УДК 532.529.2:538.4

# ВЛИЯНИЕ ИНДУЦИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА КОНВЕКТИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ТОКОМ

О. А. ЭЙСМОНТ

(*Москва*)

Рассматривается устойчивость равновесия плоского слоя электропроводной жидкости, находящейся в электрическом и магнитном полях. Изучается влияние невозмущенного индуцированного магнитного поля и его возмущений на устойчивость рассматриваемого типа. Проведен нелинейный анализ устойчивости.

**1. Постановка задачи.** В работах [1, 2] задача о конвективной неустойчивости проводящей жидкости с током в магнитном поле рассматривалась в безындукционном приближении. Индуцированные магнитные поля могут оказывать влияние на устойчивость изучаемого типа двояким образом: во-первых, за счет магнитного поля, создаваемого невозмущенным электрическим током, и, во-вторых, за счет возмущений самого магнитного поля, которые в безындукционном случае не учитываются.

В первом случае степень влияния индуцированного магнитного поля определяется параметром $\Lambda=\mu_* j_0 h/B_{00}$, $j_0=\sigma E_0$. Как и в [1, 2], рассматривается плоский слой электропроводной жидкости (проводимостью $\sigma$), ограниченный поверхностями $(z=0,\ h)$, температуры которых поддерживаются постоянными $T_1(z=0)$, $T_2(z=h)$. В направлениях осей $x$ и $y$ действуют внешние однородные магнитное (индукцией $B_{00}$) и электрическое (напряженностью $E_0$) поля соответственно. Нетрудно видеть, что возможны ситуации, когда $\Lambda\geqslant 1$ и невозмущенным индуцированным магнитным полем пренебрегать нельзя. Действительно, при $B_{00}\sim 0.1$ *тл* и $h\sim 0.1$ *м* для этого достаточны плотности тока $j_0\sim 10^2$ *а/см*$^2$, что, например, для жидких металлов является вполне реальной величиной. Кроме того, можно представить себе ситуацию, когда вообще нет внешнего магнитного поля и система функционирует за счет собственного магнитного поля, индуцируемого токами, протекающими через рассматриваемую область. Следует отметить, что невозмущенное индуцированное магнитное поле может подобно джоулевой диссипации привести к неустойчивости равновесия жидкости, которое в пренебрежении указанным эффектом было абсолютно устойчивым (см. п. 2).

Второй случай, связанный с влиянием возмущений магнитного поля на устойчивость, будет обсужден ниже при анализе исходной системы уравнений для возмущений.

Предполагается, что плотность жидкости $\rho$, теплоемкость $c_v$, а также коэффициенты вязкости $\mu$ и теплопроводности $\lambda$ постоянны. Эффектом Холла и джоулевой диссипацией пренебрегается. Тогда исходная система уравнений будет иметь вид (используются общепринятые обозначения)

$$\rho\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\rho(\mathbf{V}\nabla\mathbf{V})=-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{V}+\frac{1}{\mu_*}\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B}. \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\mathbf{V}\times\mathbf{B})-\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_*\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{B}\right)$$

$$\partial T/\partial t+(\mathbf{V}\nabla)T=\varkappa\Delta T,\quad \varkappa=\lambda/\rho c_v,\quad \operatorname{div}\mathbf{V}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,$$
$$\sigma=\sigma_{00}(1+\alpha T),\quad |\alpha T|\ll 1$$

Невозмущенное равновесное состояние описывается следующими выражениями (соответствующие величины отмечены индексом 0):

$$\mathbf{V}_0=0,\quad B_{y0}=B_{z0}=0,\quad B_{x0}=B_{00}+\mu_* j_{00}(z-{}^1/_2 h)+O(\alpha T_0)$$
$$T_0=T_1+(T_2-T_1)z/h+O(\alpha T_0),\quad j_{00}=\sigma_{00}E_0$$
$$p_0=-j_{00}B_{00}z+{}^1/_2\mu_* j_{00}{}^2(h-z)z+\mathrm{const}+O(\alpha T_0)$$

