

УДК 533.601.18

## ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ И ТЕРМОМОЛЕКУЛЯРНЫЙ ЭФФЕКТ В ПЛОСКОЙ ЩЕЛИ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАПИЛЛЯРЕ

С. Х. РОЗЕНФЕЛЬД

(Москва)

В работе [1] был построен метод расчета течений разреженного газа, основанный на модельном кинетическом уравнении

$$(0.1) \quad v \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{v}{l} (f_0 - f)$$

Здесь  $v$  — модуль молекулярной скорости,  $l$  — средняя длина пробега. Функция  $f_0$  определяется как локально-максвелловское распределение с некоторыми фиктивными плотностью, гидродинамической скоростью и температурой. Наложённые на интеграл соударений условия сохранения позволяют построить систему интегральных уравнений для фиктивных гидродинамических величин, а само уравнение (0.1) позволяет выразить истинные гидродинамические величины (плотность, скорость, температуру, тензор напряжений, тепловой поток) в виде некоторых интегральных преобразований от фиктивных величин. Эта система интегральных уравнений, близкая по структуре к интегральным уравнениям теории переноса излучения, представляет собой удобный аппарат для расчета течений разреженного газа при произвольном характере границ и произвольных числах Кнудсена. Важной чертой развитого аппарата является возможность предельного перехода к уравнениям сплошной среды с верным значением числа Прандтля.

В настоящей работе рассматриваются две классические задачи кинетической теории: течение Пуазейля и термомолекулярный эффект в плоской щели и цилиндрическом капилляре.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим течение газа по капилляру произвольного сечения, вдоль оси которого приложены постоянные градиенты температуры и плотности. Согласно уравнениям, полученным в [1], фиктивный поток числа частиц  $Q^*$  удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad Q^* v_0^* = \frac{1}{l} \int dr' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ 3\kappa(\kappa v_0^* Q^*) + \frac{9\sqrt{\pi}}{8} \kappa \frac{N^* v_0^{*2}}{2} \right\} - \\ - \iint \kappa dS' \frac{e^{-R'/l}}{4\pi R'^2} \left\{ 3\kappa(\kappa v_s N_s u_s) + \frac{9\sqrt{\pi}}{8} \kappa \frac{N_s v_s^2}{2} \right\}$$

а истинный поток числа частиц выражается через фиктивный следующим образом:

$$(1.2) \quad Q = \frac{1}{l} \int dr' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} N^* v_0^* \kappa + 3\kappa(\kappa Q^*) \right\} - \\ - \iint \kappa dS' \frac{e^{-R'/l}}{4\pi R'^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_s v_s \kappa + 3\kappa(\kappa N_s u_s) \right\}$$

(уравнения (2.10) и (2.13) работы [1]).

Предполагается, что нормальные к стенке градиенты температуры и плотности равны нулю.

Уравнения (2.9) и (2.11) из [1] дают в этом случае условия отсутствия температурного скачка

$$(1.3) \quad N_s v_s = N^* v_0^*, \quad N_s v_s^3 = N^* v_0^{*3},$$

а уравнения (2.12) и (2.14) дают

$$(1.4) \quad N=N^*, P=P^*$$

Таким образом, в условиях поставленной задачи фиктивные давление и плотность совпадают с истинными. Уравнения (1.1) и (1.2) для компонент потоков вдоль оси капилляра (ось  $x$ ) можно переписать так:

$$(1.5) \quad Q^*v_0^* = \hat{G} \left\{ Q^*v_0^* - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} l \frac{\partial P}{\partial x} \right\}$$

$$(1.6) \quad Q = \hat{G} \left\{ Q^* - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} l \frac{\partial}{\partial x} Nv_0 \right\}$$

$$\hat{G}\{f\} = \frac{1}{l} \int dr' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} 3 \frac{x'^2}{R^2} f(r'), \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

Вводя безразмерные потоки  $q^* = 2u^*/v_0$ ,  $q = 2u/v_0$ , безразмерные градиенты температуры и давления

$$k_0 = \frac{a}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad k_P = \frac{a}{P} \frac{\partial P}{\partial x}$$

