

УДК 533.6.011.55+532.526.533.693

ОСОБЕННОСТИ ОТРЫВА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ОХЛАЖДАЕМОМ ТЕЛЕ И ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

В ранних работах, например [1, 2], отрыв пограничного слоя исследован на основе анализа решений уравнений пограничного слоя при заданном внешнем распределении давления. Решение такого типа в общем случае не удается продолжить за точку отрыва. Изучение асимптотического поведения решений уравнений Навье — Стокса [3–5] показывает, что при отрыве пограничного слоя в сверхзвуковом потоке с гладкой поверхности главное влияние на течение в малой окрестности точки отрыва оказывает большой локальный градиент давления, индуцируемый при взаимодействии с внешним потоком. Решение удается продолжить за точку отрыва и связать с решениями в других областях, расположенных вниз по потоку [5]. Аналогичные результаты для течения несжимаемой жидкости недавно получены в работе [6].

Можно предполагать, что и в общем случае всегда найдется достаточно малая окрестность точки отрыва, в которой отрыв является самоиндуцированным, и «непроходимых» особых точек предельное решение уравнений Навье — Стокса не содержит. Однако предельная картина течения может быть более сложной и содержать большее количество областей с различным поведением функций, чем изученная в работах [3–6].

В данной работе исследован отрыв на теле, движущемся с гиперзвуковой скоростью, причем отношение температуры торможения к температуре тела велико. Показано, что как при гиперзвуковой, так и сверхзвуковой скорости на внешней границе пограничного слоя существенное влияние на течение около точки отрыва оказывают профили распределения параметров во всем невозмущенном пограничном слое, а не только в более узком слое около тела, как в ранее изученных течениях [3–6].

Возможно появление областей с существенными поперечными перепадами давления в пределах зоны, занятой струйками тока невозмущенного пограничного слоя. Приведены параметры подобия, формулировки краевых задач и результаты расчетов на ЭВМ. Уточнено понятие о докритических и закритических пограничных слоях и установлена зависимость коэффициента давления, вызывающего отрыв, от температурного фактора.

1. Постановка задачи. Рассматривается течение около точки отрыва ламинарного пограничного слоя на гладком участке поверхности тела, обтекаемого гиперзвуковым потоком вязкого газа. Предполагается, что поток около внешней границы пограничного слоя является или гиперзвуковым ($M_e \gg 1$), или сверхзвуковым $M_e \sim 1$ в зависимости от формы и толщины обтекаемого тела. На основной части тела перед областью отрыва градиент давления, индуцируемый при обтекании внешним потоком «эффективного тела», которое образовано толщиной вытеснения пограничного слоя, мал и учитывается лишь в теории пограничного слоя второго приближения. Однако при возникновении сильного возмущения (отклонении штифта, падении извне ударной волны и т. п.) перед ним образуется область отрыва. Тогда распределение давления зависит в основном от взаимодействия невязкой и вязкой областей течения. Еще в ранних экспериментальных работах (например, [7]) замечено, что, если область отрыва является развитой и содержит зону с почти постоянным давлением, то течение около точки отрыва не зависит практически от вида воз-

мушения, вызывающего отрыв. Течение определяется местными характеристиками невозмущенного пограничного слоя и невязкого потока перед началом области взаимодействия. (Задняя часть течения, разумеется, влияет на положение точки отрыва.) Слабая зависимость характера течения в окрестности точки отрыва от остальных областей объясняется тем, что индуцируемые здесь большие локальные градиенты давления в основном зависят от вида профилей в невозмущенном пограничном слое перед началом сильного взаимодействия и от малого участка внешнего невязкого течения. Это и дает возможность строить в окрестности точки отрыва локальные предельные решения уравнений Навье — Стокса [3-6].

2. Исходные оценки. Следуя [3], проведем оценки порядков величин функций течения около точки отрыва. Сначала считаем поток на внешней границе пограничного слоя гиперзвуковым, $M_e \gg 1$, $R \gg 1$. Число Рейнольдса $R = \rho_e u_e l / \mu_0$ образовано местными значениями плотности, скорости на внешней границе пограничного слоя, характерным расстоянием до точки отрыва l и коэффициентом вязкости μ_0 , вычисленным при температуре торможения. Ниже все переменные будем считать безразмерными и отнесенными к их значениям на внешней границе пограничного слоя непосредственно перед началом области сильного взаимодействия, кроме коэффициента вязкости μ , который отнесен к его величине при температуре торможения. Для получения безразмерных координат используется расстояние l .

Толщина пограничного слоя в гиперзвуковом потоке на режиме слабого вязкого взаимодействия $\delta \sim M_e / R^{1/2}$ (см., например, [8]).

