

УДК 533.6.011.5:535.21

ОБТЕКАНИЕ ВЫПУКЛОГО УГЛА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

В. В. ЗНАМЕНСКИЙ

(Москва)

Методом малых возмущений получено аналитическое решение, описывающее течение в окрестности вершины тупого угла, обтекаемого сверхзвуковым потоком совершенного излучающего газа без учета перепоглощения. Показано, что в зависимости от закона изменения лучистого потока, показателя адиабаты и числа Маха перед угловой точкой, излучение может приводить как к уменьшению, так и увеличению возмущенного давления и температуры в волне Прандтля – Майера. В качестве примера использования полученных результатов рассмотрена задача об обтекании клина с изломом поверхности гиперзвуковым потоком при условии, что влияние излучения мало, а ударный слой оптически тонок.

Пусть x, y и X, Y – прямоугольные системы координат с общим началом в вершине угла O и осями абсцисс, направленными вдоль обтекаемой поверхности вниз по потоку соответственно до и после разворота; ρ_∞ и W_∞ – плотность и скорость в точке $x=-0, y=0$; $M, uW_\infty, vW_\infty, UW_\infty, VW_\infty, \rho\rho_\infty, P\rho_\infty W_\infty^2, hW_\infty^2, HW_\infty^2$ – число Маха, компоненты скорости по осям x, y и X, Y плотность, давление, энтальпия и полная энтальпия газа; $q_R = -q_\infty q$ – скорость притока тепла в единице массы за счет излучения, q_∞ – абсолютное значение q_R в точке $x=-0, y=0$. Назовем характеристиками I и II соответственно первую и последнюю характеристики веера волн разрежений. Значения безразмерных параметров до и после разворота при отсутствии излучения будем отмечать индексами H и K .

1. Будем использовать уравнение состояния совершенного газа

$$(1.1) \quad h = \gamma / (\gamma - 1) (P / \rho), \quad \gamma = \text{const}$$

Предположим существующей и известной зависимость $q = q(P, h)$.

Пусть распределение газодинамических параметров на характеристике I имеет вид

$$u = 1 + o(y), \quad \rho = 1 + o(y)$$

$$h = \frac{1}{(\gamma - 1) M_H^2} + o(y), \quad P = \frac{1}{\gamma M_H^2} + o(y)$$

Распределение v автоматически находится из условия совместности на характеристике I и определено ниже. Требуется найти течение в малой окрестности точки O , расположенной вниз по потоку от характеристики I .

Рассмотрим сначала область центрированной волны разрежения. Изменение энтропии и полной энтальпии описываются уравнениями

$$(1.2) \quad (u \partial / \partial x + v \partial / \partial y) \ln (P / \rho^\gamma) = -\varepsilon \gamma q / h$$

$$(1.3) \quad (u \partial / \partial x + v \partial / \partial y) H = -\varepsilon q, \quad \varepsilon = q_\infty / W_\infty^3$$

Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$(1.4) \quad \pm \sin \alpha \cos \alpha \frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dx} + \frac{d\beta}{dx} \pm \varepsilon \frac{q \sin \alpha}{h W \cos(\beta \pm \alpha)} = 0$$

$$\beta = \arctg(v / u), \quad \alpha = \arcsin M^{-1}, \quad W = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Из (1.4) видно, что при $q_R \neq 0$ не существует течений, содержащих хотя бы одну характеристику, вдоль которой постоянны одновременно P и β .

Введем криволинейные координаты ξ и s , где ξ — величина, постоянная вдоль характеристик первого семейства и равная углу наклона характеристики в точке O , а s — длина, отсчитываемая вдоль линий $\xi = \text{const}$.