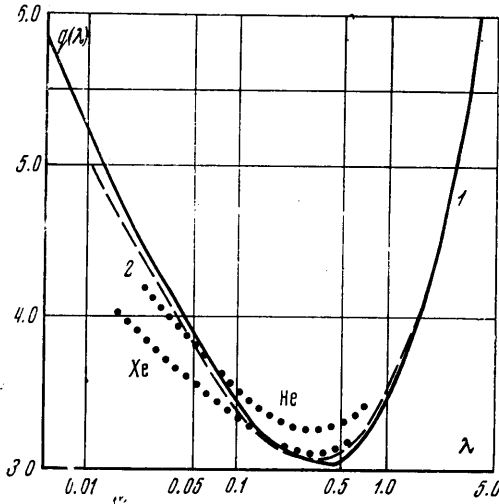
и обратное число Кнудсена  $\lambda = a/l = \text{Kn}^{-1}$  ( $2a$  — характерный диаметр капилляра,  $l$  — средняя длина пробега), получаем окончательно

$$(1.7) \quad q^* = \hat{G} \left\{ q^* - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{k_P}{\lambda} \right\}$$

$$(1.8) \quad q = \hat{G} \left\{ q^* - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda} \times \right. \\ \left. \times \left( k_P - \frac{1}{2} k_0 \right) \right\}$$

Эта система легко приводится к одному уравнению

$$(1.9) \quad q = \hat{G}\{q\} + \hat{G}\hat{G} \left\{ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda} \left( k_P - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} k_0 \right) - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{\lambda} k_P \right\} - \\ - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \hat{G} \left\{ \frac{k_P}{\lambda} \right\}$$



Фиг. 1

**2. Течение Пуазейля.** Будем считать поток изотермическим, т. е.  $k_0 = 0$ . Введем нормированный поток  $f = q/k_P$ . Получаем

$$(2.1) \quad f = \hat{G}\{f\} + \hat{G}\hat{G} \left\{ \frac{1}{\lambda} \left( \frac{4}{3\sqrt{\pi}} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) \right\} - \hat{G} \left\{ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda} \right\}$$

Сначала решим это уравнение для течения в плоской щели между бесконечными пластинами. Уравнение (2.1) в этом случае приобретает вид

$$(2.2) \quad f(s) = \int_{-1}^{+1} ds' f(s') K(s, s') + \left( \frac{4}{3\sqrt{\pi}} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^{+1} ds'' \int_{-1}^{+1} ds' \times$$

$$\times K(s, s') K(s, s'') - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} K(s, s') ds'$$

$$K(s, s') = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{2} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) e^{-\lambda|s-s'|}, \quad s = \frac{z}{a}$$

Уравнение (2.2) решалось численно в диапазоне чисел  $\lambda$  от  $10^{-4}$  до 20. Входящие в (2.2) интегралы заменялись конечными суммами, тем самым интегральное уравнение (2.2) сводилось к системе линейных алгебраических уравнений. Максимальный порядок этой системы мог достигать 40, однако было выяснено, что уже при порядке выше 20 решение не зависит от порядка системы. На фиг. 1 показана кривая расхода плоского течения Пуазейля (кривая 1).

Аналогично решалась задача о цилиндрическом течении Пуазейля. Уравнение (2.1) в этом случае принимает вид

$$(2.3) \quad f(r) = \int_0^1 r' dr' G(r, r') f(r') + \left( \frac{4}{3\sqrt{\pi}} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) \frac{1}{\lambda} \times$$

$$\times \int_0^1 r'' dr'' \int_0^1 r' dr' G(r, r') G(r, r'') - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 r' dr' G(r, r')$$

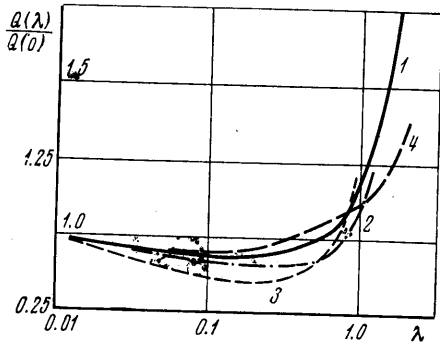
$$G(r, r') = \frac{3}{2\pi} \lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dx \frac{x^2 e^{-\lambda R}}{R^2 R^2}, \quad R = (x^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi)^{1/2}$$

где  $\lambda = a/l = Kn^{-1}$ ,  $a$  — радиус капилляра. Необходимо отметить, что численное решение уравнения (2.3) несравненно сложнее, чем решение уравнения (2.2). Для вычисления элементов матрицы ядра оказалось целесообразным применять метод Монте-Карло. На фиг. 2 показана кривая расхода цилиндрического течения Пуазейля (кривая 1).

