение вносит в диффузию члены, зависящие от вторых производных $\mathbf{u}$ и от произведений первых производных $\mathbf{u}$ на $\mathbf{d}_i$, ∇T, ∇p, ∇x_i. Члены первой группы описывают вязкодиффузию (диффузию от неоднородности средней скорости), члены второй группы описывают диффузию, обусловленную совместным влиянием неоднородностей средней скорости, температуры, давления и состава и внешних сил.

В силу уравнений для $A_{i\alpha}=A_iW_{i\alpha}$ и свойств симметрии интегралов столкновений барнеттовскую поправку к приведенному потоку тепла можно преобразовать к виду

$$q_\alpha'^{(2)}\equiv q_\alpha^{(2)}-\frac{5}{2}kT\sum_i n_i\overline{V_{i\alpha}^{(2)}}=$$

$$=-kT\sum_i\int\Phi_i^{(2)}\left[\left(\frac{5}{2}-W_i^2\right)V_{i\alpha}f_i^{(0)}\right]d\mathbf{v}_i=$$

$$=-kT\sum_i\sum_j\int\Phi_i^{(2)}I_{ij}(A_{i\alpha}+A_{j\alpha})\,d\mathbf{v}_i=$$

$$=-kT\sum_i\int A_{i\alpha}\left[\sum_j I_{ij}(\Phi_i^{(2)}+\Phi_j^{(2)})\right]d\mathbf{v}_i$$

Отсюда с учетом дополнительного условия на A_i [8] получим

$$(3.4)\qquad q_\alpha'^{(2)}=\eta_1\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\mathbf{u}+\eta_2\left(\frac{D_1}{Dt}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}-\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right)+$$

$$+\sum_i\eta_{3,i}d_{i\alpha}\operatorname{div}\mathbf{u}+\sum_i\eta_{4,i}\left(\frac{D_1}{Dt}d_{i\alpha}-\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}d_{i\beta}\right)+\sum_i\eta_{5,i}e_{\alpha\beta}d_{i\beta}+$$

$$+\sum_i\eta_{6,i}e_{\alpha\beta}\frac{\partial x_i}{\partial r_\beta}+\eta_7e_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}+\eta_8e_{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial r_\beta}+\eta_9\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta}$$

$$\eta_1=\frac{2kT}{9}\sum_i\theta_i\int A_i(LA_i^*)W_i^2\,d\mathbf{v}_i.$$

$$\eta_2=-\frac{kT}{3}\sum_i \theta_i\int A_iA_i{}^*W_i^2\,d\mathbf{v}_i$$

$$\eta_{3,i}=\frac{2kT}{9}\sum_j \theta_j\int A_j(LC_j{}^{(i)*})W_j^2\,d\mathbf{v}_j$$

$$\eta_{4,i}=-\frac{kT}{3}\sum_j \theta_j\int A_jC_j{}^{(i)*}W_j^2\,d\mathbf{v}_j$$

$$\eta_{5,i}=\frac{2kT}{15}\sum_j \theta_j^3\int A_j\left(\frac{m_j}{kT}\frac{\partial C_j{}^{(i)*}}{\partial W_j^2}W_j^4+\delta_{ij}\frac{1}{x_j}B_j'W_j^2\right)d\mathbf{v}_j- \tag{3.5}$$

$$-\frac{p}{5}\sum_j\sum_k\int A_{j\alpha}I_{jk}(B_{j\alpha\beta}C_{k\beta}{}^{(i)}+C_{j\beta}{}^{(i)}B_{k\alpha\beta})\,d\mathbf{v}_j$$

$$\eta_{6,i}=-\frac{2kT}{15}\sum_j \theta_j^3\int A_j\left(\frac{\partial B_j{}^*}{\partial x_i}W_j^4+\delta_{ij}\frac{1}{x_j}B_j'W_j^2\right)d\mathbf{v}_j$$

$$\eta_7=-\frac{2kT}{15}\sum_i \theta_i^3\int A_i\left(\frac{\partial B_i{}^*}{\partial T}-\frac{m_i}{kT}\frac{\partial A_i{}^*}{\partial W_i^2}\right)W_i^4\,d\mathbf{v}_i+$$

