

УДК 533.6.011

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ПО ГАЗУ

А. В. ВОЛОШИНОВ, С. В. ФАЛЬКОВИЧ

(Саратов)

Рассматривается автомодельная задача о движении холодного газа под действием мгновенного импульса. Строится решение в окрестности известного точного решения для газа с отношением удельных теплоемкостей $\gamma=1.4$ [1-4]. В этой окрестности получена аналитическая зависимость показателя автомодельности n от параметра h , связанного с показателем адиабаты γ соотношением $h=(\gamma+1)/(\gamma-1)$. Приводятся результаты численного расчета зависимости n от h , которые сравниваются с аналитической зависимостью.

1. Задача о движении газа под действием кратковременного удара впервые была поставлена в работе [5] следующим образом. Рассматривается полупространство, граничащее с вакуумом и занятое совершенным газом; первоначально плотность газа постоянна, давление и скорость равны нулю. В начальный момент времени со стороны вакуума на газ действует мгновенный импульс, вследствие чего по газу распространяется ударная волна, а газ разлетается в вакуум. Поскольку в задаче нет характерных параметров длины и времени, ясно, что описываемое движение является автомодельным.

Уравнения одномерного нестационарного движения газа в форме Лагранжа в общепринятых обозначениях имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial v}{\partial m} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Система (1.1) должна удовлетворять граничным условиям на фронте сильной ударной волны (так как перед фронтом $p=0$) и условиям разлета газа в вакуум (условиям на свободной поверхности).

Следуя [5, 6], автомодельное решение системы (1.1) ищется в виде

$$(1.2) \quad p = A \rho_0 M^{-n} f(\eta), \quad v = \sqrt{AM^{-n/2}} w(\eta), \quad \rho = \rho_0 q(\eta)$$

Здесь $\eta = m/M$ — автомодельная независимая переменная, n — показатель автомодельности, A — константа, определяемая величиной мгновенного импульса, $M = M(t)$ — лагранжева координата фронта ударной волны ($0 \leq \eta \leq 1$, $1 < n < 2$).

Заменой переменных [1, 6]

$$(1.3) \quad f = \eta^\sigma x^\omega, \quad w = \eta^{\sigma-1} x^\omega u$$

$$\sigma = [2(h+1) - n(h-1)] / 2h, \quad \omega = -(h+1) / 2h$$

система (1.1) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению и квадратурам

$$(1.4) \quad \frac{du}{dx} = \frac{h(h+1)un^2 + (2+n)\sqrt{h(h-1)}ux - 2(h+1)\sqrt{h(h-1)}u - 2(h-1)nx}{2h^2nu + 2(2+n)\sqrt{h(h-1)}x - 2\sqrt{h(h-1)}[2(h+1) - (h-1)n]}$$

$$\eta = \exp \left[- \int_1^x \frac{(h+1) - x}{nh\sqrt{h(h-1)}u + n(h-1) + (2+n)x - 2(h+1)} dx \right]$$

$$q = hf^{1/\gamma} \eta^{n/\gamma}$$

Значение показателя автомодельности n определяется из условия прохождения интегральной кривой уравнения (1.4) через точку $B(x=1, u=\sqrt{(h-1)/h})$, соответствующую ударной волне, и особую точку этого уравнения $C(x=h+1, u=-2\sqrt{(h-1)/h})$, которая является седлом при всех значениях h .

2. Следующая замена

$$(2.1) \quad u(x) = \sqrt{(h-1)/h} y(x), \quad x=1+hx_1, \quad y=1-y_1$$

переводит точки B и C соответственно в точки $B_1(0, 0)$ и $C_1(1, 3)$. Итак, в плоскости x_1, y_1 координаты рассматриваемых точек не зависят от значений параметров n и h , что облегчает дальнейшее исследование.

В переменных (2.1) уравнение (1.4) примет вид

$$(2.2) \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{2} \frac{-n(h+1)y_1^2 + (n+2)hx_1y_1 - h(2-n)x_1 - (2h-3n-2nh)y_1 + h(2-n)}{h(2+n)x_1^2 - nhx_1y_1 + [2+n+2h(n-1)]x_1 - ny_1 + 2(n-1)}$$

а известное $[1^{-4}]$ точное решение уравнения (1.4) при $h=6, n=1/3$ запишется более просто: $y_1=3x_1$.

При изменении h в окрестности $h=6$ показатель автомодельности n изменяется в некоторой окрестности $n=1/3$. При этом точное решение будет как-то деформироваться, оставаясь неизменным в точках B_1 и C_1 , ибо их координаты не зависят от n и h . Итак, будем искать решение уравнения (2.2) в окрестности известного точного решения, полагая

$$(2.3) \quad y_1 = 3x_1 + \varepsilon g(x_1), \quad h = 6 + a\varepsilon, \quad n = 1/3 + b\varepsilon$$

Здесь ε — некоторый малый безразмерный параметр, a, b — константы, которые должны определиться из граничных условий. Ясно, что неизвестная функция $g(x_1)$ должна удовлетворять следующим однородным условиям:

$$(2.4) \quad g(0) = 0, \quad g(1) = 0$$

которые обеспечивают прохождение интегральной кривой уравнения (2.2) через точки B_1 и C_1 .

