УДК 532.72

УЧЕТ ПРОДОЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ ПРИ ТЕЧЕНИИ В КАНАЛЕ

Д. А. ПОПОВ

(*Москва*)

Рассматривается стационарная задача конвективной диффузии в канале с поглощающими стенками. Течение предполагается пуазейлевским. Для решения применяются метод разделения переменных и метод разложения по собственным функциям соответствующей задачи с поршневым профилем (метод разложения). Путем сравнения с независимо полученными решениями задачи при больших числах Пекле установлено, что для первых собственных функций и собственных значений метод разложения дает удовлетворительные результаты во всей области чисел Пекле. Для приближенного расчета последующих собственных функций и собственных значений применена модификация метода равномерных асимптотических разложений. Отмечается, что этот метод применим уже для первых собственных функций.

Результаты используются для расчета плотности потока вещества на стенку, оценки длины начального участка и для получения аналитической зависимости предельного числа Нуссельта от числа Пекле.

1. Постановка задачи и метод разделения переменных.

Математическая формулировка задачи следующая:

$$(1.1)\qquad (1-y^2)\frac{\partial C}{\partial x}=\varepsilon\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)\qquad\left(\varepsilon=\frac{D}{Vh}\right)$$

$$C|_{x=0}=\varphi(y),\qquad C|_{x\to\infty}\to 0,\qquad C|_{y=\pm1}=0,\qquad (0\leqslant x<\infty;\quad -1\leqslant y\leqslant 1)$$

Здесь $C(x, y)$ — концентрация вещества, D — коэффициент диффузии, h — полуширина канала (единица длины), V — скорость на оси течения. Переменные C, x, y — безразмерные.

Предполагается, что $\varphi(y)=\varphi(-y)$. Тогда можно ограничиться интервалом $-1\leqslant y\leqslant 0$, а граничные условия в задаче (1.1) заменить на следующие:

$$(1.2)\qquad C|_{y=-1}=0,\qquad \left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{y=0}=0$$

В методе разделения переменных решение задачи (1.1) ищется в виде [1, 2, 3].

$$C(x, y)=\exp(-\varepsilon\lambda^2 x)\,Y(y)$$

Для $Y(y)$ получаем следующую краевую задачу:

$$(1.3)\qquad \begin{gathered} Y''+\lambda^2[\varepsilon^2\lambda^2+1-y^2]\,Y=0\\ Y'(0)=0,\qquad Y(-1)=0\qquad(-1\leqslant y\leqslant 0)\end{gathered}$$

Выпишем формальное решение задачи (1.1), (1.2)

$$(1.4)\qquad C(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(\varepsilon)\,Y_k(\varepsilon,y)\exp(-\varepsilon\lambda_k^2 x)$$

$$(1.5)\qquad Y_k(\varepsilon,y)=\Phi\left(\frac{1-\lambda_k-\varepsilon^2\lambda_k^3}{4},\frac{1}{2},\lambda_k y^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_k y^2\right)$$

где $\lambda_k(\varepsilon)$ — корни уравнения

$$\Phi\left(\frac{1-\lambda-\varepsilon^2\lambda^3}{4}, \frac{1}{2}, \lambda\right)=0 \tag{1.6}$$

Здесь $\Phi(a, c, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Исходя из уравнения (1.6), в работе [3] была найдена асимптотика $\lambda_0(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ и $\varepsilon\to\infty$, а в [2] рассчитаны $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k=0, 1, 2)$. Задача (1.3) не является задачей Штурма — Лиувилля. Для нее можно доказать теорему существования собственных функций и собственных значений [4, 5], однако вопрос о полноте системы собственных функций остается открытым. Даже если предположить, что $\varphi(y)$ можно разложить по функциям $Y_k(\varepsilon, y)$, то возникает проблема нахождения $A_k(\varepsilon)$, так как «условия ортогональности» для функций $Y_k(\varepsilon, y)$

$$\int_{-1}^{0}[\varepsilon^2(\lambda_m^2+\lambda_n^2)+1-y^2]Y_m(\varepsilon, y)Y_n(\varepsilon, y)\,dy=0 \qquad (m\neq n) \tag{1.7}$$

не позволяют определить коэффициенты $A_k(\varepsilon)$. Кроме того, ввиду сложности работы с вырожденной гипергеометрической функцией желательно иметь достаточно хорошее представление решения через более простые функции.

2. Разложение по собственным функциям задачи с поршневым профилем. В работах [6, 7] предложено искать решение задачи (1.1) в виде

$$C(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x)\cos(\mu_k y) \qquad \left(\mu_k=(2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \tag{2.1}$$

Основанный на представлении (2.1) метод решения задачи (1.1) ниже называется методом разложения. Оценки точности этого метода и границы его применимости в работах [6, 7] не указаны. Ниже такая оценка будет проведена путем прямого сравнения с методом разделения переменных.