### 3. Термомолекулярный эффект.

Рассмотрим поток, возникающий под влиянием как градиента температуры, так и градиента давления. В уравнении (1.9) положим  $f = q/k_0$  и, кроме того, обозначим  $\mu = k_p/k_0$ . Получаем

$$(3.1) \quad f = \hat{G}f + \hat{G}\hat{G} \left\{ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \right\} - \hat{G} \left\{ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda} \mu \right\}$$



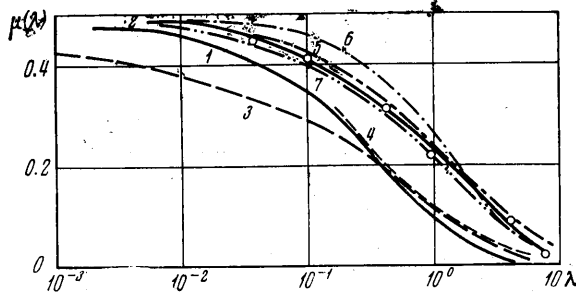
Фиг. 2

Как известно (например, [12]), существует такое значение  $\mu$ , при котором объемный расход через сечение капилляра обращается в нуль. Это значение  $\mu$  (так называемый коэффициент термоэффузии) является функцией числа Кнудсена и зависит от геометрии капилляра.

Сначала рассчитаем коэффициент термоэффузии  $\mu(\lambda)$  для плоской щели. Уравнение (3.1) принимает вид

$$(3.2) \quad f(s) = \int_{-1}^{+1} K(s, s') f(s') ds' + \left[ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\mu^{-1/2}}{\lambda} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{\mu}{\lambda} \right] \int_{-1}^{+1} ds' \int_{-1}^{+1} ds'' K(s, s') K(s, s'') - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\mu^{-1/2}}{\lambda} \int_{-1}^{+1} K(s, s') ds'$$

Это уравнение решалось численно в широком диапазоне чисел  $\lambda$ : от  $10^{-4}$  до 20. При каждом значении числа  $\lambda$  осуществлялся поиск числа  $\mu$  (с точностью до 0.0005), обращающего в нуль интеграл  $\int_{-1}^{+1} f(s) ds$ . Полученная таким образом кривая  $\mu(\lambda)$  показана на фиг. 3 (кривая 1). На фиг. 4 показаны некоторые из профилей потока, обращающих в нуль объемный



Фиг. 3

расход. Кривые 1–6 соответствуют значениям  $\lambda=0.1, 0.5, 20.0, 10.0, 5.0, 1.0$ . Обращает на себя внимание чрезвычайно малая амплитуда этого потока. Если на этом основании принять, что

$$(3.3) \quad \int_{-1}^{+1} ds' \int_{-1}^{+1} ds'' K(s, s') f(s') = 0$$

то решение уравнения (3.2) становится излишним и получается явное выражение для коэффициента термоэффузии

$$(3.4) \quad \frac{\mu}{0.5-\mu} = \frac{32}{9\pi} \left( -1 + \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} \right)$$

$$A(\lambda) = \int_{-1}^{+1} ds' \int_{-1}^{+1} ds'' \int_{-1}^{+1} ds K(s, s') K(s, s''), \quad B(\lambda) = \int_{-1}^{+1} ds' \int_{-1}^{+1} ds K(s, s')$$

Кривая  $\mu(\lambda)$ , построенная по (3.4), отличается не более чем на 0.5% от точной кривой в основном диапазоне чисел  $\lambda$  и лишь при больших значениях  $\lambda$ , когда  $\mu$  меньше 0.01, эта разница становится ощутимой.