Подставляя (2.3) в (2.2) и оставляя члены не выше первого порядка малости, получаем линейное дифференциальное уравнение

$$(2.5) \quad g' + \frac{1}{2} \frac{3x_1 + 4}{(x_1 - 1)(x_1 + 1/6)} g + \frac{3(2a + 27b)x_1^2 - (8a + 27b)x_1 + 2a - 54b}{24(x_1 - 1)(x_1 + 1/6)} = 0$$

решение которого имеет вид

$$(2.6) \quad g = \frac{1}{(x_1 - 1)^3} \left[Cz^{3/2} - \frac{2a + 27b}{20} z^4 + \frac{8a + 81b}{12} z^3 - \frac{7(5a + 27b)}{12} z^2 - \frac{49(16a - 27b)}{2 \cdot 6^3} z - \frac{7^3(2a - 27b)}{4 \cdot 6^4} \right]$$

где $z = x_1 + 1/6, C$ — константа интегрирования.

Решение (2.6) подчиняем граничным условиям (2.4). Второе условие (2.4) удовлетворяется следующим образом: в (2.6) при $x_1=1$ приравнива-

ем нулю числитель и его третью производную; из первого условия определяем константу интегрирования

$$(2.7) \quad C = 14\sqrt{7}(4a+9b)/15\sqrt{6}$$

при этом второе условие выполняется тождественно. Удовлетворяя первому условию (2.4) и учитывая (2.7), получим отношение неизвестных констант

$$(2.8) \quad \tau = \frac{b}{a} = \frac{2}{9} \frac{28\sqrt{7}-67}{101-14\sqrt{7}}$$

Выражая из (2.3) $\varepsilon = (h-6)/a$, получим аналитическую формулу для определения показателя автомодельности n_* , а также решение уравнения (2.2) в некоторой окрестности $h=6$

$$(2.9) \quad n_* = \frac{4}{3} + (h-6) \frac{2}{9} \frac{28\sqrt{7}-67}{101-14\sqrt{7}}$$

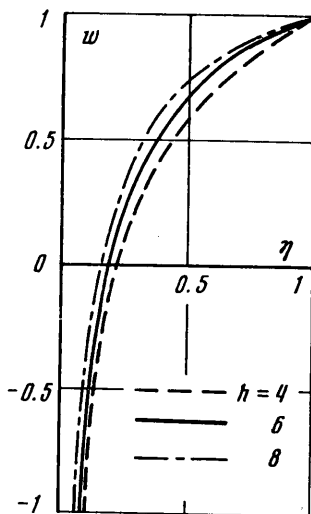
$$(2.10) \quad y_1 = 3x_1 + (h-6)(x_1-1)^{-3} \left[\frac{14\sqrt{7}(4+9\tau)}{15\sqrt{6}} z^{3/2} - \frac{2+27\tau}{20} z^4 + \frac{8+81\tau}{12} z^3 - \frac{7(5+27\tau)}{12} z^2 - \frac{49(16-27\tau)}{2 \cdot 6^3} z + \frac{7^3(2-27\tau)}{4 \cdot 6^4} \right]$$

Формула (2.9) является линейной аппроксимацией зависимости показателя автомодельности n от параметра h в некоторой окрестности $h=6$. Эту формулу можно представить в виде зависимости показателя автомодельности $\alpha = 2/(2+n)$ от показателя адиабаты $\gamma = (h+1)/(h-1)$ в окрестности $\gamma = 7/5$

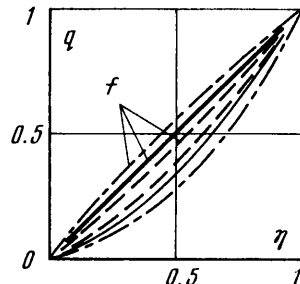
(2.11)

$$\alpha = \frac{3}{5} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\gamma-1.4}{\gamma-1} \frac{28\sqrt{7}-67}{101-14\sqrt{7}} \right)^{-1}$$

где α_* — значение показателя автомодельности α , вычисленное по аналитической формуле.