В методе разложения для $C_k(x)$ получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$C_k''-\alpha_{kk}\varepsilon^{-1}C_k'-\mu_k^2C_k=\sum_{l\neq k}\alpha_{kl}\varepsilon^{-1}C_l' \tag{2.2}$$

$$C_k(0)=a_k, \quad C_k|_{x\to\infty}\to 0 \quad (k,\ l=0, 1, 2, \ldots)$$

Постоянные a_k и α_{kl} находятся из соотношений

$$Q_k=\int_{-1}^{+1}\varphi(y)\cos(\mu_k y)\,dy \tag{2.3}$$

$$\alpha_{kl}=\int_{-1}^{+1}(1-y^2)\cos(\mu_k y)\cos(\mu_l y)\,dy= \tag{2.4}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{8(-1)^{k+l+1}\mu_k\mu_l}{(\mu_k-\mu_l)^2(\mu_k+\mu_l)^2} & (k\neq l) \\[2ex] \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2\mu_k^2} & (k=l) \end{cases}$$

Предложенный в работе [6] метод решения системы (2.2) основан на предположении, что правую часть уравнения (2.2) можно рассматривать как возмущение. Тогда в нулевом приближении система (2.2) расцепляется, а дальше используется метод последовательных приближений. Малым параметром, по которому при этом ведется разложение, являются величины типа α_{kl}/α_{ll}. Выпишем решение задачи (1.1), отвечающее первому приближению

$$C(x,y)\approx\sum_{k=0}^{\infty}\exp(\gamma_k x)F_k(y)$$

(2.5)

$$F_k(y)=a_k\cos(\mu_k y)-\cos(\mu_k y)\sum_{p=0}^{\infty}a_pA_{kp}+a_k\sum_{p=0}^{\infty}A_{pk}\cos(\mu_p y)$$

$$A_{kp}=\alpha_{kp}[\alpha_{pp}-\alpha_{kk}-\varepsilon\gamma_k^{-1}(\mu_p^2-\mu_k^2)]^{-1}\quad(k\neq p),\ A_{kk}=0 \tag{2.6}$$

$$\gamma_k=[\alpha_{kk}-\sqrt{\alpha_{kk}^2-4\mu_k^2\varepsilon^2}](2\varepsilon)^{-1} \tag{2.7}$$

Первый член в формуле (2.5) соответствует нулевому приближению. Сравнение выражений (2.5) и (1.4) показывает, что этим методом получается разложение функции $A_k(\varepsilon)Y_k(\varepsilon,\ y)$ (1.4) в ряд по функциям $\{\cos(\mu_k y)\}$. В частности, в первом приближении

$$A_k(\varepsilon)Y_k(\varepsilon,y)\approx F_k(y) \tag{2.8}$$

$$\varepsilon\lambda_k^2(\varepsilon)\approx-\gamma_k \tag{2.9}$$

Прежде всего отметим, что сходимость рассматриваемого метода решения системы (2.2) совершенно не ясна. Уже во втором приближении получаются труднообозримые формулы с двойными рядами. Тем не менее можно оценить приближение (2.8), (2.9), основываясь на том, что критической областью для их оценки является область $\varepsilon\ll1$. Это связано с тем, что разложение (2.1) можно рассматривать как разложение по собственным функциям, отвечающим $\varepsilon\gg1$. При $\varepsilon\to0$ решение задачи (1.1) для $\varphi=1$ $(a_k=2(-1)^k\mu_k^{-1})$ известно [1, 8]. Два первых члена ряда (1.4) в этом случае имеют вид

$$C(x,\ y)=\exp(-\varepsilon 2.83x)Y_0(0,\ y)-\exp(-\varepsilon 32.15x)Y_1(0,\ y)+\ldots \tag{2.10}$$

Функции $Y_0(0,\ y)$, $Y_1(0,\ y)$, отвечающие $\varepsilon=0$ в выражении (1.5), табулированы [1, 8].

Из соотношения (2.9) при учете (2.7) следует:

$$\lambda_k\approx\frac{\mu_k}{\sqrt{\alpha_{kk}}}\qquad\left(\frac{4\mu_k^2\varepsilon^2}{\alpha_{kk}^2}\ll1\right) \tag{2.11}$$

откуда, в частности, получаем

$$\varepsilon\lambda_0^2\approx\varepsilon 2{,}83,\qquad \varepsilon\lambda_1^2\simeq\varepsilon 32.18\qquad(\varepsilon\ll1) \tag{2.12}$$