$$+\frac{k}{5}\sum_i\sum_j\int A_{i\alpha}I_{ij}(B_{i\alpha\beta}A_{j\beta}+A_{i\alpha}B_{j\alpha\beta})\,d\mathbf{v}_i$$

$$\eta_8=-\frac{2}{15n}\sum_i\theta_i^3\int A_i\left(p\frac{\partial B_i{}^*}{\partial p}W_i^4+B_i'W_i^2\right)d\mathbf{v}_i$$

$$\eta_9=-\frac{2kT}{15}\sum_i\theta_i^3\int A_iB_i{}^*W_i^4\,d\mathbf{v}_i$$

Коэффициенты η_s в первом приближении равны

$$[\eta_1]_1=\frac{4nT}{15p^2}\sum_i\frac{m_i\lambda_i^2}{x_i}\left(\frac{7}{2}-\frac{T}{\lambda_i}\frac{\partial\lambda_i}{\partial T}\right),\quad [\eta_2]_1=\frac{2nT}{5p^2}\sum_i\frac{m_i\lambda_i^2}{x_i}$$

$$[\eta_{3,i}]_1=-\frac{2n}{3\rho}\sum_j\frac{m_iD_{ji}D_j^T}{x_j}\left(\frac{7}{2}-\frac{T}{D_{ji}}\frac{\partial D_{ji}}{\partial T}\right)$$

$$[\eta_{4,i}]_1=-\frac{n}{\rho}\sum_j\frac{m_iD_{ji}D_j^T}{x_j},\qquad [\eta_{5,i}]_1=\frac{4T}{5p}\frac{\lambda_i\mu_i}{x_i^2}-$$

$$-\frac{4n^2T}{5\rho p}\sum_j\frac{m_im_j\lambda_jD_{ji}}{x_j}-\frac{4nT}{5\rho p}\sum_j\sum_k\frac{m_iD_{ki}\mu_j}{D_{jk}{}^*}\left[\left(\frac{\lambda_j}{x_j}+\frac{\lambda_k}{x_k}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(A_{jk}\frac{m_j-3m_k}{m_j}+2\frac{m_k-m_j}{m_j}\right)+\frac{\lambda_j}{x_j}\left(\frac{m_j}{m_k}-\frac{m_k}{m_j}\right)\right] \tag{3.6}$$

$$[\eta_{6,i}]_1=-\frac{4T}{5p}\left(\frac{\lambda_i\mu_i}{x_i^2}-\sum_j\frac{\lambda_j}{x_j}\frac{\partial\mu_j}{\partial x_i}\right)$$

$$[\eta_7]_1 = \frac{4}{5p}\sum_i \frac{\lambda_i\mu_i}{x_i}\left(\frac{7}{2}+\frac{T}{\mu_i}\frac{\partial\mu_i}{\partial T}\right)+\frac{28nT}{25p^2}\sum_i\frac{m_i\lambda_i^2}{x_i}$$

$$[\eta_8]_1 = -p[\eta_9]_1 = -\frac{4T}{5}\sum_i\frac{\lambda_i\mu_i}{x_i}$$

Первые приближения для коэффициентов ξ_s, ζ_s, η_s, полученные выше, являются точными для максвелловских молекул; при этом ξ_6, $\zeta_{1,i}$, $\zeta_{2,i}$, $\eta_{3,i}$, $\eta_{4,i}$ равны нулю. Можно ожидать, что они не будут сильно отличаться от более точно вычисленных значений для других молекулярных моделей.

Проведем оценки барнеттовских вкладов в диффузию и теплопроводность. Пусть диффузия создается неоднородностью состава. Тогда отношение, например, третьего члена в (3.1) к $\overline{\mathbf{V}_i^{(1)}}$ равно $\rho p^{-1}D_{ij}\operatorname{div}\mathbf{u}\sim KM$, аналогичная оценка имеет место и для других членов. В этом случае барнеттовским вкладом в диффузию можно пренебречь.