Отмеченное обстоятельство существенно упрощает задачу вычисления коэффициента термоэффузии для капилляров произвольного сечения. Для этого необходимо положить аналогично (3.3) и (3.4).

$$(3.5) \quad \int d\sigma \hat{G}\{f\} = 0, \quad A(\lambda) = \int d\sigma \hat{G}\hat{G}\{1\}, \quad B(\lambda) = \int d\sigma \hat{G}\{1\}$$

( $d\sigma$  — элемент поперечного сечения капилляра). В частности, для цилиндрического капилляра

$$(3.6) \quad A(\lambda) = \int_0^1 r dr \int_0^1 r' dr' \int_0^1 r'' dr'' G(r, r') G(r, r'')$$

$$B(\lambda) = \int_0^1 r dr \int_0^1 r' dr' G(r, r')$$

Интегралы (3.6) рассчитывались по методу Монте-Карло. Соответствующая кривая  $\mu(\lambda)$  показана на фиг. 3. Для контроля правильности соотношений (3.5) задача решалась точно при некоторых значениях  $\lambda$  (0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0). Соответствующие точки нанесены на фиг. 3.

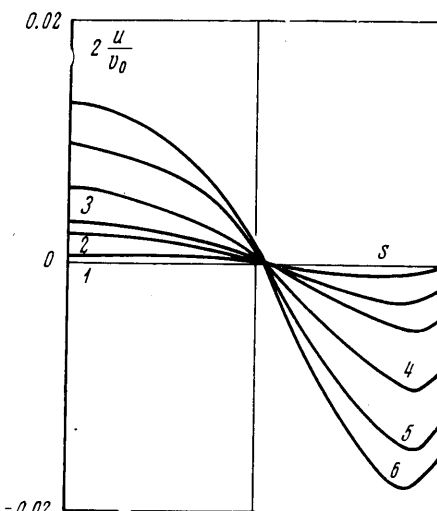
**4. Обсуждение результатов.** Задача о плоском течении Пуазейля рассматривалась многими авторами. На фиг. 1 показана кривая 2, полученная в [2], и экспериментальные точки из работы [3]. Все эти данные хорошо согласуются между собой.

Цилиндрическому течению Пуазейля посвящено большое количество экспериментальных работ, известны также теоретические решения этой задачи. Наиболее интересным является наличие слабо выраженного минимума в зависимости объемного расхода от чисел  $\lambda$  («парадокс Кнудсена»). Разные авторы дают различные значения для глубины и положения этого минимума. На фиг. 2 показаны результаты [4] и [5] (кривая 3), а также эмпирическая кривая Донга [5]. Все эти кривые находятся в хорошем качественном согласии между собой. Различия же в этих кривых связаны с различным выбором модели интеграла соударений.

Термомолекулярный эффект в плоском канале изучался в работах [6, 7] и [8, 9]. Кривая  $\mu(\lambda)$  из работы [9] построена под номером 3 на фиг. 3.

В работах [6, 7] использовался метод, основанный на релаксационном уравнении (кривая 4 на фиг. 3). Обе эти кривые (3 и 4) в области переходного режима очень близки к кривой 1. Интересным является затронутый в [7] вопрос о направлении скорости крипа. Там делается предположение, что в области переходного режима существует такое число Кнудсена, при котором скорость крипа меняет знак. Как видно из фиг. 4, в развиваемой здесь схеме скорость крипа знакопостоянна во всем диапазоне чисел Кнудсена и переходит к навье-стоксовским значениям при больших  $\lambda$ .

Термомолекулярный эффект в капилляре в настоящей работе теоретически рассматривается, по-видимому, впервые. Прежде всего необходимо отметить, что кривая термоэффузии в капилляре (фиг. 3, кривая 2) лежит



Фиг. 4

значительно правее соответствующей кривой для плоской щели (фиг. 3). Физически это вполне понятно. Поток импульса со стенок, создаваемый единичным градиентом температуры, пропорционален площади стенок; поток же импульса, создаваемый единичным градиентом давления, пропорционален площади поперечного сечения капилляра. Их отношение при любом  $\lambda$  для цилиндрического капилляра больше, чем для плоской щели. Поэтому режим почти свободномолекулярного течения для капилляра сохраняется при значительно больших значениях  $\lambda$ , чем для плоской щели. В связи с этим представляется сомнительным высказанное в работе [10] предположение, что поведение кривой термоэффекта не зависит или слабо зависит от геометрии капилляра.