Видно, что результат (2.12) хорошо согласуется с (2.10). Используя результаты численного расчета [2], можно независимо проверить, что равенство (2.9) хорошо выполняется для $k=0.1$ во всей области ε. Равенство (2.8) для $k=0.1$ в пределе $\varepsilon\to0$ также было проверено прямым сравнением с (2.10). Проверка выявила, что равенство (2.9) хорошо выполняется для $k=0$. Результаты численного расчета показывают, что с ошибкой меньше 10% для $k=0$ в (2.5) можно ограничиться нулевым приближением

$$Y_0(\varepsilon, y) \approx \cos(\mu_0 y) \tag{2.13}$$

Качество приближений (2.8), (2.9) ухудшается с ростом k. Для $k=1$ в (2.8) уже нельзя ограничиться нулевым приближением, но ошибка первого приближения еще не превышает 5%. В случае $k=2$, видимо, необходимы высшие приближения, однако вопрос о их сходимости не ясен. С другой стороны, равенство (2.9) удовлетворительно выполняется вплоть до $k=3$ и может быть использовано в методе разделения переменных.

Таким образом, применение метода разложения сопряжено с трудностями в тех случаях, когда важен вклад высших собственных функций.

Обычно физические граничные условия $\varphi(y)$ удовлетворяют требованиям типа

$$|a_0| > |a_1| > |a_2| > \ldots \tag{2.14}$$

и тогда метод разложения дает возможность получить асимптотику решения при больших x.

Рассмотрим этим методом задачу аналогичную (1.1) с «профилем скорости» $f(y)=f(-y)$, что отвечает замене $1-y^2 \to f(y)$ в (1.1).

Введем величины

$$\alpha_{kl}[f] = \int_{-1}^{+1} f(y) \cos(\mu_k y) \cos(\mu_l y)\, dy \tag{2.15}$$

и предположим, что $\alpha_{0l}[f]/\alpha_{00}[f] \ll 1$. Пусть, кроме того, выполнены условия (2.14). Тогда можно сразу выписать аналогичное (2.13) грубое приближение первого члена асимптотики решения при $x \to \infty$

$$\begin{gathered} C(x, y) \approx a_0 \exp(\gamma[f] x) \cos(\mu_0 y) \\ \gamma[f] = (\alpha_{00}[f] - \sqrt{(\alpha_{00}[f])^2 + 4\mu_0^2 \varepsilon^2})(2\varepsilon)^{-1} \end{gathered} \tag{2.16}$$

Таким образом, первая собственная функция слабо зависит от величины и профиля скорости. Это во всяком случае справедливо для профилей, лежащих «между» паузейлевским и поршневым.

3. Асимптотики собственных функций собственных значений. Остается открытым вопрос о нахождении собственных функций, отвечающих большим собственным значениям. Применим к этой задаче метод Лангера [9], несколько видоизменив его. Этот метод дает возможность получить при известных ограничениях на $p(\lambda, y)$ равномерные асимптотики решений уравнения

$$Y'' + \lambda^2 p(\lambda, y) Y = 0 \tag{3.1}$$

при больших λ. Имеются два различных метода, применяемых в зависимости от того, имеется или нет в рассматриваемой области точка перехода y_0, в которой $p(y_0)=0$. В рассматриваемом случае $p(\lambda, y) = \lambda^2\varepsilon^2 + 1 - y^2$ и для $\varepsilon > 0$ в области $-1 \leqslant y \leqslant 0$ нет точек перехода и метод Лангера дает [4, 9] асимптотику общего решения уравнения (3.1) в виде

$$\begin{aligned} Y(\lambda, y) = p^{-1/4} \Bigg[b \cos\left(\lambda \int_0^y p^{1/2}\, dy\right) + \\ + b' \sin\left(\lambda \int_0^y p^{1/2}\, dy\right)\Bigg]\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2 \varepsilon}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

Асимптотики (3.2) очевидным образом неравномерны по ε при $\varepsilon\to 0$ и $y\approx -1$. Приближение (3.2) равномерно по y и удовлетворительно, грубо говоря, при $\varepsilon>1$ (см. ниже). С другой стороны, при $\varepsilon=0$, применяя метод Лангера для уравнений с точкой перехода ($y=-1$), в равномерно по y полученс

$$Y(\lambda,y)=\left(\int_{-1}^{y}\sqrt{1-y^2}\,dy\right)^{1/2}\times \tag{3.3}$$
$$\times(1-y^2)^{-1/4}Z_{1/3}\left[\lambda\int_{-1}^{y}\sqrt{1-y^2}\,dy\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

Здесь и в дальнейшем $Z_{1/3}$ обозначает общее решение уравнения Бесселя индекса $^1/_3$. Цель состоит в построении равномерной по y и ε асимптотики решения (1.3), которая пригодна при выполнении одного из условий

$$\lambda\gg 1 \quad \text{или} \quad \varepsilon\lambda^2\gg 1 \tag{3.4}$$

Отметим, что асимптотические методы для аналогичной задачи в круглой трубе были применены в работах [11, 12]. Полученные там асимптотики заведомо неравномерны по ε.