Представим величины, фигурирующие в задаче, в следующем виде:

$$(1.5) \quad f = f_0(\xi) + \varepsilon s f_1(\xi) + o(\varepsilon s)$$

Очевидно, что условием применимости такого разложения служит $\varepsilon s \ll 1$. Функции $f_0(\xi)$ соответствуют решению Прандтля Майера. Для функций $f_1(\xi)$ имеем начальные условия

$$(1.6) \quad P_1 = \rho_1 = W_1 = 0 \quad (\xi = \arcsin M_H^{-1})$$

Подставляя (1.5) в (1.2) и (1.3), получаем (штрих означает дифференцирование по ξ)

$$(1.7) \quad -\left(\frac{P_1}{P_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)' + \mu_0 \left(\frac{P_1}{P_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = -\gamma \frac{q_0 M_0}{h_0 W_0}$$

$$(1.8) \quad -H_1' + \mu_0 H_1 = -q_0 M_0 / W_0$$

$$\mu = \sqrt{M^2 - 1}, \quad q_0 = q(P_0, h_0) = q(M_0, M_H) = q(\xi, \xi_H)$$

Эти уравнения с учетом начальных условий (1.6) имеют интегралы

$$(1.9) \quad \frac{P_1}{P_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{1}{2}(\gamma^2 - 1) M_H^3 \tau_H^{3/2} \tau_0^{k(\gamma+1)} J_1(M_0, M_H)$$

$$(1.10) \quad H_1 = -1/2(\gamma + 1) M_H \tau_H^{1/2} \tau_0^{k(\gamma+1)} J_2(M_0, M_H)$$

$$J_1(M, M_H) = \int_{M_H}^M q(M, M_H) \frac{M dM}{\mu \tau^{2k\gamma}}, \quad J_2(M, M_H) = \int_{M_H}^M q(M, M_H) \frac{M dM}{\mu \tau^{2k}}$$

$$\tau = \tau(M) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}, \quad k = \frac{1}{2(\gamma - 1)}$$

Подстановка (1.5) в (1.4), взятое с верхним знаком, дает

$$(1.11) \quad \beta_1 + \frac{\mu_0}{\gamma M_0^2} \frac{P_1}{P_0} = -\frac{q_0}{h_0 W_0 M_0}$$

Из (1.11) видно, что на характеристике I при $q_R < 0$

$$(1.12) \quad \beta_1 = v_1 = -(\gamma - 1) M_H < 0$$

т. е. линии тока наклонены к стенке.

Далее легко получить

$$(1.13) \quad H_1 = W_0 W_1 + h_0 \left(\frac{P_1}{P_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)$$

$$(1.14) \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 \left(\frac{P_1}{P_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} - 2 \frac{W_1}{W_0}\right)$$

Подставляя (1.5) в (1.4), взятое с нижним знаком, и исключая из полученного уравнения β_1 , ρ_1 , α_1 и W_1 с помощью (1.9)–(1.11), (1.13) и (1.14), приходим к следующему уравнению для P_1 :

$$(1.15) \quad P_1' + P_1 \frac{\gamma M_0^2 (2 - 3M_0^2) - 3M_0^4 + 10M_0^2 - 8}{2(\gamma + 1)\mu_0 M_0^2} + \\ + \frac{M_H}{2\tau_H^{k(3-\gamma)}} M_0 \mu_0^{1/2} \tau_H^{k(\gamma+2)} B(M_0, M_H) = 0 \\ B(M, M_H) = \frac{(2 - M^2)\tau^k}{M^3 \mu^{3/2}} [J_1(M, M_H) - J_2(M, M_H)] + \\ + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{q'(\gamma + 1)M^2 - 2q\mu(\gamma M^2 - 2)}{M^3 \mu^{3/2} \tau^{k(2\gamma - 1)}}$$

Его решение имеет вид

$$P_1 = \frac{(\gamma + 1)M_H}{4\tau_H^{k(3-\gamma)}} \frac{M_0^2 \tau^{3k\gamma}}{\mu_0} \int_{M_H}^{M_0} B(M, M_H) dM$$

Величины β_1 , ρ_1 и W_1 определяются с помощью (1.9)–(1.11) и (1.13).