Даже при очень малых значениях температурного фактора ($g_w \ll 1$, где g_w — энтальпия торможения, вычисленная при температуре тела) напряжение трения и тепловой поток непосредственно около тела имеют тот же порядок, что и внутри пограничного слоя. Учитывая это, легко получить поведение функций в невозмущенном пограничном слое около поверхности тела с точностью до несущественных постоянных множителей

$$(2.1) \quad y \sim \delta [(u + g_w)^{1+\omega} - g_w^{1+\omega}], \quad \rho \sim \rho_0 / (g_w + u)$$

Здесь ω — показатель степени для зависимости μ от температуры. Поскольку рассматривается область малой длины $\Delta x \ll 1$, для появления отрыва достаточно малого перепада давления $\Delta p \ll 1$ (хотя градиент давления должен быть большим).

Используя уравнения импульса, неразрывности и уравнение состояния, можно получить оценки для струек тока основной части пограничного слоя (область 2 на фиг. 1)

$$(2.2) \quad \Delta u^{(2)} \sim \Delta p \sim \Delta \rho^{(2)} / \rho^{(2)} \sim \Delta \delta^{(2)} / \delta$$

(Верхний индекс указывает номер области, для которой вычислена соответствующая функция.)

Однако согласно (2.1) для пристеночной части невозмущенного пограничного слоя, где $u \ll g_w$, имеется область, в которой ρ и по порядку величины меньше, чем в основной части пограничного слоя. Поэтому на основании тех же уравнений, что и при получении (2.2), а также формул, вытекающих из (2.1)

$$(2.3) \quad \delta^{(3)} \sim \delta g_w^\omega u^{(3)}, \quad \rho^{(3)} \sim 1/g_w M_e^2, \quad \mu^{(3)} \sim g_w^\omega \quad \text{при } u \ll g_w$$

для пристеночного слоя (область 3 на фиг. 1) оценки имеют другой вид

$$(2.4) \quad \delta^{(3)} \sim \delta g_w^{\omega+1/2} \Delta p^{1/2}$$

Поскольку окрестность точки отрыва должна включать в себя отрывной и безотрывный участки течения, то в области 3 инерционные и главные вязкие члены должны иметь одинаковый порядок величин

$$(2.5) \quad \rho^{(3)} (u^{(3)})^2 / \Delta x \sim \mu^{(3)} u^{(3)} / (\delta^{(3)})^2 R \sim \Delta p / \Delta x M_e^2$$

Сравнивая (2.2) и (2.4), можно видеть, что для течений, рассмотренных в работах [3-6], где $g_w \sim 1$, всегда $\delta^{(3)} \gg \Delta \delta^{(2)}$. При обтекании тела с холодной поверхностью согласно (2.4) могут существовать режимы, для которых в процессе взаимодействия с внешним невязким потоком участвуют оба слоя — 2 и 3. Рассмотрим общий режим, когда $\delta^{(3)} \sim \Delta \delta^{(2)}$. Согласно гиперзвуковой теории малых возмущений

$$(2.6) \quad \Delta p \sim M_e \delta^{(3)} / \Delta x$$

Соотношения (2.3) — (2.6) дают семь условий для определения масштабов величин $\rho^{(3)}$, $u^{(3)}$, Δx , $\mu^{(3)}$, $\delta^{(3)}$, $\Delta \delta^{(2)}$, Δp

$$(2.7) \quad \Delta p \sim M_e R^{-1/4}, \quad \Delta x \sim M_e^{3/2} R^{-3/8} g_w^{\omega+1/2}$$

$$\delta^{(3)} \sim M_e^{3/2} R^{-5/8} g_w^{\omega+1/2}, \quad \Delta \delta^{(2)} = M_e^2 R^{-3/4}$$

Важную роль для оценки пределов применимости теории играют следующие соотношения:

$$(2.8) \quad \frac{\Delta \delta^{(2)}}{\delta^{(3)}} = \frac{M_e^{1/2}}{g_w^{\omega+1/2} R^{1/8}} = N, \quad \frac{\delta}{\Delta x} = \frac{N}{M_e}$$

Теория, развитая в работах [3-5], применима лишь при $N \ll 1$, т. е. при $g_w^{\omega+1/2} \gg (M_e^2 / R^{1/2})^{1/4}$. Общий режим, для которого весь пограничный слой участвует в процессе «свободного взаимодействия», соответствует $N = O(1)$. Случай $N \rightarrow \infty$ должен быть рассмотрен особо. Кроме того, при $M_e \sim 1$ и $N \sim 1$ можно ожидать появления существенных поперечных перепадов давления, так как $\Delta x \sim \delta$.

3. Решение для гиперзвукового режима вязкого взаимодействия.