С формальной точки зрения метод Лангера для уравнения с точкой перехода y_0 в случае p, не зависящего от λ, состоит во введении переменных

$$\xi=\Psi(y),\qquad \chi=(d\Psi/dy)^{1/2}Y$$

в которых уравнение (3.1) принимает вид

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+\lambda^2\xi\chi=-\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^{-3/2}\left[\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^{-1/2}\right]\chi$$

Здесь Ψ определяется из условий

$$p(d\Psi/dy)^{-2}=\Psi,\qquad \Psi(y_0)=0$$

Доказано [9], что первый член асимптотики $Y(\lambda,\ y)$ при $\lambda\to\infty$ получается после перехода к переменным Y, y из решения уравнения

$$d^2\chi/d\xi^2+\lambda^2\xi\chi=0$$

Хотя уравнение (1.3) при $\varepsilon>0$ не имеет точки перехода и p зависит от λ, поступим совершенно аналогично, но не будем фиксировать граничное условие для определения Ψ.

Тогда первое приближение имеет вид

$$Y(\lambda,y)\approx(f+2c)^{1/2}(1+\lambda^2\varepsilon^2-y^2)^{-1/4}Z_{1/3}[{}^1/_3\lambda(f+2c)] \tag{3.5}$$
$$f=y\sqrt{1+\lambda^2\varepsilon^2-y^2}+(1+\lambda^2\varepsilon^2)\arcsin y/\sqrt{1+\lambda^2\varepsilon^2}$$

Константа c пока не фиксирована. Выражение (3.5) можно переписать иначе

$$Y(\lambda,y)\approx\left(\int_{Q}^{y}p^{1/2}\,dy\right)^{1/2}p^{-1/4}Z_{1/3}\left[\lambda\int_{Q}^{y}p^{1/2}\,dy\right],\qquad c=\int_{Q}^{0}p^{1/2}\,dy \tag{3.6}$$

При $y\to-1$ уравнение (1.3) можно приближенно заменить следующим:

$$Y''+\lambda^2[\lambda^2\varepsilon^2+2(y+1)]Y=0 \tag{3.7}$$

Общее решение уравнения (3.7) выписывается сразу

$$Y=\sqrt{2y+2+\lambda^2\varepsilon^2}Z_{1/3}[{}^1/_3\lambda(2y+2+\lambda^2\varepsilon^2)^{3/2}] \tag{3.8}$$

Определим константу Q (или c) из требования, чтобы выражение (3.6) при $y\to-1$ переходило в (3.8). Это дает следующее уравнение для константы a:

$$\lambda\int_Q^{-1} p^{1/2}\,dy=\frac{\lambda^4\varepsilon^3}{3} \tag{3.9}$$

что отвечает

$$c=\frac{\lambda^3\varepsilon^3}{3}+\frac{1}{2}\lambda\varepsilon+\frac{1}{2}(1+\lambda^2\varepsilon^2)\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2\varepsilon^2}} \tag{3.10}$$

В дальнейшем поправки к представлению (3.5), (3.6) нигде не рассматриваются. По-видимому, эти поправки имеют порядок $O[(\lambda^4\varepsilon^2+\lambda^2)^{-1/2}]$. В полном объеме это предположение не доказано. Однако для собственных функций оно доказано для $\varepsilon=0$ и $\varepsilon>1$. Доказательство для $\varepsilon=0$ сводится к замечанию, что при этом представление (3.5) совпадает с (3.3). Доказательство для $\varepsilon>1$ дано ниже (3.13). Сравнение (3.6) с независимо полученными приближениями (2.5), (2.10) показывает, что представление (3.6) вполне удовлетворительно (по крайней мере для $\varepsilon=0$ и $\varepsilon>1$) для всех собственных значений, начиная с $k=0$. Именно это замечание оправдывает тот факт, что поправки к (3.6) (см. ниже) не рассматриваются. Если выполняется одно из условий (3.4), то $\lambda c\gg1$ и в дальнейшем отбрасываются члены порядка $O(1/\lambda c)$. Предположим, что

$$\lambda\int_Q^y p^{1/2}\,dy\gg1$$

Тогда, используя асимптотики

$$J_{1/3}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{5\pi}{12}\right)+O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \tag{3.11}$$

$$J_{-1/3}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\pi}{12}\right)+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

и учитывая, что

$$Z_{1/3}\left(\lambda\int_Q^y p^{1/2}\,dy\right)=BJ_{1/3}\left[\lambda\int_Q^y p^{1/2}\,dy\right]+B'J_{-1/3}\left[\lambda\int_Q^y p^{1/2}\,dy\right] \tag{3.12}$$

получим

$$Y(\lambda,y)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}p^{-1/4}\left[B\cos\left(\lambda\int_Q^y p^{1/2}\,dy-\frac{5\pi}{12}\right)+\right. \tag{3.13}$$

$$\left.+B'\cos\left(\lambda\int_Q^y p^{1/2}\,dy-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

где B, B' — произвольные константы.