Рассмотрим случай, когда в $\overline{\mathbf{V}_i^{(1)}}$ существенна бародиффузия. Здесь вязкодиффузия может быть сравнима с бародиффузией, а остальные члены в $\overline{\mathbf{V}_i^{(2)}}$ несущественны [6, 12]. Действительно, отношение последнего члена в (3.1) к $\overline{\mathbf{V}_i^{(1)}}$ равно $\mu(\nabla_\beta e_{\alpha\beta})(\nabla_\alpha p)^{-1}$. Эта величина порядка единицы, если «вязкие» силы и силы, создаваемые неоднородностью давления, сравнимы. В [6] в качестве примера указано течение в тонких капиллярах.

Отношение ряда членов из (3.1) к термодиффузии является величиной порядка εKM $(\varepsilon=\rho D_{ij}(D_i^T)^{-1}$, в зависимости от сорта смеси и температуры $\varepsilon\sim 10\div 10^3)$. Эти члены могут стать существенными в течениях, вызванных неоднородным распределением температуры, например, в тонких капиллярах с градиентом T вдоль оси. Сравнение $\mathbf{q}'^{(2)}$ с тепловым потоком в навье-стоксовском приближении и конвективным потоком тепла $(q_k\approx nuk\Delta T)$ приводит к оценкам соответственно KM и K^2. Барнеттовским вкладом в теплопроводность можно пренебречь.

Отметим, что если u равна нулю или однородна по пространству, то $\overline{\mathbf{V}_i^{(2)}}=0$ и $\mathbf{q}'^{(2)}=0$. Однако диффузия и тепловой поток могут возникнуть даже при однородных T, p, x_i и при одинаковом ускоряющем действии внешних сил на молекулы различных компонент, если $e_{\alpha\beta}$ и $\operatorname{div}\mathbf{u}$ не однородны.

4. Свойства барнеттовских коэффициентов. Барнеттовские коэффициенты существенно зависят от характера взаимодействия молекул между собой и некоторые из них могут иметь любой знак и изменить знак при изменении концентраций. Это относится к коэффициентам (например, в диффузионных напряжениях и вязкодиффузии), которые содержат в качестве множителя выражение

$$\alpha_V = \frac{n}{\rho\mu}\left(\frac{m_2\mu_1}{x_1}-\frac{m_1\mu_2}{x_2}\right) \tag{4.1}$$

(для простоты в этом пункте рассматривается бинарная смесь). Рассмотрим зависимость α_V от отношения масс молекул, отношения концентраций и законов взаимодействия молекул подобно исследованию термодиффузионного множителя в [6]. Вводя эффективные молекулярные диаметры S_1, S_2, S_{12} [6], (4.1) можно записать в виде

$$\alpha_V = \frac{(x_1M_1+x_2M_2)^{-1}(x_2P_2-x_1P_1)}{{}^2/_3+(A_{12}/M_1M_2)\left[(x_1M_1-x_2M_2)^2+x_1x_2\left(\sqrt{M_1/2}\,(S_2/S_{12})^2+\sqrt{M_2/2}\,(S_1/S_{12})^2\right)\right]} \tag{4.2}$$

$$P_1={}^2/_3(M_1-M_2)+A_{12}[\sqrt{{}^1/_2M_2}^2(S_1/S_{12})^2-2M_1]$$
$$P_2={}^2/_3(M_2-M_1)+A_{12}[\sqrt{{}^1/_2M_1}^2(S_2/S_{12})^2-2M_2]$$
$$M_i=m_i/(m_1+m_2)$$

Знаменатель в (4.2) является существенно положительной величиной, тогда знак α_V совпадает со знаком $(x_2P_2-x_1P_1)$. Если $S_1>S_{12}>S_2$, то $P_1>0$ и $P_2<0$ при любых значениях $m_2^{-1}m_1\geqslant 1$; в этом случае $\alpha_V<0$. При нарушении приведенных неравенств между молекулярными диаметрами (например, более тяжелые молекулы имеют меньший диаметр) P_1 и P_2 могут иметь одинаковый знак и, следовательно, α_V может изменить знак при изменении концентраций.