Пусть $N \sim O(1)$, а $M_e \gg 1$ и $R \gg 1$. На основании приведенных выше оценок введем координаты и функции течения для области 3

$$(3.1) \quad x = \frac{M_e^{3/2} g_w^{\omega+1/2} (\gamma-1)^{1/2}}{R^{3/8} 2^{3/4} a^{3/4}} x_3, \quad y = \frac{M_e^{3/2} g_w^{\omega+1/2} (\gamma-1)^{1/2}}{R^{3/8} 2^{3/4} a^{3/4}} y_3, \quad y_3 = \xi^{1/2} \eta$$

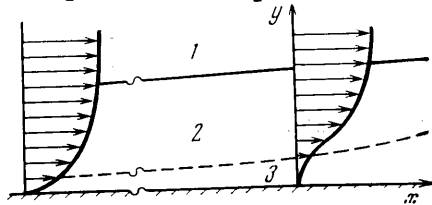
$$P-1 = \frac{\gamma M_e a^{1/2}}{R^{1/4} 2^{1/2}} \xi, \quad \psi = \frac{g_w^\omega}{R^{1/4} 2^{1/2} a^{1/2}} \psi_3, \quad \psi_3 = \xi f(\xi, \eta)$$

$$\rho = \frac{2}{(\gamma-1) M_e^2 g_w} + \dots, \quad \mu = g_w^\omega + \dots, \quad a = \frac{M_e g_w^\omega}{R^{1/2}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Здесь индексом снизу отмечены переменные, сохраняющие величину $O(1)$ в соответствующей области, а для получения безразмерной функции тока ψ использованы характерные значения плотности, скорости и длины, принятые раньше, начало координат совмещено с точкой отрыва.

Подстановка (3.1) в уравнения Навье — Стокса и предельный переход

$$(3.2) \quad R \rightarrow \infty, \quad M_e \rightarrow \infty, \quad g_w \rightarrow 0, \quad N = O(1)$$



Фиг. 1

приводят к обычной системе уравнений для пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Во введенных выше переменных получаем

$$(3.3) \quad f''' = \xi^{1/2} \frac{d^2 f}{dx_3^2} [1 + 1/2 f'^2 - f f'' + \xi (f' f'' - f f''')]]$$

где штрихами и точками обозначено дифференцирование по η и ξ , соответственно. Два крайних условия соответствуют равенству нулю вектора скорости. Третье граничное условие дает сращивание решений в областях 3 и 2 на внешней границе 3. Начальное условие получается при сращивании решения в области 3 с решением для невозмущенного пограничного слоя. Вывод их совершенно такой же, как в работе [3]

$$(3.4) \quad f(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = 0, \quad f''(\xi, \eta \rightarrow \infty) = 1, \quad f(0, \eta) = 1/2 \eta^2$$

Для дальнейшего потребуется выражение для толщины вытеснения области 3

$$(3.5) \quad \delta_3^* = g_w^{\omega+1/2} M_e^{3/2} (\gamma-1)^{1/2} 2^{-1/4} a^{-3/4} R^{-5/8} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \{2\xi^{1/2} [\eta - (2f)^{1/2}]\}$$

Введем переменные для области 2

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x &= M_e^{3/2} R^{-3/2} g_w^{\omega+1/2} x_2, \quad \psi = \psi_2 / M_e R^{1/2} \\ p-1 &= \gamma M_e R^{-1/2} p_2(x_2, \psi_2) + \dots, \\ \rho &= M_e^{-2} [\rho_0(\psi_2) + M_e R^{-1/2} \rho_2(x_2, \psi_2) + \dots] \\ y &= M_e R^{-1/2} [y_0(\psi_2) + M_e R^{-1/2} y_2(x_2, \psi_2) + \dots], \quad H = H_0(\psi_2) + \dots \\ u &= u_0(\psi_2) + M_e R^{-1/2} u_2(x_2, \psi_2) + \dots, \quad v = M_e R^{-1/2} v_2(x_2, \psi_2) + \dots \end{aligned}$$

Здесь индексом 0 отмечены профили переменных, соответствующие невозмущенному пограничному слою непосредственно перед началом области взаимодействия. Подстановка (3.6) в уравнения Навье — Стокса и предельный переход (3.2) приводят к следующей системе уравнений:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \rho_0 u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= - \frac{\partial p_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \psi_2} = 0, \quad \frac{dy_0}{d\psi_2} = \frac{1}{\rho_0 u_0} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \psi_2} &= - \frac{1}{\rho_0 u_0} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{u_2}{u_0} \right), \quad v_2 = N u_0 \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial x_2} = 0 \end{aligned}$$

Чтобы определить индуцируемую областью 2 толщину вытеснения, проинтегрируем четвертое уравнение (3.7), используя выражение для u_2 , которое легко получить в результате интегрирования первого уравнения (3.7). Кроме того, удобно ввести профиль числа Маха в невозмущенном пограничном слое $M_0(y_0)$, заметив, что $M_0 = u_0 \rho_0^{1/2}$. Наконец, система (3.7) допускает условие изэнтропичности для ρ_2 и тогда $\rho_2 = \rho_0 p_2$. Таким образом,

$$(3.8) \quad y_2(x_2, \psi_2) = p_2(x_2) \int_0^{\psi_0} (M_0^{-2} - 1) dy_0 = p_2(x_2) L(y_0)$$

Величина y_0 на внешней границе гиперзвукового пограничного слоя, т. е. при $\psi_2 \rightarrow +\infty$, является конечной, так как там плотность $\rho_0 \rightarrow \infty$. Таким образом, интеграл в формуле (3.8) сходится. (В дальнейшем обозначим его L .)