Легко видеть, что выражение (3.13) равномерно по y при $\varepsilon>1$. Его можно преобразовать к виду (3.2), что и доказывает равномерность асимптотики (3.5), (3.6) при $\varepsilon>1$. С другой стороны, представление (3.13) равномерно по ε при $y\approx 0$. Это дает возможность записать условие $Y'(0)=0$ в виде

$$B\sin(\lambda c-{}^5/_{12}\pi)+B'\sin(\lambda c-{}^1/_{12}\pi)=0 \tag{3.14}$$

Второе граничное условие $Y(-1)=0$ при учете (3.6), (3.9), (3.12) дает

$$BJ_{1/3}({}^1/_3\lambda^4\varepsilon^3)+B'J_{-1/3}({}^1/_3\lambda^4\varepsilon^3)=0 \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) получаем уравнение для спектра

$$\sin(q-{}^5/_{12}\pi)J_{-1/3}({}^1/_3\lambda^4\varepsilon^3)=\sin(q-{}^1/_{12}\pi)J_{1/3}({}^1/_3\lambda^4\varepsilon^3) \tag{3.16}$$

Здесь введено обозначение

$$q=\lambda c=\frac{\lambda^4\varepsilon^3}{3}+\frac{1}{2}\lambda^2\varepsilon+\frac{\lambda}{2}(1+\lambda^2\varepsilon^2)\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2\varepsilon^2}} \tag{3.17}$$

Так как поправки к представлению (3.6) не рассматриваются, то в дальнейшем $Y_k(\varepsilon, y)$ наряду с точными собственными функциями обозначает функции, определенные равенствами (3.6), (3.14), (3.15), а $\lambda_k(\varepsilon)$ — корни уравнения (3.16).

Рассмотрим задачу вычисления спектра, исходя из уравнения (3.16). Предположим, что $\lambda^4\varepsilon^3\gg 1$, тогда, используя асимптотические представления (3.11), с учетом членов порядка z^{-1} получим

$$\cos\left(q-\frac{\lambda^4\varepsilon^3}{3}\right)=\frac{5}{24}\frac{1}{\lambda^4\varepsilon^3}\sin\left(q-\frac{\lambda^4\varepsilon^3}{3}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^8\varepsilon^6}\right) \tag{3.18}$$

Отсюда методом последовательных приближений найдем

$$q(\varepsilon,\lambda_k)-\frac{\lambda_k^4\varepsilon^3}{3}-\mu_k=-\frac{5}{24}\frac{1}{\lambda_k^4\varepsilon^3}+O\left(\frac{1}{\lambda_k^8\varepsilon^6}\right) \tag{3.19}$$

При дополнительном предположении $\lambda_k^2\varepsilon^2\gg 1$ из (3.19) можно получить

$$\varepsilon\lambda_k^2=\mu_k-\frac{1}{3\varepsilon}+\frac{1}{15\mu_k\varepsilon^2}-\frac{5}{24\mu_k^2\varepsilon}+O\left(\frac{1}{\mu_k^3\varepsilon^2}\right)+O\left(\frac{1}{\mu_k^2\varepsilon^3}\right) \tag{3.20}$$

В случае $\lambda^4\varepsilon^3\ll 1$, используя представления

$$J_{1/3}(z)=2^{-1/3}\Gamma^{-1}({}^4/_3)z^{1/3}+O(z^{7/3}),\qquad J_{-1/3}(z)=2^{1/3}\Gamma^{-1}({}^2/_3)z^{-1/3}+O(z^{5/3})$$

Из (3.16) найдем

$$\sin(q-{}^5/_{12}\pi)=\sin(q-{}^1/_{12}\pi)A\lambda^{8/3}\varepsilon^2+O(\lambda^8\varepsilon^6) \tag{3.21}$$
$$(A=\Gamma({}^2/_3)6^{2/3}\Gamma^{-1}({}^1/_3))$$

При $\lambda^2\varepsilon^2\ll 1$ из (3.21) следует:

$$\lambda_k=\eta_k-\eta_k^3\varepsilon^2+2\frac{\sqrt{3}}{\pi}A\eta_k^{8/3}\varepsilon^2+O(\eta_k^{16/3}\varepsilon^4)\qquad\left(\eta_k=4k+\frac{5}{3}\right) \tag{3.22}$$