Для более подробного рассмотрения возьмем $A_{12}={}^4/_9$ (дальнейшие выводы не чувствительны к выбранному значению A_{12}). В следующей таблице для заданных значений $m_2^{-1}m_1$ приведены наибольшие значения $S_{12}^{-1}S_1$, при которых P_1 может быть отрицательным, и наименьшие значения $S_{12}^{-1}S_2$, при которых P_2 может быть положительным.

M_1	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.8	0.9
m_1/m_2	1	$1\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{6}{7}$	$2\frac{1}{3}$	4	9
$(S_1/S_{12})_{\max}$	1	0.949	0.897	0.843	0.787	0.665	0.518
$(S_2/S_{12})_{\min}$	1	1.049	1.097	1.145	1.192	1.283	1.370

Таблица показывает, что при $m_2^{-1}m_1={}^7/_3$ P_1 и P_2 имеют одинаковый знак, если $S_{12}^{-1}S_1>0.897$ и $S_{12}^{-1}S_2>1.097$ (это дает $2S_{12}<1.003(S_1+S_2)$) или $S_{12}^{-1}S_1<0.897$ и $S_{12}^{-1}S_2<1.097$ (это дает $2S_{12}>1.003(S_1+S_2)$). При $m_2^{-1}m_1=1$ это возможно, если S_1 и S_2 оба больше или оба меньше S_{12}.

В случае малого относительного различия масс и эффективных сечений, разлагая (4.2) в ряд по малым параметрам, получаем следующее приближенное значение:

$$\alpha_V=\frac{3A_{12}}{2+3A_{12}}\left[\frac{4-3A_{12}}{3A_{12}}\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}+\right.$$
$$\left.+2x_2\left(\frac{S_2^2}{S_{12}^2}-1\right)-2x_1\left(\frac{S_1^2}{S_{12}^2}-1\right)\right] \tag{4.3}$$

Для смеси изотопов имеем

$$\alpha_V=\frac{4-3A_{12}}{2+3A_{12}}\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1} \tag{4.4}$$

5. Линейный случай. Соотношения Онсагера. Линеаризуя выражения (2.1), (3.1) и (3.4) по производным от $\mathbf{u}$, T, p, x_i, $\mathbf{F}_i$, получим

$$p_{\alpha\beta}^{(2)}=L_{pp}^{(2)}\left(\frac{D_1}{Dt}e_{\alpha\beta}\right)_0+L_{pq}^{(2)}\frac{1}{T}\left\langle\frac{\partial^2T}{\partial r_\alpha\,\partial r_\beta}\right\rangle+\sum_i L_{pi}^{(2)}\frac{p}{\rho_i}\left\langle\left(\frac{\partial d_{i\alpha}}{\partial r_\beta}\right)_0\right\rangle \tag{5.1}$$

$$q_\alpha'^{(2)}=L_{qp}^{(2)}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta}+L_{qq}^{(2)}\frac{1}{T}\left(\frac{D_1}{Dt}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\right)_0+\sum_i L_{qi}^{(2)}\frac{p}{\rho_i}\left(\frac{D_1}{Dt}d_{i\alpha}\right)_0$$

$$J_{i\alpha}^{(2)}\equiv\rho_i\overline{V_{i\alpha}^{(2)}}=L_{ip}^{(2)}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta}+L_{iq}^{(2)}\frac{1}{T}\left(\frac{D_1}{Dt}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\right)_0+\sum_j L_{ij}^{(2)}\frac{p}{\rho_i}\left(\frac{D_1}{Dt}d_{j\alpha}\right)_0$$