Течение в области 1 описывается гиперзвуковой теорией малых возмущений, которая в данном случае приводит к формуле Аккерета, связывающей возмущение давления и наклон эффективного тела, индуцируе-

мый изменениями толщин вытеснения областей 2 и 3. Опуская громоздкие, но несложные выкладки, получаем

$$(3.9) \quad \beta = \xi^{1/2} (d\xi/dx_3) = \xi^{1/2} \left(\frac{d}{d\xi} \{ 2\xi^{1/2} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} [\eta - (2f)^{1/2}] \} + K \right)^{-1} \\ (K = (2a)^{1/4} (\gamma - 1)^{-1/2} NL)$$

Таким образом, теперь необходимо решить уравнение пограничного слоя (3.3) при граничных и начальных условиях (3.4). Распределение давления $\xi(x_3)$ не задано, а должно определяться в процессе решения из формулы (3.9), связывающей возмущение давления с изменением толщины вытеснения пограничного слоя 3 и области невязкого слабо возмущенного течения 2.

4. Обсуждение результатов. Полученная краевая задача отличается от ранее решенной в работах [3-5] лишь тем, что в формуле (3.9) для безразмерного градиента давления $K \neq 0$. Величина K учитывает влияние изменения толщины вытеснения области 2. Понятно, что при $g_w = O(1)$ в пределе $K=0$. Это следует из первой формулы (2.8), т. е. из того обстоятельства, что $N \rightarrow 0$ при совершении предельного $M_\infty R^{-1/2} \rightarrow 0$, сделанного при построении теории пограничного слоя. Физической причиной появления влияния области 2 при охлаждении тела является уменьшение характерной толщины пристеночного слоя локального вязкого течения 3.

Численное решение задачи проведено с помощью ЭВМ. Метод интегрирования на ЭВМ тот же, что и в работе [3]. Результаты расчета распределения давления при разных значениях параметра K приведены на фиг. 2. Правые концы интегральных кривых соответствуют точкам отрыва. Кривая $K=0$ соответствует случаю отрыва на теле с $g_w \sim O(1)$, рассмотренному ранее в работах [3-5]. (Заметим, что в работе [5] интегрирование продолжено за точку отрыва вплоть до выхода в область с почти постоянным давлением.)

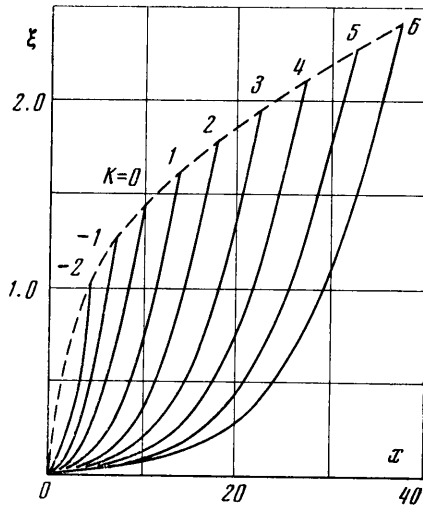
Приведенные результаты показывают, что величина ξ в точке отрыва и масштаб области взаимодействия изменяются при охлаждении тела (возрастании $|K|$) совершенно различно в зависимости от знака интеграла L (3.8). Для более ясного представления о поведении решения при изменении K и N изучим асимптотику затухания возмущений вверх по течению.

Для этого необходимо построить решение в виде разложения в ряд по ξ при $x_3 \rightarrow -\infty$ или $\xi \rightarrow 0$

$$(4.1) \quad (\xi, \eta) \rightarrow (\xi, n_3), \quad n_3 = \eta \xi^{1/2} \\ f(\xi, N) \sim n_3^2 / 2\xi + \Phi_0(n_3) + \xi \Phi_1(n_3) + \dots$$

Подстановка (4.1) в (3.9) дает

$$(4.2) \quad \beta = \xi^{1/2} [K - 2\Phi_0'(\infty)]^{-1} + O(\xi^{1/2})$$



Фиг. 2

Используя (4.1) и (4.2), из (3.3) и (3.4) получаем

$$(4.3) \quad \Phi_0''' = (1 + n_3 \Phi_0' - \Phi_0) / [K - 2\Phi_0'(\infty)], \\ \Phi_0(0) = \Phi_0'(0) = \Phi_0''(\infty) = 0$$

Из решения задачи (4.3) находим

$$(4.4) \quad -\Phi_0'(\infty) = 1.3667 / [K - 2\Phi_0'(\infty)]^{1/2}$$

Распределение возмущений давления при $\xi \rightarrow 0$ и $x_3 \rightarrow 0$ согласно (4.2) имеет вид

$$(4.5) \quad \xi \sim \exp(x_3 b^{-1}), \quad b = K - 2\Phi_0'(\infty)$$

Таким образом, характерный масштаб распространения возмущений в соответствии с первой формулой (3.1) и (4.5)

$$(4.6) \quad \Delta x \sim (\gamma - 1)^{1/2} M_e^{3/2} g_w^{\omega+1/2} b / (2a)^{5/4} R^{3/4}$$