Обсудим полученные выражения. Начнем с формулы (3.20). Прежде всего отметим, что при $\varepsilon>1$ эта формула дает хорошее приближение уже для $k=0$. Действительно из (2.9) следует:

$$\varepsilon\lambda_k^2\approx\mu_k-\frac{1}{3\varepsilon}+\frac{1}{18\mu_k\varepsilon^2}-\frac{1}{4\varepsilon\mu_k^2}+O\left(\frac{1}{\mu_k^3\varepsilon^2}\right) \tag{3.23}$$

Ясно, что при $\varepsilon>1$ формулы (3.20) и (3.23) практически совпадают. Область применения (3.20) не ограничивается условием $\varepsilon>1$, и при $\varepsilon\ll1$ эта формула дает собственные значения, удовлетворяющие условию $\mu_k\varepsilon\gg1$. Заметим, что при $\lambda^4\varepsilon^3\gg1$ представление (3.13) равномерно по y. Это дает возможность выписать асимптотику собственной функции при $\mu_k\varepsilon^2\gg1$ и $\mu_k^2\varepsilon\gg1$

$$Y_k(\varepsilon,y)\approx\left(1+\frac{y^2}{4\mu_k\varepsilon}\right)\cos\left[\mu_k y+\frac{y-2y^3}{6\varepsilon}\right]\times \tag{3.24}$$
$$\times\left[1+O\left(\frac{1}{\mu_k\varepsilon^2}\right)+O\left(\frac{1}{\mu_k^2\varepsilon}\right)\right]$$

Область применения равенства (3.22) ограничена условием $\varepsilon\ll1$. При $\varepsilon=0$ получаем известный результат [10, 13], вполне удовлетворительный даже при $k=0$. Соотношение (3.22) показывает, что чем больше номер k, тем при меньших ε необходимо учитывать продольную диффузию и даже при $\varepsilon\ll1$ ее учет необходим, если представляют интерес собственные функции, для которых $\lambda_k\varepsilon>1$.

4. Некоторые приложения. Рассмотрим применение полученных результатов. Для этого необходимо задать граничное условие $\varphi(y)$. Однако при учете продольной диффузии постановка граничного условия при $x=0$ физически не обоснована и необходимо рассматривать задачу с некоторым «входным» участком. Простая модель такого участка получится, если продолжить стенки до $-\infty$ и при $x<0$ потребовать

$$C(x,\pm1)=1,\quad C|_{x\to-\infty}\to1\quad(x<0) \tag{4.1}$$

Эта задача методом разложения решалась в работе [14]. В этой работе фактически показано, что в случае граничных условий (1.2), (4.1), используя условия склейки

$$C|_{x=-0}=C|_{x=+0},\qquad \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=+0}$$

и соотношения (1.7), можно определить $\varphi(y)=C(0,y)$

$$\varphi(y)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(\varepsilon)Y_k(\varepsilon,y)$$

$$A_k(\varepsilon)=\left[\int_{-1}^{0}Y_k(\varepsilon,y)(\varepsilon^2\lambda_k^2+1-y^2)\,dy\right]\times \tag{4.2}$$
$$\times\left[\int_{-1}^{0}Y_k^2(\varepsilon,y)(2\varepsilon^2\lambda_k^2+1-y^2)\,dy\right]^{-1}$$

где $Y_k(\varepsilon,y)$ — любая собственная функция задачи (1.3). Оба интеграла, входящие в (4.9), легко вычисляются. Действительно, интегрируя уравнение (1.3) от -1 до 0, получим

$$\int_{-1}^{0}(\varepsilon^2\lambda_k^2+1-y^2)Y_k(\varepsilon,y)\,dy=\lambda_k^{-2}Y_k'(-1) \tag{4.3}$$

Для вычисления второго интеграла воспользуемся соотношением

(4.4) $$Y(\lambda,-1)Y_k'(-1)=$$

$$=(\lambda_k^2-\lambda^2)\int_{-1}^{0}[\varepsilon^2(\lambda^2+\lambda_k^2)+1-y^2]Y(\lambda,y)Y_k(\varepsilon,y)dy$$

из которого следует:

(4.5) $$\int_{-1}^{0}Y_k^2(\varepsilon,y)[2\varepsilon^2\lambda_k^2+1-y^2]dy=-\frac{Y_k'(-1)}{2\lambda_k}\frac{dY(\lambda,-1)}{d\lambda}\Bigg|_{\lambda=\lambda_k}$$

В равенствах (4.4) и (4.5) $Y(\lambda, y)$ обозначает решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию $Y'(\lambda, y)=0$.