Здесь индексом 0 обозначены линеаризованные по указанным выше производным значения и

$$(5.2)\qquad L_{pp}^{(2)}=\xi_2,\quad L_{pq}^{(2)}=T\xi_4,\quad L_{pi}^{(2)}=p^{-1}\rho_i\xi_{7,i},\quad L_{qp}^{(2)}=\eta_9,\quad L_{qq}^{(2)}=T\eta_2$$

$$L_{qi}^{(2)}=p^{-1}\rho_i\eta_{4,i},\quad L_{ip}^{(2)}=\rho_i\zeta_{9,i},\quad L_{iq}^{(2)}=T\rho_i\zeta_{2,i},\quad L_{ij}^{(2)}=p^{-1}\rho_i\rho_j\zeta_{4,i}^{(j)}$$

В коэффициентах $\xi_{7,i}$ и $\eta_{4,i}$ (см. (2.2) и (3.5)) $C_i^{(j)*}$ можно заменить на

$$C_j^{(i)*}-\rho^{-1}\sum_k \rho_k C_j^{(k)*}$$

так как при этом соответствующие члены в (2.1) и (3.4) не изменяются в силу условия

$$\sum_i \mathbf{d}_i=0$$

Тогда коэффициенты в (5.1) удовлетворяют соотношениям взаимности Онсагера

$$(5.3)\qquad L_{mn}^{(2)}=L_{nm}^{(2)}\qquad (m,n=p,q,i,j)$$

Отметим, что коэффициенты в нелинейных по градиентам макропараметров смеси членах в $p^{\alpha\beta(2)}$, $q_\alpha'^{(2)}$ и $J_{i\alpha}^{(2)}$ не удовлетворяют соотношениям взаимности.

Согласно принципу Кюри [13] в изотропных средах потоки и термодинамические силы, имеющие различную тензорную размерность, не могут быть связаны между собой. Поэтому в первом приближении потоки тепла и масс, являющиеся векторами, не зависят от неоднородности скорости, а поток импульса ($p_{\alpha\beta}$) не зависит от градиентов температуры, давления и концентрации и внешних сил. Эти зависимости появляются во втором приближении. Однако при этом принцип Кюри не нарушается, так как из тензора $e_{\alpha\beta}$ образуется векторная величина $\nabla_\beta e_{\alpha\beta}$, из векторов ∇T и $\mathbf{d}_i$ образуются тензоры $\nabla_\alpha\nabla_\beta T$ и $\nabla_\beta d_{i\alpha}$ и т. д. Коэффициенты при этих термодинамических силах удовлетворяют соотношениям взаимности. Наличие таких соотношений указывает на то, что, например, вязкодиффузия и диффузионная вязкость, термовязкость и явление возникновения потока тепла только от неоднородности скорости являются перекрестными явлениями аналогично явлениям термодиффузии и диффузионного термоэффекта (эффект Дюфура), возникающим в первом приближении.

В принятом приближении кинетическое и макроскопическое выражения для интенсивности источника энтропии [13] совпадают.

Результаты этого пункта согласуются с приведенными в [12] соображениями о необходимости дополнить канонические методы неравновесной термодинамики.

Автор благодарит В. В. Струминского за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 14 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ikenberry E., Truesdell C.* On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwell's kinetic theory. J. Rational Mech. and Analysis, 1956, vol. 5, No. 1, pp. 1–54.
2. *Галкин В. С.* Об одном решении кинетического уравнения Больцмана. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
3. *Струминский В. В.* Об одном методе решения кинетического уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 2.
4. *Struminskii V. V.* On the theory of Boltzmann's kinetic equation. Rarefied Gas Dynamics, vol. 1, New York — London, Acad. Press., 1969.
5. *Burnett D.* The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas. Proc. London Math. Soc., 1935, vol. 40, p. 382.
6. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. *Уленбек Дж., Форд Дж.* Лекции по статистической механике. М., «Мир», 1965.
8. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. *Вильямс Ф.* Теория горения. М., «Мир», 1971.
10. *Галкин В. С., Коган М. Н., Флидлендер О. Г.* О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3, стр. 14.
11. *Жигулев В. Н.* К вопросу о движении газа около сильно нагретых тел. ПМТФ, 1972, № 4, стр. 95.
12. *Жданов В., Качан Ю., Сазыкин А.* Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси. ЖЭТФ, 1962, т. 42, стр. 857.
13. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.