Термомолекулярный эффект постоянно возникает в практике вакуумных измерений, поэтому он неоднократно изучался экспериментально (см. обзор [11]). Кнудсен изучал этот эффект при малых значениях  $\lambda$ , а в область больших значений  $\lambda$  продолжил с помощью полуэмпирической формулы

$$(4.1) \quad \mu(\lambda) = 0.5 \left[ 1 + \frac{2.46\lambda(1+3.15\lambda)}{1+24.6\lambda} \right]^{-2}$$

Эта формула подтверждена экспериментально [12]. Соответствующая кривая (кривая 5 на фиг. 3) весьма близка к кривой 1. Авторы [13] изучали термомолекулярный эффект при  $\lambda \geq 1$ , а в область меньших значений  $\lambda$  продолжили свои результаты с помощью полуэмпирической формулы

$$\mu = \left[ 2 + 2 \left( \frac{2Pa}{3\eta v} \right) + \frac{3}{\pi} \left( \frac{2Pa}{3\eta v} \right)^2 \right]^{-1} \quad v = \left( \frac{8\theta}{\pi m} \right)^{1/2}$$

где  $P$  — давление,  $\eta$  — вязкость,  $a$  — радиус (кривая 6). Там, где кривая 6 подтверждена экспериментально, она хорошо согласуется с кривой 2 (фиг. 3).

В [14] исследовался термомолекулярный эффект во всем диапазоне чисел Кнудсена. Полученная в [14] кривая (фиг. 3) весьма близка к кривой 2 при всех значениях  $\lambda$ .

Изложенные в настоящей работе результаты позволяют сделать вывод, что предложенный в [1] кинетический метод дает качественно и количественно верное описание поведения разреженного газа.

Поступила 13 XI 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ивановский А. И., Розенфельд С. Х. Об одном модельном методе в кинетической теории газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
2. Cercignani C. Plane Poiseuille flow and Knudsen minimum effect. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 2. Suppl. 2. New York — London, Acad. Press, 1963.
3. Породнов Б. Т., Суегин П. Е., Борисов С. Ф. Течение газов в плоской щели в широком диапазоне чисел Кнудсена. Ж. техн. физ., 1970, т. 40, № 11.
4. Такао К. Poiseuille flow of a rarefied gas in cylindrical pipe. Trans. Japan Soc. Aerospace Sci., 1961, vol. 4, No. 6.
5. Cercignani C., Sernagiotto M. Cylindrical Poiseuille flow of rarefied gas. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 1.
6. Макашев Н. К. К решению задач о течении Пуазейля и температурном крипе в плоском канале при произвольном значении числа Кнудсена. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 5.
7. Коган М. Н., Макашев Н. К. О течении газа в плоском канале, вызванном продольным градиентом температуры при произвольном числе Кнудсена. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 2.
8. Борисов С. Ф., Суегин П. Е., Породнов Б. Т. К задаче о термомолекулярной разности давления при произвольных числах Кнудсена. Ж. техн. физ., 1970, т. 40, № 3.

9. Суетин П. Е., Скакун С. Г., Черняк В. Г. Теория термомолекулярной разности давлений для двух статистических моделей. *Ж. техн. физ.*, 1971, т. 41, № 8.
10. Породнов Б. Т., Суетин П. Е. Плоское течение максвелловского газа. *Ж. техн. физ.*, 1969, т. 39, № 4.
11. Кавтарадзе Н. Н. Влияние тепловой эффузии на измерение давлений и методы вычисления поправок. *Ж. физ. химии*, 1954, т. 28, № 6.
12. Херлбуг Ф. К. Методика измерения, визуализация течения. В сб. *Газодинамика разреженных газов*. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
13. Кокин Г. А., Удонова Л. А. Экспериментальное определение коэффициента термической эффузии воздуха в стеклянном капилляре. *Тр. Центр. аэрологич. обсерв.*, 1966, вып. 72.
14. Kinslow M., Arney G. D. Corrections for thermo-molecular pressures in tubes and at orifices. In: *Rarefied Gas Dynamics*, vol. 1, Suppl. 5, New York — London, Acad. Press, 1968.