Коэффициент $A_k(\varepsilon)$ (4.2) дается, таким образом, выражением

(4.6) $$A_k(\varepsilon)=-2\left[\lambda\frac{dY(\lambda,-1)}{d\lambda}\right]^{-1}_{\lambda=\lambda_k}$$

Вычислим плотность потока вещества на стенку при $x>0$

(4.7) $$j(x)=\frac{\partial C}{\partial y}\bigg|_{y=-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\varepsilon)\exp(-\varepsilon\lambda_k^2x)=\sum_{k=0}^{\infty}j_k(x)$$

(4.8) $$\alpha_k(\varepsilon)=-2Y_k'(-1)\left[\lambda\frac{dY(\lambda,-1)}{d\lambda}\right]^{-1}_{\lambda=\lambda_k}$$

Используя (3.8), (3.14), (3.16), после довольно длинных преобразований получим

(4.9) $$\alpha_k=\frac{12\sin^2(q-\pi/12)}{\pi\varepsilon^2\lambda^2[\lambda(dq/d\lambda)J^2_{-1/3}(1/3\lambda^4\varepsilon^3)-(8/\pi)\sin^2(q-\pi/12)]}\Bigg|_{\lambda=\lambda_k}$$

Вычислим $\alpha_k(\varepsilon)$ в тех же предельных случаях, в каких был вычислен спектр $\lambda_k(\varepsilon)$. При $\lambda^4\varepsilon^3\gg1$, $\lambda^2\varepsilon^2\gg1$, используя асимптотическое представление $J_{-1/3}(z)$, с учетом членов порядка z^{-2} получим:

(4.10) $$\alpha_k(\varepsilon)=\left[r+O\left(\frac{1}{\lambda^8\varepsilon^6}\right)\right]\left[r+s+O\left(\frac{1}{\lambda^4\varepsilon^4}\right)\right]^{-1}_{\lambda=\lambda_k}$$

$$r=\cos^2\left(\frac{\lambda^4\varepsilon^3}{3}-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{5}{24}\frac{1}{\lambda^4\varepsilon^3}\sin\left(\frac{2\lambda^4\varepsilon^3}{3}-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$s=\frac{25}{32\cdot27\cdot\lambda^4\varepsilon^6}\left[1-\frac{82}{5}\cos^2\left(\frac{\lambda^4\varepsilon^3}{3}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

Из (4.10), в частности, следует:

(4.11) $$\alpha_k(\varepsilon)=1+O\left(\frac{1}{\mu_k^3\varepsilon}\right)+O\left(\frac{1}{\mu_k^2\varepsilon^2}\right)$$

Используя соотношения (3.20) и (4.11), получим выражение для $j(x)$, пригодное при $\varepsilon>1$

(4.12) $$j(x)\approx\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left(-\mu_kx+\frac{x}{3\varepsilon}\right)=\exp\left(\frac{x}{3\varepsilon}-\frac{\pi x}{2}\right)[1-\exp(-\pi x)]^{-1}$$

Плотность тока (4.12) имеет неинтегрируемую особенность в нуле ($j(x)\sim x^{-1}$). Это следствие разрывного характера граничных условий. Заметим, что как (3.20), так и (4.11) справедливы и при $\varepsilon\ll 1$ для $\mu_k\varepsilon^2\gg 1$. Так как именно собственные функции, отвечающие большим собственным значениям, ответственны за поведение $j(x)$ при $x\to 0$, то характер особенности $j(x)$ не зависит от ε и при любом $\varepsilon>0$ в задаче (1.1), (4.1) $j(x)\approx\approx(\pi x)^{-1}x\to+0$. Отметим, что в соответствующей задаче с поршневым профилем скорости $j(x)$ имеет ту же особенность, не зависящую от ε.

В случае $\lambda^4\varepsilon^3\ll 1$, $\lambda^2\varepsilon^2\ll 1$, используя равенства (4.9) и (3.22), получим

$$\alpha_k(\varepsilon)=\frac{8\sqrt{3}}{\pi}A\lambda_k^{-1/3}\left[1+A\lambda_k^{8/3}\varepsilon^2-3\lambda_k^2\varepsilon^2+\frac{16}{\sqrt{3}\pi}A\lambda_k^{5/3}\varepsilon^2+O(\lambda_k^{16/3}\varepsilon^4)\right]. \tag{4.13}$$

При $\varepsilon=0$ выражение (4.13) совпадает с известным результатом [10, 13], полученным в задаче без диффузии вдоль оси течения для $\varphi=1$. Выражения (4.10), (4.13) дают возможность оценить влияние продольной диффузии на плотность тока $j(x)$ при $\varepsilon\ll 1$.