Фиг. 1



Фиг. 2

<i>h</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>n</i>	<i>a</i>
1.0	1.114659	0.642125	3.5	1.256281	0.614197
1.1	1.123012	0.640407	3.6	1.260146	0.613469
1.2	1.131009	0.638771	3.7	1.263925	0.612759
1.3	1.138677	0.637211	3.8	1.267623	0.612066
1.4	1.146042	0.635719	3.9	1.271243	0.611388
1.5	1.153126	0.634291	7.1	1.358322	0.595535
1.6	1.159948	0.632922	7.2	1.360409	0.595166
1.7	1.166527	0.631607	7.3	1.362467	0.594801
1.8	1.172879	0.630342	7.4	1.364499	0.594442
1.9	1.179018	0.629125	7.5	1.366505	0.594088
2.0	1.184957	0.627952	7.6	1.368485	0.593739
2.1	1.190708	0.626820	7.7	1.370439	0.593394
2.2	1.196282	0.625727	7.8	1.372369	0.593055
2.3	1.201689	0.624670	7.9	1.374276	0.592720
2.4	1.206938	0.623648	8.0	1.376158	0.592390
2.5	1.212038	0.622658	8.1	1.378018	0.592063
2.6	1.216997	0.621698	8.2	1.379855	0.591741
2.7	1.221820	0.620767	8.3	1.381671	0.591424
2.8	1.226516	0.619863	8.4	1.383464	0.591110
2.9	1.231091	0.618986	8.5	1.385237	0.590800
3.0	1.235550	0.618133	8.6	1.386990	0.590495
3.1	1.239898	0.617303	8.7	1.388721	0.590193
3.2	1.244141	0.616496	8.8	1.390434	0.589895
3.3	1.248283	0.615710	8.9	1.392127	0.589600
3.4	1.252328	0.614944	9.0	1.393801	0.589310

Учитывая (2.9) и (2.10), запишем решение для автомодельных представителей газодинамических параметров в окрестности $h=6$

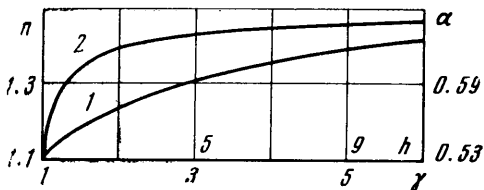
$$f(\eta) = \eta^\sigma (1+h x_1)^\sigma, \quad w(\eta) = \eta^{\sigma-1} (1+h x_1)^\sigma \sqrt{\frac{h-1}{h}} (1-y_1)$$

$$q(\eta) = h f^{1/\gamma} \eta^{n/\gamma}$$

$$\eta = \exp \left[- \int_0^{x_1} \frac{h(1-x_1)}{(1+h x_1) [(2+n)x_1 - n y_1 + 2(n-1)]} dx_1 \right]$$

Графики полученных решений, отнесенные к значениям этих решений на фронте ударной волны, представлены на фиг. 1, 2 для трех значений параметра h из окрестности $h=6$.

3. Определить окрестность точки $h=6$, в которой с достаточной точностью справедлива формула (2.9), можно на основании численных расчетов, дающих зависимость $n(h)$. С этой целью, используя разностные схемы, основанные на применении производных высшего порядка [7], интегрировалось уравнение (2.2) от особой точки C_1 до точки B_1 , т. е. в интервале $0 \leq x_1 \leq 1$. Значение показателя автомодельности n выбиралось на ЭВМ автоматически из условия прохождения интегральной кривой уравнения (2.2) через точку B_1 (метод пристрелки). Значения показателя автомодельности n вычислены с точностью 10^{-8} в интервале $1 \leq h \leq 9$ с шагом 0.1 по h . Полученные результаты приведены в таблице (для кратко-



Фиг. 3

сти приведены шесть значащих цифр и опущен интервал $4 \leq h \leq 7$, где точны приближенные формулы (2.9), (2.11)).

Формула (2.9) верна в интервале $3.9 \leq h \leq 8.7$ с точностью 0.01, а в интервале $5.7 \leq h \leq 6.3$ — с точностью 0.0001. Соответственно формула (2.11) в интервале $1.26 \leq \gamma \leq 1.70$ верна с точностью 0.002, а в интервале $1.38 \leq \gamma \leq 1.42$ — с точностью 0.00003.

Как известно, физически реальные значения параметра h находятся в интервале $1 \leq h < \infty$. Значение показателя автомодельности n при $h = \infty$ можно установить аналитически. В самом деле, при $h = \infty$ система уравнений для автомодельных представителей и соответствующие граничные условия [6] примет вид

$$\frac{n}{2} + \eta \frac{dw}{d\eta} = \frac{df}{d\eta}, \quad \frac{dw}{d\eta} = 0$$

$$\eta = 1 : f = 1, \quad w = 1; \quad \eta = 0 : f = 0$$

Легко выписать решение этой системы, удовлетворяющее граничным условиям: $f = \eta$, $w = 1$. При этом получаем, что $n = 2$.

График зависимости показателя автомодельности n от параметра h и зависимости показателя автомодельности α от показателя адиабаты γ представлен на фиг. 3 (кривые 1 и 2 соответственно).

Поступила 28 III 1972.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков А. И., Каждан Я. М. О движении газа под действием кратковременного импульса. Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 4.
2. Weizsäcker C. F. Genäherte Darstellung starker instationärer Stoßwellen durch Homologie — Lösungen. Z. Naturforsch., 1954, Bd 9a, H. 4, S. 269—275.
3. Häfele W. Zur Analytischen Behandlung ebener, starker, instationärer Stoßwellen. Z. Naturforsch., 1955, Bd 10a, H. 12, S. 1006—1016.
4. Hoerner S. Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen mit linearem Verlauf der Geschwindigkeit. Z. Naturforsch., 1955, Bd 10a, H. 9, S. 687—692.
5. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
6. Адамский В. Б. Интегрирование системы автомодельных уравнений в задаче о кратковременном ударе по холодному газу. Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
7. Милл В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1955.