2. Вниз по потоку от характеристики II решение ищем в виде

$$(2.1) \quad f = f_K + \varepsilon(a_f X + b_f Y) + \dots$$

Условия непрерывности параметров на характеристике II и непротекания на стенке приобретают вид

$$(2.2) \quad f_1(\xi_K) = (\mu_K a_f + b_f) M_K^{-1}, \quad V=0 \quad (Y=0)$$

Подставляя (2.1) в уравнения движения и используя (2.2) легко получить

$$a_P = (M_K/\mu_K) P_1(\xi_K), \quad b_P = 0; \quad a_V = 0, \quad b_V = M_K W_K \beta_1(\xi_K) \\ a_U = -\frac{1}{\gamma M_K \mu_K} \frac{P_1(\xi_K)}{P_K} W_K, \quad b_U = M_K W_1(\xi_K) + \frac{1}{\gamma M_K} \frac{P_1(\xi_K)}{P_K} W_K \\ a_\rho = \frac{M_K}{\gamma \mu_K} \frac{P_1(\xi_K)}{P_K} \rho_K + \frac{q_0(\xi_K) \rho_K}{W_K h_K} \\ b_\rho = -\frac{\mu_K q_0(\xi_K) \rho_K}{W_K h_K} + M_K \rho_K \left[\frac{\rho_1(\xi_K)}{\rho_K} - \frac{1}{\gamma} \frac{P_1(\xi_K)}{P_K} \right]$$

3. Примем в качестве $q = q(P, h)$ простейшую аппроксимацию реальной зависимости

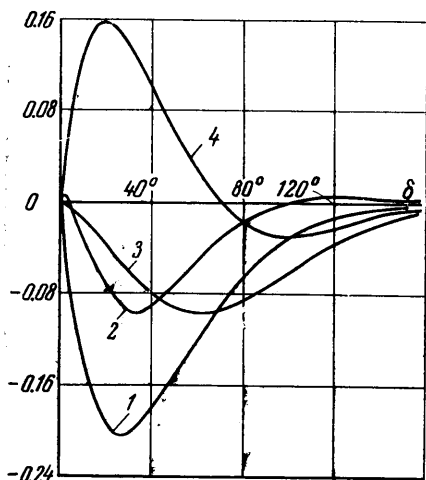
$$(3.1) \quad q = (h/h_H)^N, \quad N = \text{const}$$

Тогда $f_1(\xi_K) = f_1(M_H, \gamma, N, \delta)$, где δ — угол разворота. Характер зависимости f_1 от δ , N и γ при $M_H = 2$ показан на фиг. 1–3. Кривые 1, 2, 3, 4 (фиг. 1) соответствуют величинам h_1/h_0 , $10W_1/W_0$, P_1/P_0 , ρ_1/ρ_0 , рассчитанным при $N = 5.7$ и $\gamma = 1.1$. Имеют место формулы

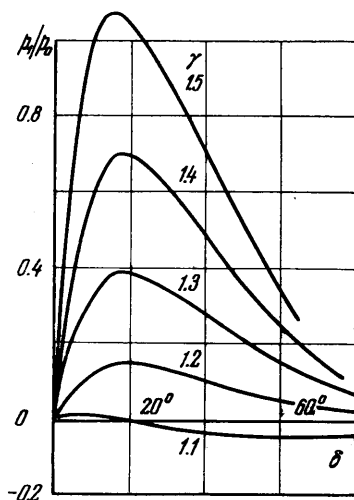
$$(3.2) \quad \left. \frac{\partial P_1}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = \frac{(\gamma - 1)M_H [N(\gamma - 1)M_H^2 - M_H^2\gamma + 2]}{2(M_H^2 - 1)}$$

$$(3.3) \quad \left. \frac{\partial h_1}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = \frac{M_H [N(\gamma - 1)^2 M_H^2 - M_H^2(\gamma + 1) + 2(\gamma - 1)]}{2(M_H^2 - 1)}$$

$$(3.4) \quad \left. \frac{\partial \rho_1}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = \frac{(\gamma - 1)M_H^3 [N(\gamma - 1)M_H^2 + M_H^2 + 2]}{2(M_H^2 - 1)} > 0$$