Формулы (4.10), (4.13) показывают, что отношение $\alpha_1(\varepsilon)/\alpha_0(\varepsilon)$ слабо зависит от ε. Это дает возможность грубо оценить длину начального участка. Если

$$\frac{j_1(x)}{j_0(x)}=\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\exp(-\varepsilon\lambda_1^2x+\varepsilon\lambda_0^2x)\approx\exp(-\varepsilon\lambda_1^2x+\varepsilon\lambda_0^2x) \tag{4.14}$$

то, определяя длину начального участка $l(\varepsilon)$ как такое значение x, при котором отношение (4.14) становится равным 10^{-2}, и используя (2.9), получим

$$l(\varepsilon)\approx 9.2\varepsilon\left[\sqrt{\alpha_{11}^2+4\mu_1^2\varepsilon^2}-\sqrt{\alpha_{00}^2+4\mu_0^2\varepsilon^2}+\alpha_{00}-\alpha_{11}\right]^{-1} \tag{4.15}$$

При $x>l(\varepsilon)$ локальное число Нуссельта уже не зависит от x и равно своему предельному значению $\mathrm{Nu}_\infty(\varepsilon)$.

$$\mathrm{Nu}_\infty(\varepsilon)=\frac{4}{3}Y_0(-1)\left[\int_{-1}^{0}Y_0(\varepsilon,y)(1-y^2)\,dy\right]^{-1} \tag{4.16}$$

Интегрируя уравнение (1.3) от -1 до 0, преобразуем (4.16) к виду

$$\mathrm{Nu}_\infty(\varepsilon)=\frac{4}{3}[\varepsilon^2\lambda_0^2K(\varepsilon)+\lambda_0^2], \tag{4.17}$$

$$K(\varepsilon)=\int_{-1}^{0}Y_0(\varepsilon,y)\,dy\left[\int_{-1}(1-y^2)Y_0(\varepsilon,y)\,dy\right]^{-1}$$

В работе [3] показано, что $K(\varepsilon)$ практически не зависит от ε

$$K(0)=1.234,\qquad K(\infty)=1.226$$

Выбирая $K=1.23$, с учетом (2.9) получим интерполяционную формулу для $\mathrm{Nu}_\infty(\varepsilon)$

$$\mathrm{Nu}_\infty(\varepsilon)\approx{}^4/_3[\gamma_0^2 1.23-\gamma_0\varepsilon^{-1}] \tag{4.18}$$

В заключение отметим, что задача (1.1), (4.1) была рассмотрена только при $x>0$. Область $x<0$ нуждается в отдельном исследовании. Однако, используя метод разложения, можно аналогично (2.16) выписать первый член асимптотики решения при $x \to -\infty$

$$C(x, y) \approx 1-(1-A_0(\varepsilon))\exp(\beta x)\cos(\mu_0 y)$$
$$\beta(\varepsilon) = [\alpha_{00}+\sqrt{\alpha_{00}^2+4\mu_0^2\varepsilon^2}](2\varepsilon)^{-1}$$

Это соотношение позволяет оценить глубину проникновения фронта уменьшения концентрации вверх по течению.

Поступила 30 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.
2. *Лехтмахер С. О.* Осаждение частиц из ламинарного потока в зависимости от числа Пекле. Инж.-физ. ж., 1971, т. 20, № 3, стр. 546–549.
3. *Pahor S., Strnad J.* A note on heat transfer in laminar flow through a gap. Appl. Sci. Res., 1961, Sec. A, vol. 10, No. 1, pp. 81–84.
4. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
5. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, ОНТИ, 1939.
6. *Dennis S. C. R., Poots G.* A solution on the heat transfer equation for laminar flow between parallel plates. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, No. 3, pp. 231–236.
7. *Dennis S. C. R.* The determination eigenfunctions of the Sturm — Liouville equation (expantion in trigonometric series). Quart. J. Mech. Appl. Math., 1956, vol. 9, No. 3, pp. 371–384.
8. *Brown G. M.* Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in a circular or flat conduit. A.I.Ch.E. Journal, 1960, vol. 6, No. 2, pp. 178–183.
9. *Langer E.* The asymptotic solution of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, vol. 67, No. 2, pp. 461–490.
10. *Попов Д. А.* О приближении диффузионного погранслоя для течения в канале. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 6, стр. 1373–1376.
11. *Tan C. W., Chia Jung-Hsu.* Mass transfer of desaying products with axial diffusion in cylindrical tube. Internat. J. Heat. Mass Transfer, 1970, vol. 13, No. 12, pp. 1887–1905.
12. *Chia Jung-Hsu.* An exact mathematical solution for entranceregion laminar heat transfer with axial conduction. Appl. Sci. Res., 1968, vol. 17, No. 4, 5, pp. 359–376.
13. *Sellers J. R., Tribus M., Klein J. S.* Heat transfer to laminar flow in round tube or flat conduit — the graetz problem extended. Trans. ASME, 1956, vol. 78, No. 2, pp. 441–448.
14. *Agrawal H. C.* Heat transfer in laminar flow between parallel plates at small Peclet number. Appl. Sci. Res., 1960, Sec. A, vol. 9, No. 2, 3, pp. 177–189.