Вводя в рассмотрение возмущения скорости $\mathbf{V}'(u', v', w')$, магнитного поля $\mathbf{B}'$, давления $p'$, температуры $T'$ и подставляя выражения для возмущенных величин в (1.1), получаем систему уравнений для возмущений

$$\rho\frac{\partial\mathbf{V}'}{\partial t}+\rho(\mathbf{V}'\nabla)\mathbf{V}'=-\nabla p'+\mu\Delta\mathbf{V}'+\frac{1}{\mu_*}(\operatorname{rot}\mathbf{B}_0\times\mathbf{B}'+ \tag{1.2}$$
$$+\operatorname{rot}\mathbf{B}'\times\mathbf{B}_0+\operatorname{rot}\mathbf{B}'\times\mathbf{B}')$$
$$\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t}-\frac{1}{\mu_*\sigma_{00}}\Delta\mathbf{B}'-\frac{\alpha}{\mu_*\sigma_{00}}\nabla T'\times\operatorname{rot}\mathbf{B}_0-(\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{V}'-(\mathbf{B}'\nabla)\mathbf{V}'+$$
$$+(\mathbf{V}'\nabla)\mathbf{B}_0+(\mathbf{V}'\nabla)\mathbf{B}'=0$$
$$\frac{\partial T'}{\partial t}+(\mathbf{V}'\nabla)T'+\frac{dT_0}{dz}w'=\varkappa\Delta T',\qquad \operatorname{div}\mathbf{V}'=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{B}'=0$$

Предположим, что возмущения достаточно малы и задачу можно решать в линейном приближении. Тогда систему уравнений (1.2) после преобразований можно привести к виду (ниже используются безразмерные величины, определенные по следующим характерным значениям: скорости $-\nu/h$, индукции магнитного поля $-B_{00}\mu_*\sigma_{00}\nu$, температуры $-\mu\nu/\alpha j_{00}B_{00}h^3$, длины — $h$, времени — $h^2/\nu$)

$$(\partial/\partial t-\Delta)\Delta w'=H^2[1+\Lambda(z-{}^1/_2)]\partial\Delta B_z'/\partial x \tag{1.3}$$
$$(P_m\partial/\partial t-\Delta)B_z'=H^{-2}\partial T'/\partial x+[1+\Lambda(z-{}^1/_2)]\partial w'/\partial x$$
$$(P\partial/\partial t-\Delta)T'=-Rw'$$
$$H^2=\sigma_{00}B^2h^2/\mu,\quad P_m=\mu_*\sigma_{00}\nu,\quad P=\nu/\varkappa,\quad R=\alpha j_{00}B_{00}(T_2-T_1)h^3/\mu\varkappa$$

**2. Случай малых магнитных чисел Прандтля и ограниченных частот возмущений.** Проанализируем условия, при которых рассматриваемая задача об устойчивости сводится к безындукционной. Если считать, что $P_m\ll 1$, и исключить из рассмотрения высокочастотные возмущения, то система уравнений (1.3) существенно упрощается и приводится к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\Delta w'=-H^2[1+\Lambda(z-{}^1/_2)]^2\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}- \tag{2.1}$$
$$-[1+\Lambda(z-{}^1/_2)]\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2},\qquad \left(P\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)T'=-Rw'$$

с граничными условиями на жестких граничных поверхностях

$$z=0,1,\qquad w'=\partial w'/\partial z=T'=0$$

Если положить $\Lambda=0$, то система уравнений (2.1) точно совпадает с соответствующей системой в безындукционном приближении. Такой же результат получается (при $\Lambda=0$) при произвольных значениях магнитного числа Прандтля, если считать, что выполняется принцип изменения устойчивости, и рассматривать состояние на границе устойчивости. Таким образом, влияние возмущений магнитного поля на величину критического числа Рэлея в изучаемой задаче об устойчивости определяется параметром $\mu_* \sigma_{00} \omega_* h^2$, где $\omega_*$ — частота возмущений на границе устойчивости. Во всех лабораторных условиях $P_m \ll 1$. Так, например, для ртути при нормальных условиях $P_m \sim 10^{-7}$. Следовательно, при изучении конвективной неустойчивости проводящей жидкости с током в магнитном поле в лабораторных условиях все результаты решения задачи об определении критического числа Рэлея в безындукционном приближении справедливы при рассмотрении не слишком высокочастотных возмущений и выполнении условия $\Lambda \ll 1$.