Если температура тела падает и $N \rightarrow \infty$, то для $L > 0$ согласно (4.4) при $K \rightarrow +\infty$ получается

$$(4.7) \quad b \approx K, \quad \Phi_0'(\infty) \rightarrow -1.3667 K^{-1/2}, \quad \Delta x \sim M_e^2 R^{-1/2}$$

Таким образом, в этом случае передача возмущений в основном уже осуществляется дозвуковой частью локально-невязкого течения 2. Влияние вязкого подслоя 3 становится минимальным. При этом дозвуковой подслоем с толщиной порядка $\delta^{(2)} \sim M_e R^{-1/2}$ при гиперзвуковом внешнем течении передает возмущения на расстояния порядка $M_e \delta^{(2)} = M_e^2 R^{-1/2}$. Это обстоятельство при изучении течений разрежения отмечено в работе [9].

Исследуем поведение решения полной нелинейной задачи при $K \rightarrow +\infty$. Для этого сделаем замену переменных

$$f(\xi, \eta) = \bar{f}(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad \bar{\eta} = \eta, \quad \bar{\xi} = K^{2/3} \xi$$

тогда в пределе вместо (3.3), (3.4) и (3.9) получается

$$\bar{f}''' = \bar{\xi}^{1/2} [1 + (1/2)\bar{f}'^2 - \bar{f}\bar{f}'' + \bar{\xi}(\bar{f}'\bar{f}'' - \bar{f}\bar{f}''')] \\ \bar{f}(\bar{\xi}, 0) = \bar{f}'(\bar{\xi}, 0) = 0, \quad \bar{f}''(\bar{\xi}, \infty) = 1$$

Решив ее численно, получаем асимптотическое поведение ξ_0 в точке отрыва $\xi_0 \rightarrow 0.51 K^{2/3}$ ($K \rightarrow +\infty$).

Отсюда следует, что величина перепада давления в точке отрыва возрастает как

$$(4.8) \quad \Delta p \sim g_w^{-2/3(\omega+1/2)}$$

Ранее в сущности показано, что течение в области 2, содержащее основную часть струек тока невозмущенного пограничного слоя, локально ведет себя как невязкое. Рассмотренный выше случай $K > 0$ и $L > 0$ соответствует такому исходному профилю $M_0(y_0)$, для которого толщина вытеснения локально-невязкой части течения возрастает с ростом давления, а поперечный перепад давления мал. Рассмотрим теперь режим $L < 0$. В этом случае полная толщина струек тока области 2 уменьшается при отсутствии поперечного перепада давления и возрастании давления, так как большая часть исходного пограничного слоя сверхзвуковая.

Передача возмущений за счет свободного взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком при $L < 0$ и $N = O(1)$ на расстояния, боль-

шие $M_e R^{-1/2}$, возможна лишь из-за существования области вязкого течения 3. При уменьшении g_w величина $K \rightarrow -\infty$. Согласно (4.4) и (4.5)

$$(4.9) \quad \Phi_0'(\infty) \rightarrow + (1/2)K, \quad b \sim (-K)^{-3}$$

и масштаб области взаимодействия уменьшается. Однако рассматривать (4.9) как предельные соотношения в этом случае нельзя, так как при $\Delta x \sim M_e R^{-1/2}$ продольный и поперечный размеры области 2 уже имеют одинаковый порядок величины. Но тогда поперечные и продольные градиенты давления будут иметь одинаковый порядок и приведенные выше оценки и постановка краевой задачи уже не верны.

5. Закритические режимы взаимодействия. Закритическими будем называть течения, у которых продольный масштаб возмущенной области до точки отрыва порядка толщины невозмущенного пограничного слоя. Изученные ранее течения $[3-6]$ и рассмотренные в данной статье при $M_e \gg 1$ и $K \sim O(1)$, а также $K \rightarrow +\infty$ относятся к докритическим.

Прежде всего заметим, что продольный размер области распространения возмущений вверх по потоку не может по порядку сделаться меньше, чем толщина дозвуковой части невозмущенного пограничного слоя, т. е. $\Delta x \geq O(\delta)$. (Это, разумеется, справедливо и для течений разрежения около угловой точки контура тела и донного среза $[11]$.) Если тело, обтекаемое гиперзвуковым потоком, толстое и $M_e \sim 1$ (но сверхзвуковое), то при сильном охлаждении его поверхности согласно (2.4) теория $[3-5]$ становится неприменимой, так как в ней не учитывается изменение толщины вытеснения основной части пограничного слоя. При охлаждении согласно (2.2) и (2.4) наступают режимы с $\Delta \delta^{(2)} \gg \delta^{(3)}$. Если для этих режимов предположить, что течение является докритическим и $\Delta x \gg \delta$, то должны быть верны оценки (2.7), но из них следует согласно (2.8) $\Delta x \leq \delta$. Таким образом, при $\Delta \delta^{(2)} \gg \delta^{(3)}$ и $M_e \sim 1$ режим должен быть закритическим и $\Delta x \sim \delta$.