Фиг. 1

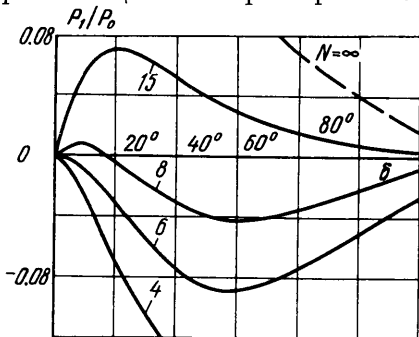


Фиг. 2

которые показывают знаки возмущений, возникающих при развороте на малый угол.

Можно условно выделить два фактора, обуславливающие развитие возмущений в области разрежения: уменьшение полной энтальпии и энтропии за счет отвода тепла и влияние начального возмущения β_1 на характеристике I . Подчеркнем, что влияние названных факторов, вообще говоря, нельзя проследить по отдельности — принципиальная неустранимость начального возмущения β_1 из постановки задачи связана именно с наличием теплового потока в уравнении энергии. Однако анализ частного случая $N \rightarrow \infty$ позволяет понять характер влияния второго из них. Отметим сразу же, что такой анализ является формальным, так как при $N \gg 1$ (точнее при $\varepsilon N \sim 1$) нарушается законность применяемого метода малых возмущений.

При $N \rightarrow \infty$ величина q_0 падает до нуля в бесконечно узкой области, прилегающей к характеристике I , в которой различные возмущения



Фиг. 3

изменяют свои значения на конечную величину. Последнее объясняется тем, что в свободный член уравнения (1.15) входит не только $q(\xi)$ и интегралы от этой величины J_1 и J_2 , но и $q'(\xi)$. Поэтому P_1 в указанной области возрастает до значения $(\gamma - 1) \times M_\infty / 2\mu_\infty$, β_1 в соответствии с (1.11) вдвое уменьшается по абсолютной величине. В соотношениях (1.9) и (1.10) $J_1 \rightarrow 0$ и $J_2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Это означает, что полная энтальпия и энтропия не успевают измениться в указанной зоне, развитие возмущений

в которой обуславливается только поджатием потока за счет начального возмущения β_1 . Ниже по потоку течение является адиабатическим в строгом смысле.

Преобладающее влияние второго фактора объясняет знак выражений (3.2) и (3.3) при больших N . Знак выражения (3.4) физически очевиден — влияние обоих факторов вызывает рост возмущения плотности.

Кривые, изображенные на фиг. 2, рассчитаны при достаточно большой величине $N=8$, при которой возмущения обуславливаются в основном влиянием начального возмущения β_1 . Естественно, что при этом возмущения при фиксированном δ тем больше, чем больше γ , так как с ростом γ возрастает q' . Расположение кривых с различными N на фиг. 3, рассчитанных при фиксированном $\gamma=1.1$, также объясняется увеличением q' с ростом N .

4. Рассмотрим клин с изломом поверхности, обтекаемый гиперзвуковым потоком. Пусть течение всюду сверхзвуковое, в ударном слое выполняются соотношения (1.1) и (3.1) и $\varepsilon l \ll 1$, где l — расстояние от носка до излома. Тогда распределение параметров на характеристике I имеет вид [1]

$$\begin{aligned} f &= f_H [1 + \varepsilon c_i y] \\ c_u &= \frac{b}{u_* h_* (\rho_* u_* + b \mu_*^2 \operatorname{tg} \omega_*)} \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \mu_* \operatorname{tg} \omega_* \right) \\ c_h &= - \frac{(\gamma - 1) b M_*^2}{u_* h_* (\rho_* u_* + b \mu_*^2 \operatorname{tg} \omega_*)} \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \mu_* \operatorname{tg} \omega_* \right) + \frac{1 - \mu_* \operatorname{tg} \omega_*}{u_* h_* \operatorname{tg} \omega_*} \\ c_P &= - \frac{\gamma b \mu_* M_*^2 \operatorname{tg} \omega_*}{u_* h_* (\rho_* u_* + b \mu_*^2 \operatorname{tg} \omega_*)}, \quad b = \frac{\sin[2(\theta + \omega_*)]}{\cos(\theta + 2\omega_*)} \end{aligned}$$