Представляя возмущения в виде

$$(w', T', B_z') = (W(z), \Theta(z), B(z)) \exp[i(a_1 x + a_2 y) + \Omega t]$$

получаем для амплитуд возмущений следующую систему уравнений с граничными условиями:

$$[\Omega - (D^2 - a^2)](D^2 - a^2) W = H^2 a_1^2 [1 + \Lambda(z - {}^1/_2)]^2 W + \\ + [1 + \Lambda(z - {}^1/_2)] a_1^2 \Theta \tag{2.2}$$

$$[P\Omega - (D^2 - a^2)]\Theta = -RW, \quad D \equiv d/dz$$

$$z = 0, 1 \quad W = DW = \Theta = 0 \tag{2.3}$$

Можно показать, что зависимость числа Рэлея от параметра $\Lambda$ является четной.

Решение системы уравнений (2.2) с граничными условиями (2.3), полученное с помощью численного интегрирования с использованием метода ортогонализации [3], приводит к выводу о том, что в рассматриваемом в этом разделе случае выполняется принцип изменения устойчивости. Рассмотрим далее состояние на границе устойчивости ($\Omega = 0$). Решение соответствующей системы уравнений можно искать в виде

$$W = \sum_{k=0}^{5} C_k W_k, \qquad \Theta = \sum_{k=0}^{5} C_k \Theta_k \tag{2.4}$$

$$W_k = \sum_m a_m^{(k)} z^m, \qquad \Theta_k = \sum_m b_m^{(k)} z^m$$

Здесь $W_k$ и $\Theta_k$ — линейно-независимые решения системы уравнений (2.2) при $\Omega = 0$. Коэффициенты рядов $a_m^{(k)}$, $b_m^{(k)}$ находятся из соответствующих рекуррентных соотношений. Обычная процедура удовлетворения граничным условиям приводит к искомому характеристическому уравнению, откуда находятся критические значения числа Рэлея.

В конкретных вычислениях использовались до 100 членов рядов (2.4), что позволяло получать достоверные результаты при значениях $|R| \lesssim 10^5$, при использовании ЭВМ с восемью разрядными числами. Затраты машинного времени при использовании этого метода существенно меньше, чем при численном интегрировании.

Результаты расчетов представлены на фиг. 1. (Оптимальное значение $a_2 = a_{20} = 0$). При достаточно малых значениях числа Гартмана невозмущенное индуцированное магнитное поле снижает устойчивость равновесия жидкости как в области положительных, так и в области отрицательных значений числа Рэлея. При $H \gg 1$ с ростом параметра $\Lambda$ расширяется область устойчивости при $R > 0$ и уменьшается при $R < 0$. Отметим, что асимптотическое поведение числа Рэлея при $\Lambda \to 2 + 0$ в области $R < 0$ описывается выражением

$$R_* \to 1178.6 \Lambda^4 (1 - {}^1/_2 \Lambda)^{-5}$$

В случае $H=0$ нетрудно получить предельное выражение для числа Рэлея при $|\Lambda|\to\infty$

$$R_*\to 37324|\Lambda|^{-1}\operatorname{sgn}(R)$$

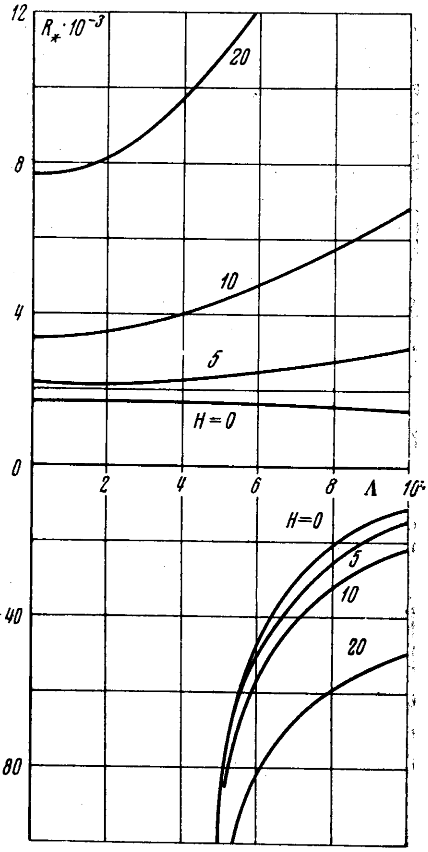
**3. Устойчивость плоского слоя при произвольных значениях магнитного числа Прандтля.** Рассмотрим случай, когда нет ограничений на величину $\mu_*\sigma_{00}\omega_* h^2$. Будем предполагать, что $\Lambda \ll 1$, так что индуцированным магнитным полем, создаваемым невозмущенным электрическим током, можно пренебречь. Кроме того, для простоты принимается, что граничные поверхности являются свободными. Исходная система уравнений для амплитуд возмущений получается из (1.3).