Кроме того, при рассмотрении $M_e \gg 1$ и $L < 0$ согласно (4.9) охлаждение ($g_w \rightarrow 0$, $K \rightarrow -\infty$) также приводит к закритическому режиму взаимодействия.

Чтобы получить масштабы переменных в этом случае, используем оценки (2.2)–(2.5). Условие (2.6) в этом случае уже не применимо, так как суммарная толщина вытеснения $\Delta \delta^{(2)} + \delta^{(3)}$ может быть значительно меньше любого из слагаемых. Однако вместо этого имеется масштаб для Δx

$$(5.1) \quad \Delta x \sim M_e R^{-1/2}$$

Тогда вместо (2.7) получается другая система масштабов переменных

$$(5.2) \quad \Delta p \sim M_e^{2/3} R^{-1/3} g_w^{-2/3(\omega+1/2)}, \quad \Delta x \sim M_e R^{-1/2}$$

$$\Delta \delta^{(2)} \sim M_e^{5/3} R^{-5/3} g_w^{-2/3(\omega+1/2)}, \quad \delta^{(3)} \sim M_e^{4/3} R^{-2/3} g_w^{2/3(\omega+1/2)}$$

где M_e может быть сверхзвуковым и гиперзвуковым. Вместо (2.8) получается

$$(5.3) \quad \Delta \delta^{(2)} / \delta^{(3)} \sim M_e^{1/3} R^{-1/3} g_w^{-4/3(\omega+1/2)}$$

Таким образом, теория, развитая в работах $[3-5]$, пригодна лишь для $1 \gg g_w^{\omega+1/2} \gg (M_e^2 / R^{1/2})^{1/4}$. Докритический режим для $M_e \gg 1$ и $L < 0$ лежит в диапазоне

$$(5.4) \quad (M_e^2 / R^{1/2})^{1/4} \gg g_w^{\omega+1/2} \gg (M_e / R^{1/2})^{1/4}$$

На основании оценок (5.2) введем переменные для области 2

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad & x = M_e R^{-1/2} x_2, \quad \psi = M_e^{-1} R^{-1/2} \psi_2 \\
 & p = 1 + \gamma M_e^{2/3} g_w^{-2/3(\omega+1/2)} R^{-1/3} [p_2(x_2, \psi_2) + \dots], \quad H = H_e g \\
 & y = M_e R^{-1/2} [y_0(\psi_2) + M_e^{2/3} g_w^{-2/3(\omega+1/2)} R^{-1/3} y_2(x_2, \psi_2) + \dots], \\
 & u = u_0(\psi_2) + M_e^{2/3} g_w^{-2/3(\omega+1/2)} R^{-1/3} u_2 + \dots \\
 & \rho = M_e^{-2} [\rho_0(\psi_2) + M_e^{2/3} g_w^{-2/3(\omega+1/2)} R^{-1/3} \rho_2(x_2, \psi_2) + \dots], \\
 & v = M_e^{2/3} g_w^{-2/3(\omega+1/2)} R^{-1/3} v_2(x_2, \psi_2) + \dots
 \end{aligned}$$

Подстановка (5.5) в уравнения Навье — Стокса и предельный переход

$$(5.6) \quad M_e \rightarrow +\infty, \quad R \rightarrow +\infty, \quad g_w \rightarrow 0$$

позволяют получить в первом приближении для области 2 линеаризованные уравнения Эйлера

$$\begin{aligned}
 (5.7) \quad & \rho_0 u_0 u_2 + p_2 = 0, \quad \frac{dy_0}{d\psi_2} = \frac{1}{\rho_0 u_0}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \psi_2} = -\frac{1}{\rho_0 u_0} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{u_2}{u_0} \right) \\
 & \frac{\partial p_2}{\partial \psi_2} = -\frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad p_2 = \frac{\rho_2}{\rho_0}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial x_2} = 0
 \end{aligned}$$

Для области 3 независимые переменные и асимптотические разложения для функций имеют вид

$$\begin{aligned}
 (5.8) \quad & x_3 = x_2, \quad y = M_e^{4/3} g_w^{2/3(\omega+1/2)} R^{-2/3} y_3 \\
 & p = 1 + \gamma M_e^{2/3} g_w^{-2/3(\omega+1/2)} R^{-1/3} p_3 + \dots, \quad \rho = g_w^{-1} M_e^{-2} \rho_3 + \dots \\
 & u = M_e^{1/3} g_w^{1/3(1-\omega)} R^{-1/3} u_3 + \dots, \quad \rho_3 = M_e^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)^{-1} \\
 & v = M_e^{2/3} g_w^{1/3(\omega+2)} R^{-1/3} v_3 + \dots, \quad \psi = M_e^{-1/3} g_w^{1/3(\omega-1)} R^{-5/3} \psi_3 + \dots
 \end{aligned}$$