Здесь ω и θ — углы наклона скачка к оси x и оси x к направлению набегающего потока, f_* — значения безразмерных параметров в ударном слое до излома при $\varepsilon=0$.

Давление на стенке за изломом дается выражением

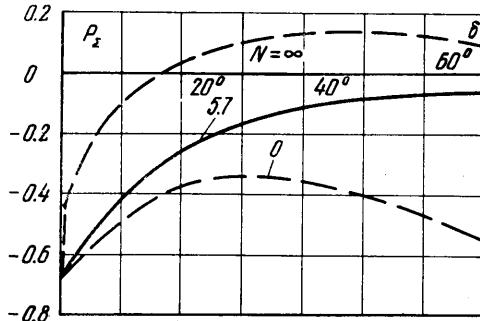
$$(4.1) \quad P = P_K [1 + \varepsilon X(c_u P_u + c_h P_h + c_P P_P + a_P)] = P_K (1 + \varepsilon X P_x)$$

где P_u , P_h и P_P — возмущения давления за счет возмущений скорости, энтальпии и давления на характеристике I . Выражения для этих величин имеют вид [2]

$$\begin{aligned} P_u &= {}^{1/2} \gamma M_H \tau_H^{-h(3-\gamma)} z(M_K) F(M_H, M_K), \quad P_h = -{}^{1/2} P_u \\ P_P &= \frac{z(M_K) F(M_H, M_K)}{2 M_H \tau_H^{h(\gamma+1)}} + \frac{z(M_K)}{z(M_H) \mu_H} \end{aligned}$$

$$F(M_H, M_K) = \int_{M_H}^{M_K} \frac{(2 - M^2) \tau^h dM}{M^3 \mu^{3/2}}, \quad z(M) = \frac{M^3 \tau^h}{\mu^{3/2}}$$

Расчеты показывают, что все слагаемые в сумме (4.1) имеют одинаковый порядок. Зависимость $P_x = P_x(\delta)$, рассчитанная при $\gamma=1.1$ и $\theta=60^\circ$, приведена на фиг. 4; $P_x(0)$ соответствует градиенту давления на лобовой поверхности. Значения $\gamma=1.1$ и $N=5.7$ удовлетворительно аппроксимируют в широком диапазоне параметров свойства равновесно-диссоциирующего воздуха по данным [3, 4]. Кривые с $N=0$ и ∞ дают представление



Фиг. 4

о случае максимально возможного влияния излучения в зоне разрежения (q не зависит от h) и о случае, когда излучение предполагается существенным только на лобовой поверхности.

Автор благодарит В. В. Лунева за постановку задачи и научное руководство.

Поступила 1 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. Обтекание клина гиперзвуковым потоком излучающего газа. ПМТФ, 1960, № 2.
2. Знаменский В. В. К задаче об обтекании выпуклого угла сверхзвуковым неоднородным потоком газа. Тр. МФТИ, 1971, Сер. аэрофизика и прикладная математика, ч. 1, 1972.
3. Таблицы термодинамических функций воздуха для температур 200–6000–12 000–20 000° К. М., Изд-во АН СССР, 1957, 1959, 1962.
4. Авилова И. В., Биберман Л. М., Воробьев В. С., Замалин В. М., Кобзев Г. А., Лагарьков А. Н., Мнацаканян А. Х., Норман Г. Э. Оптические свойства горячего воздуха. М., «Наука», 1970.