(3.1)
$$[\Omega-(D^2-a^2)](D^2-a^2)W=$$
$$=ia_1H^2(D^2-a^2)B$$
$$[P_m\Omega-(D^2-a^2)]B=$$
$$=ia_1W+iH^{-2}a_1\Theta,$$
$$[P\Omega-(D^2-a^2)]\Theta=-RW$$

Граничные условия для возмущений скорости и температуры сохраняются такими же, как и в соответствующем безындукционном случае

(3.2) $$W=D^2W=\Theta=0,\quad z=0,1$$

Что же касается граничных условий для возмущений магнитного поля, то они не могут быть в общем случае сформулированы аналогичным образом на граничных поверхностях, так как возмущения магнитного поля могут проникать в окружающую рассматриваемый слой среду, и задача для магнитного поля должна решаться как для внутренней области, занятой проводящей жидкостью ($0\leqslant z\leqslant 1$), так и для внешней ($-\infty<z<0$, $1<z<\infty$) с выполнением на границах областей условий непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции и тангенциальной компоненты напряженности электрического поля. Такая постановка, однако, усложняет решение задачи, поэтому предполагается, что граничные поверхности являются идеальными проводниками, при этом возникающие в жидкости возмущения магнитного поля локализованы во внутренней области и не проникают за ее пределы. Тогда граничные условия для магнитного поля имеют вид




Фиг. 1

(3.3) $$z=0,1,\quad B=0$$

В реальных условиях, когда проводимость стенок $\sigma_w$ конечна, граничные условия (3.3) применимы, если $h(\mu_*\sigma_w\omega_*)^{1/2}\gg 1$, т. е. когда толщина рассматриваемого плоского слоя много больше толщины магнитного скин-слоя.

При сделанных предположениях можно найти точное решение системы уравнений (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (3.2), (3.3)

$$W=C_1 \sin m\pi z, \quad \Theta=C_2 \sin m\pi z, \quad B=C_3 \sin m\pi z$$

Подставляя эти выражения в (3.1), получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}(3.4)\qquad & \Omega^3+b\Omega^2+c\Omega+d=0, \quad b=(m^2\pi^2+a^2)(1+P^{-1}+P_m^{-1})\\ & c=(m^2\pi^2+a^2)^2(P^{-1}+P_m^{-1}+P^{-1}P_m^{-1})+H^2P_m^{-1}a_1^2,\\ & d=[(m^2\pi^2+a^2)^3+H^2a_1^2(m^2\pi^2+a^2)-a_1^2R]P^{-1}P_m^{-1}\end{aligned}$$

Для решения вопроса об устойчивости надо определить знаки действительных частей корней кубического уравнения (3.4).

Рассмотрим сначала случай $d<0$. Тогда уравнение (3.4) будет иметь по крайней мере один действительный положительный корень $\Omega_1$. Пусть теперь $d\to-0$, тогда $\Omega_1\to+0$, при этом, так как $b>0$, $c>0$, два других корня уравнения (3.4) будут либо комплексными с отрицательными действительными частями, либо действительными отрицательными. Следовательно, при $d<0$ неустойчивость имеет место и выполняется принцип изменения устойчивости, а критическое число Рэлея равно

$$R_*=a_1^{-2}(\pi^2+a^2)[(\pi^2+a^2)^2+H^2a_1^2]$$

Это выражение совпадает с выражением для критического числа Рэлея в соответствующем безындукционном случае, что объясняется, как указывалось в п. 2, тем, что при $R>0$ выполняется принцип изменения устойчивости и возмущения магнитного поля не влияют на величину критического числа Рэлея.