Подстановка (5.8) в уравнения Навье — Стокса при совершении предельного перехода приводит к обычной системе уравнений для пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Сращивание решения в области 3 с решениями в области 2 и невозмущенным пограничным слоем дает граничные и начальные условия

$$(5.9) \quad p_3(x_3) = p_2(x_2, 0), \quad \partial u_3 / \partial y_3 \rightarrow a \text{ при } y_3 \rightarrow +\infty \text{ или } x_3 \rightarrow -\infty$$

Условия для области 2 будут различными при $M_e \sim 1$ и $M_e \gg 1$. Если $M_e \gg 1$, тогда согласно (5.3) и (5.4) $\delta^{(3)} \ll \Delta \delta^{(2)}$. Сращивание решений для $y_2(x_2, \psi_2)$ и $y_3(x_3, \psi_3)$ (в областях 2 и 3 и 2 и 1) дает

$$(5.10) \quad y_2(x_2, 0) = 0 \quad y_2(x_2, +\infty) = 0$$

Это означает, что изменения толщины вытеснения, создаваемые дозвуковой и сверхзвуковой частями области 2, должны в главном члене уравновешивать друг друга. Заметим, что это возможно лишь при $L < 0$, если в

верхней части области 2 возмущения давления меньше, чем у тела. Однако такая ситуация реализуется в действительности, так как возмущения передаются по дозвуковому подслою, а затем сносятся вниз по потоку в сверхзвуковую область с учетом возрастающего наклона характеристик.

Полезно заметить, что при невыполнении второго условия (5.10) получается противоречие. В самом деле, тогда согласно формуле Аккерета на $\Delta\delta^{(2)}$ индуцируется

$$\Delta p \sim M_e \frac{\Delta\delta^{(2)}}{\Delta x} \sim \frac{M_e^{5/3}}{R^{1/3} g^{2/3(\omega+1/2)}}$$

что значительно больше, чем вызывающий его перепад давления (5.2).

Для сверхзвуковых закритических режимов $M_e \sim 1$ области 2 и 1 имеют одинаковые масштабы всех переменных, т. е. совпадают. Поэтому необходимо лишь получить краевое условие для области 2 при $\psi_2 \rightarrow 0$. Это достигается при сращивании функций y_2 и y_3

$$(5.11) \quad y_2(x, 0) = R^{1/6} g_w^{4/3(\omega+1/2)} M^{-1/3} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\rho_0 u_0} - \frac{1}{(\rho_3 u_3)_{x_3 \rightarrow \infty}} \right] d\psi_3$$

Таким образом, для закритических и докритических режимов распределение давления при достаточно малых g_w перестает зависеть от вязкой области течения 3 как для $M_e \sim 1$, так и $M_e \gg 1$. Оно полностью определяется исходными профилями невозмущенного пограничного слоя перед началом области взаимодействия и внешним невязким потоком.

Во всех этих случаях можно предполагать, что в малой окрестности точки отрыва должны возникнуть новые подобласти с более мелким масштабом, в которых локальное распределение давления зависит от свойств локального вязкого слоя течения. Однако существование таких зон уже не может изменить порядка величины перепада давления в рассмотренных областях течения. Но тогда из приведенных выше результатов для закритических течений следует, что в главном члене отрыв пограничного слоя наступает при фиксированном, не зависящем от g_w значений перепада давления p_3 , т. е. полный перепад давлений согласно (5.2) возрастает как $g_w^{-2/3(\omega+1/2)}$.

Такой же результат получен выше для докритических режимов. Этот результат справедлив лишь до тех пор, пока справедливы оценки (2.3) — (2.5). Однако при получении (2.3) из (2.1) предполагалось, что в области 3, где возмущения скорости порядка невозмущенной скорости, изменением температуры можно пренебречь. Но при возрастании Δp с уменьшением g_w это допущение в конце концов нарушается. Чтобы установить предельный вид оценок, положим $g_w = 0$. Тогда из (2.1) получаем

$$(5.12) \quad y \sim \delta u^{1+\omega}, \quad \rho \sim \rho_0 / u, \quad \mu \sim \mu_0 u^\omega$$

Продольный размер возмущенной области определяется толщиной дозвуковой области невозмущенного пограничного слоя

$$(5.13) \quad \Delta x \sim \delta \quad (L < 0), \quad \Delta x \sim M_e \delta \quad \text{при} \quad (L > 0)$$

Потребуем опять, чтобы в области 3 главные вязкие и инерционные члены уравнений Навье — Стокса имели одинаковый порядок

$$(5.14) \quad \rho^{(3)} (u^{(3)})^2 / \Delta x \sim \mu^{(3)} u^{(3)} / (\delta^{(3)})^2 R \sim \Delta p / \Delta x M_e^2$$

Из (5.12) — (5.14) вытекают оценки для предельного режима течения

$$(5.15) \quad \Delta p \sim (\Delta x)^{1/2+\omega}, \delta^{(3)} \sim M_e R^{-1/2} (\Delta x)^{(1+\omega)/(2+\omega)}$$

Таким образом, максимальная по порядку величина отрывного перепада давления достигается при докритическом режиме $L > 0$, где $\Delta x \sim M_e^2 R^{-1/2}$.