Рассмотрим случай $d>0$. При этом уравнение (3.4) не имеет действительных положительных корней и принцип изменения устойчивости не выполняется. Представляя корни уравнения (3.4) в виде $\Omega=q+i\omega$, где $q$ и $\omega$ — действительные числа, будем иметь

$$(3.5)\qquad 8q^3+8bq^2+2(b^2+c)q+bc-d=0, \quad \omega^2=3q^2+2bq+c$$

Уравнение (3.5) может иметь положительные корни, т. е. развитие неустойчивости возможно лишь при выполнении неравенства $bc<d$. Тогда условие неустойчивости можно представить в виде

$$\begin{aligned}R<-(\pi^2+a^2)a_1^{-2}\{&[2+P^{-1}(P_m+1)+P_m^{-1}(P+1)+\\ &+P_m+P](\pi^2+a^2)^2+H^2Pa_1^2(P_m^{-1}+1)\}\end{aligned}$$

Неустойчивость в этом случае будет носить колебательный характер и частота колебаний, соответствующая границе устойчивости, определяется выражением

$$\omega_*=[(P^{-1}+P_m^{-1}+P^{-1}P_m^{-1})(\pi^2+a^2)^2+H^2P_m^{-1}a_1^2]^{1/2}$$

Интересно отметить, что в рассматриваемой задаче неустойчивость возможна и в случае отрицательных значений числа Рэлея, т. е. когда направление действия электромагнитной силы соответствует устойчивой стратификации температуры. Таким образом, учет возмущений магнитного поля приводит к возникновению неустойчивости нового типа. Легко видеть, что при $P_m\to0$ имеет место $R_*\to-\infty$. Следовательно, в обычных условиях наблюдать эту неустойчивость достаточно сложно.

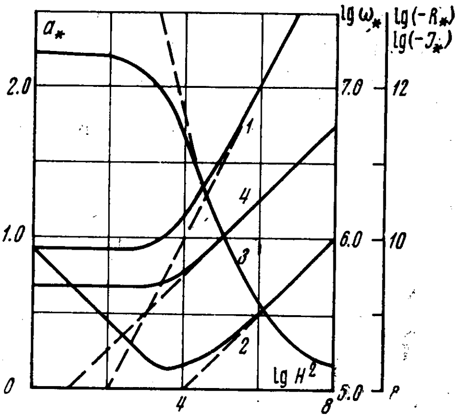
Для этой области неустойчивости ($R<0$) на фиг. 2 приведены зависимости критических значений числа Рэлея (кривая *1*), параметра $J=\alpha j_{00}(T_2-T_1)h^2(\sigma_{00}\mu)^{-1/2}\varkappa^{-1}$ (кривая *2*), который можно рассматривать как безразмерную плотность электрического тока, а также волнового числа $a$ (кривая *3*) и частоты возмущений $\omega$ (кривая *4*) от числа Гартмана при заданных значениях $P$ и $P_m$, соответствующих ртути при нормальных условиях ($P=10^{-2}$, $P_m=10^{-7}$). В пределе при $H\to\infty$

$$R_*\to-\pi^2P(1+P_m^{-1})H^2,\quad a_*\to rH^{-1/2},\quad \omega_*\to r(H/P_m)^{1/2}$$

$$r=\pi^{3/2}\left[\frac{2+P^{-1}(P_m+1)+P_m^{-1}(P+1)+P_m+P}{P(1+P_m^{-1})}\right]^{1/4}$$

Эти предельные соотношения отмечены на фиг. 2 пунктирными линиями.

**4. Нелинейный анализ.** В настоящее время используются в основном два подхода к решению задач об устойчивости в нелинейной постановке. Один из них состоит в прямом численном решении полной исходной системы уравнений (например, [4]). Второй метод заключается в исследовании слегка надкритических движений жидкости, когда амплитуда возмущений полагается конечной, но достаточно малой. Подобный подход к решению задачи об устойчивости в нестационарной постановке был последовательно развит в [5–8] и использовался при решении задач об устойчивости движения жидкости между вращающимися цилиндрами [8, 9], горизонтального слоя жидкости, подогреваемого снизу [10], плоского течения Пуазейля [11]. В первых двух случаях осуществлялась сверхкритическая устойчивость, т. е. рост амплитуды возмущений ограничен ее стационарным значением, в последнем случае реализована докритическая неустойчивость, т. е. в докритической области возможна неустойчивость по отношению к возмущениям конечной амплитуды.