Постепенный переход к предельному режиму $g_w \equiv 0$ начинается при таких Δp , когда в пристеночном слое с $u \sim g_w$ (2.1) возмущения скорости становятся порядка скорости. Используя эти условия и (5.13), (5.14), легко получить, что переход к предельному режиму совершается при $g_w \sim (\Delta x)^{1/(\omega+2)}$. Численное решение для закритических режимов пока не получено, поскольку в отличие от докритических режимов одновременно требуется изучить следующую за ними часть течения, так как при $\Delta x \sim \delta$ задача содержит дозвуковую часть в слое 2, не претерпевающую параболического вырождения.

6. Заключительные замечания. Величина давления в области «плато» развитой зоны отрыва [5] и минимальное значение перепада давления, вызывающего отрыв [12], имеют тот же порядок, что и значение Δp в точке отрыва. Поэтому на основании полученных в данной статье результатов можно сделать выводы об изменении этих величин при охлаждении тела (уменьшении g_w). Для этого обозначим $\lambda = g_w^{\omega+1/2}$, $\beta = M_e / R^{1/2}$. Величина Δp монотонно растет при $L > 0$, $\lambda \lesssim (\beta M_e)^{1/4}$ и сначала убывает $(M_e \beta)^{1/4} \geq \lambda \gg \beta^{1/4}$, а потом возрастает при $L < 0$ $g_w \lesssim (M_e / \sqrt{R})^{1/4}$. Предельные значения $\Delta p \sim (\Delta x)^{1/(2+\omega)}$, где $\Delta x \sim M_e / R^{1/2}$ для $L < 0$ и $\Delta x \sim M_e^2 / R^{1/2}$ для $L > 0$.

Проведенный анализ позволяет сделать некоторые выводы о пределах применимости других методов к анализу отрыва пограничного слоя от поверхности холодного тела. Прежде всего асимптотические решения уравнений Навье — Стокса [3–6], а также физическая модель течения [13] годятся лишь при $1 \gg g_w^{\omega+1/2} \gg (M_e^2 / R^{1/2})^{1/4}$, пока влияние локально-невязкого течения, содержащего основной расход невозмущенного пограничного слоя, мало.

Применение не строгих, но практически часто удобных приближенных методов, использующих интегральные уравнения пограничного слоя, например [14–16], также наталкивается на трудности при малых g_w . Это связано с уменьшением длины области свободного взаимодействия и появлением в ней больших поперечных перепадов давления на закритических режимах. В рамках метода Нильсона, например, при $g_w \sim 0.133$ исчезает передача возмущений вверх по потоку. Крокко [10], имея в виду трудности анализа закритических режимов, ввел понятие о скачкообразном изменении характеристик пограничного слоя от закритических к докритическим. Этот подход используется и в методе Лиза — Ривса. До некоторой степени такой подход кажется естественным, так как на самом деле отрыв совершается на длинах порядка толщины пограничного слоя, т. е. значительно меньших, чем длины, на которых справедлива сама теория пограничного слоя. Однако строгое описание этой области, как показано выше, должно включать в себя решение полных уравнений Эйлера уже в первом приближении для большей части струек невозмущенного пограничного слоя и учет вязкости лишь в узкой пристеночной зоне.

Поступила 19 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, vol. 1, pp. 43–69.
2. Kaplan S. Fluid mechanics and singular perturbations. New York — London, Acad. Press., 1967.
3. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.

4. *Stewartson K., Williams P. G.* Self-induced separation. Proc. Roy. Soc. A, London, 1969, vol. 312, No. 1509.
 5. *Нейланд В. Я.*, Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
 6. *Сычев В. В.* О ламинарном отрыве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
 7. *Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K.* Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NASA Rept 1356, 1958.
 8. *Хейз У. Д., Пробсун Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1967.
 9. *Olsson G. R., Messiter A. F.* Hypersonic laminar boundary layer approaching the base of a slender body. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 7.
 10. *Crocco L.* Consideration of the shock-boundary layer interaction. Proc. Conf. on High-Speed Aeronautics, Brooklin, 1955.
 11. *Матвеева Н. С., Нейланд В. Я.* Ламинарный пограничный слой вблизи угловой точки тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
 12. *Нейланд В. Я.* К асимптотической теории взаимодействия сверхзвукового потока с пограничным слоем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
 13. *Gadd G. E.* A theoretical investigation on laminar separation in supersonic flow. JAS., 1957, vol. 24.
 14. *Lees L., Reeves B. L.* Supersonic separated and reattaching laminar flows. AIAA Journal, 1964, No. 2.
 15. *Елькин Ю. Г., Нейланд В. Я.* О расчете характеристик ламинарных зон отрыва. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 5.
 16. *Nielson J. N., Lynes L. L., Goodwin F. K.* Theory of laminar separated flows on flared surfaces including supersonic flow with heating and cooling. AGARD C. P., 1968, No. 4.
-