Фиг. 2

Рассмотрим сформулированную в п. 3 задачу об устойчивости плоского слоя проводящей жидкости, ограниченного свободными идеально электропроводными поверхностями при произвольных значениях магнитного числа Прандтля.

Тогда граничные условия для исходной системы уравнений (1.2) будут иметь вид

$$z=0,\,h,\qquad T'=w'=\partial V_\tau'/\partial z=B_z'=0$$

Так как линейный анализ этой задачи показывает, что максимально растущие возмущения распространяются в направлении магнитного поля, в дальнейшем будет рассматриваться развитие двумерных возмущений, для которых $\partial/\partial y=0$. Тогда $v'=B_y=0$ и можно ввести функцию тока $\psi$ и векторный потенциал магнитного поля $\Phi$, который будет иметь лишь одну не равную нулю компоненту ($\Phi_x=\Phi_z=0$, $\Phi_y=\Phi$)

$$u'=\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad w'=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad B_x'=\frac{\partial\Phi}{\partial z},\quad B_z'=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

Приводя далее исходную систему (1.2) к безразмерному виду, приняв за характерные значения гидродинамического потенциала $\psi$, векторного потенциала $\Phi$ и температуры соответственно $\nu$, $B_{00}\mu_*\sigma_{00}h\nu$, $T_2-T_1$, после преобразований получаем

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\Delta^2\psi+H^2\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial z}+$$

$$+P_mH^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x}\right)$$

$$P_m\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\Delta\Phi+RP^{-1}H^{-2}T'-\frac{\partial\psi}{\partial x}=P_m\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t}-P^{-1}\Delta T'-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T'}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial T'}{\partial x}$$

$$z=0,1,\quad \psi=\partial^2\psi/\partial z^2=\Phi=T'=0$$

Отметим, что рассматриваемая задача об устойчивости в нелинейной постановке уже не сводится к безындукционной при условии $P_m\ll 1$ и соответствующем ограничении на частоту возмущений, как это имело место в линейном случае.

Решение задачи проводится следуя методу [8]. Рассматривается поведение периодических возмущений вида

$$\mathrm{Q}(x,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Q}_n(z,t)\exp(-inax),\qquad \mathrm{Q}=\begin{pmatrix}\psi\\ \Phi\\ T'\end{pmatrix}$$

Функции $\mathrm{Q}_n(z,t)$ представляются в следующем виде:

$$\mathrm{Q}_n(z,t)=\varepsilon^{|n-1|+1}\mathrm{G}_n(z,t)$$

где $\varepsilon^2=|\mathrm{Re}(\Omega_{11})|$, $\mathrm{Re}(\Omega_{11})$ — инкремент нарастания неустойчивости соответствующей линейной задачи. Предполагается, что в ряду собственных значений линейной задачи $\Omega_{nm}$ может быть лишь одно собственное значение $\Omega_{11}$ с положительной действительной частью, которое является таким образом ответственным за неустойчивость. Функции $\mathrm{G}_n(z,t)$ представляются в виде рядов по собственным функциям соответствующей линейной задачи с амплитудными коэффициентами, зависящими от времени

$$\mathrm{G}_n(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}(t)\mathrm{Q}_{nm}{}^0(z)$$

Опуская далее рассуждения, аналогичные приведенным в [8], запишем искомое амплитудное уравнение в окончательном виде

$$dA_{11}/dt-\Omega_{11}A_{11}=\varepsilon^2A_{11}|A_{11}|^2b+O(\varepsilon^4)$$

$$b=\frac{i\pi a}{\pi^2+a^2+P_m\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}\{[(a^2-3\pi^2)H^2\beta_1+\beta_2]P_mC_1+\gamma_2C_2\}\tag{4.1}$$

$$C_1=-\frac{1}{2\pi H^2}\left\{\frac{Ra^2[\mathrm{Re}(\Omega_{11})+P^{-1}(\pi^2+a^2)]}{4\pi^2|\Omega_{11}+P^{-1}(\pi^2+a^2)|^2}+P_m[\pi^2+a^2+\mathrm{Re}(\Omega_{11})]\right\}$$

$$C_2=\frac{Pa^2[\mathrm{Re}(\Omega_{11})+P^{-1}(\pi^2+a^2)]}{2\pi|\Omega_{11}+P^{-1}(\pi^2+a^2)|^2}$$

$$\beta_1=ia^{-1}(\pi^2+a^2+\Omega_{11}),\qquad \beta_2=-\frac{iaH^2(\pi^2+a^2)}{\pi^2+a^2+P_m\Omega_{11}}$$

$$\gamma_1 = -\frac{ia}{\Omega_{11}+P^{-1}(\pi^2+a^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{i(\pi^2+a^2)}{a}\left(\pi^2+a^2+\Omega_{11}+\frac{H^2a^2}{\pi^2+a^2+P_m\Omega_{11}}\right)$$

Это уравнение допускает решения типа

$$A_{11} = A_*\exp(i\omega t)$$

$$A_*^2 = -\mathrm{Re}(\Omega_{11})/\varepsilon^2\mathrm{Re}(b)+O(\varepsilon^2)$$

$$\omega = \mathrm{Im}(\Omega_{11})+\varepsilon^2 A_*^2\mathrm{Im}(b)+O(\varepsilon^4)$$

Для существования решения такого типа необходимо, очевидно, чтобы $\mathrm{Re}(\Omega_{11})$ и $\mathrm{Re}(b)$ были разного знака. Тогда в случае $\mathrm{Re}(\Omega_{11})>0$, $\mathrm{Re}(b)<0$ осуществляется сверхкритическая устойчивость и растущая вначале по экспоненциальному закону амплитуда конвективного движения имеет конечный предел, определяемый выражением

$$A_*^2 = |\mathrm{Re}(b)|^{-1}+O(\varepsilon^2)$$

Если же $\mathrm{Re}(\Omega_{11})<0$, т. е. линейный анализ предсказывает устойчивость, и $\mathrm{Re}\,(b)>0$, то реализуется докритическая неустойчивость.

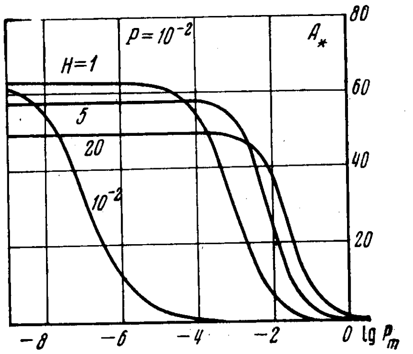
Рассмотрим сначала случай, когда неустойчивость возникает при положительных значениях числа Рэлея. Тогда выполняется принцип изменения устойчивости и из (4.1) получаем

$$b = -\left\{P_m\left[\frac{PRa^2}{4\pi^2(\pi^2+a^2)}+P_m(\pi^2+a^2)\right][(3\pi^2-a^2)(\pi^2+a^2)+H^2a^2]+\right.$$
$$\left.+P^2H^2a^2\left(\pi^2+a^2+\frac{H^2a^2}{\pi^2+a^2}\right)\right\}\left\{2H^2\left[(\pi^2+a^2)(P_m+1)+P\left(\pi^2+a^2+\frac{H^2a^2}{\pi^2+a^2}\right)\right]\right\}^{-1}$$

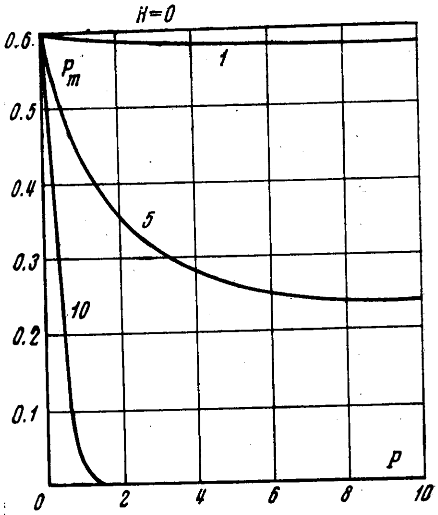
Отсюда следует, что $b$ всегда отрицательно (из линейного анализа имеем, что $a\leqslant 2.22$). Таким образом, если неустойчивость возникает при $R>0$, то реализуется сверхкритическая устойчивость. Решение рассматриваемой задачи об устойчивости в линейной постановке показывает, что возмущения магнитного поля в случае $R>0$ не влияют на величину критического числа Рэлея, которая не зависит от магнитного числа Прандтля и определяется лишь числом Гартмана. Развитие возникающей неустойчивости, как это следует из нелинейного анализа, не зависит от вомущений магнитного поля при условиях $P_m\ll 1$, $P_m\ll H^2$, которые можно считать достаточными для справедливости безындукционного приближения в рамках используемого нелинейного подхода. При этом выражение для $b$ в случае $H=0$ переходит в известное в задаче об устойчивости плоского слоя жидкости, подогреваемого снизу [10], для случая, когда конвективное движение имеет форму валов.

В общем случае возмущения магнитного поля влияют на развитие конвективной неустойчивости. Это влияние определяется магнитным числом Прандтля и числом Гартмана и проиллюстрировано на фиг. 3, где представлены зависимости амплитуды конвективного движения от $P_m$ при фиксированных значениях $H$. При малых значениях магнитного числа Прандтля ($P_m\leqslant 10^{-4}$ при $H\geqslant 1$) амплитуда конвективного движения не зависит от $P_m$. При увеличении $P_m$ амплитуда конвективного движения уменьшается, причем это уменьшение начинается при тем меньших значениях $P_m$, чем меньше число Гартмана, и в пределе при $P_m\to\infty$ $A_*\to 0$. Таким образом, возмущения магнитного поля в случае $R>0$ оказывают стабилизирующее влияние на развитие конвективной неустойчивости, хотя на практике в лабораторных условиях ($P_m\sim 10^{-7}$) этот эффект проявляется лишь при очень малых значениях числа Гартмана ($H\leqslant 10^{-2}$).

Следует отметить, что при малых значениях числа Гартмана ($H^2 \ll 1$, $H^2 \ll P_m$) магнитное поле оказывает дестабилизи-




Фиг. 3




Фиг. 4

рующее влияние в том смысле, что с его ростом возрастает амплитуда конвективного движения ($A_* \sim H^2$), хотя переход к неустойчивости осуществляется при том же значении числа Рэлея. Этот факт интересен, так как обычно магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на устойчивость.

Рассмотрим теперь случай, когда $R<0$ и линейная неустойчивость имеет колебательный характер. При этом возможны ситуации, когда $\operatorname{Re}(b)>0$, т. е. возможна докритическая неустойчивость. На фиг. 4 приведены кривые $\operatorname{Re}(b)=0$ в зависимости от определяющих параметров $H$, $P$, $P_m$. Если $H=0$, то $\operatorname{Re}(b)<0$ при $P_m>0.6$. С ростом числа Гартмана область сверхкритической устойчивости расширяется и при $H\to\infty$ занимает весь квадрант положительных значений чисел $P$ и $P_m$.

Автор благодарен Г. А. Любимову за внимание к работе и полезные замечания.

Поступила 30 III 1973

ЛИТЕРАТУРА


1. *Эйсмонт О. А.* О конвективном движении проводящей жидкости с током в поперечном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
2. *Эйсмонт О. А.* Влияние джоулевой диссипации на конвективную неустойчивость проводящей жидкости с током в магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
3. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. н., 1961, т. 16, вып. 3.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л.* Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
5. *Stuart J. T.* On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, pt 3.
6. *Watson J.* On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, pt 3.
7. *Eckhaus W.* Studies in non-linear stability theory. N. Y., Springer – Verlag, 1965.
8. *Kogelman S., DiPrima R. S.* Stability of spatially periodic flows in hydrodynamics. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 1.
9. *Davey A.* The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, pt 3.
10. *Segel L. A.* The non-linear interaction of two disturbances in the thermal convection problem. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, pt 1.
11. *Reynolds W. C., Potter M. C.* Finite – amplitude instability of parallel shear flows J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 3.