

УДК 532.59:551.465.6

## О ВЛИЯНИИ НЕПРЕРЫВНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ НА ВОЛНЫ, ГЕНЕРИРУЕМЫЕ ДВИЖУЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ДАВЛЕНИЯМИ

С. Ф. ДОЦЕНКО, Л. В. ЧЕРКЕСОВ

(Севастополь)

Проводится исследование плоской линейной задачи об установившихся внутренних волнах в неоднородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости. Генератором волн являются поверхностные давления, приложенные в ограниченной области, перемещающейся с постоянной скоростью. Предполагается, что плотность в невозмущенном состоянии непрерывно изменяется по глубине, оставаясь постоянной в верхнем и нижнем слоях и меняясь по экспоненциальному закону в среднем. Данная задача может рассматриваться, в частности, как гидродинамическая модель для изучения внутренних волн, вызываемых циклоном, движущимся над поверхностью океана.

Аналогичные исследования для однородной жидкости проведены в [1-3]; для указанного закона изменения плотности, но неподвижных периодических по времени давлений внутренние волны изучались в [4]. Задачи, аналогичные рассматриваемой, как для экспоненциального изменения плотности во всем слое, так и в случае неоднородного приповерхностного слоя исследованы в [5, 6]. Анализ нелинейных волн установившегося типа при произвольном распределении завихренности и плотности по глубине проведен в [7, 8].

1. Бассейн, занимающий часть пространства  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-H \leq z \leq 0$ , заполнен идеальной несжимаемой жидкостью, плотность которой в невозмущенном состоянии является непрерывной функцией одной координаты  $z$ . К свободной поверхности жидкого слоя ( $z=0$ ) приложены давления вида

$$(1.1) \quad p_0 = af(x+vt) \quad (v > 0)$$

где  $a, v$  — константы,  $f(\xi)$  — четная функция, равная нулю при  $|\xi| > l$ .

Проведем исследование влияния непрерывного изменения плотности по вертикали на установившиеся волны, генерируемые давлениями (1.1).

В линейной постановке задача сводится (в переменных  $x_1 = x+vt, z$ ) к решению следующей краевой задачи

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \nu u_x &= -\rho_0^{-1}(p_x + p_{ax}), \quad \nu w_x = -\rho_0^{-1}gp - \rho_0^{-1}p_z \\ u_x + w_x &= 0, \quad \nu \rho_x + \rho_{0z}w = 0 \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad p - \rho_1 g \zeta = 0, \quad \nu \zeta_x - w = 0 \quad (z=0), \quad w = 0 \quad (z=-H)$$

Здесь  $u, w$  — компоненты вектора скорости по осям  $x, z$ ;  $p, \rho$  — динамические возмущения давления и плотности;  $\zeta$  — отклонение свободной поверхности от уровня  $z=0$ ;  $\rho_0 = \rho_0(z)$  — плотность жидкости при равновесии, ось  $z$  направлена вертикально вверх, ось  $x$  совмещена с невозмущенной свободной поверхностью,  $\rho_1 = \rho_0(0)$  — известная константа. В формулах (1.2), (1.3), как и в дальнейшем, у переменной  $x_1$  нижний индекс опущен.

Применим к (1.2), (1.3) преобразование Фурье по переменной  $x$  (трансформанту Фурье функции  $\Phi(x, z)$  будем обозначать через  $\Phi^*(m, z)$ ,  $m$  — параметр преобразования). Исключая из полученной системы  $u^*, p^*$ ,

$\rho^*$  и  $\zeta^*$ , для нахождения  $w^*$  получим краевую задачу

$$(1.4) \quad (\rho_0 w_z^*)_z - (g\nu^{-2}\rho_{0z} + m^2\rho_0)w^* = 0$$

$$(1.5) \quad w_z^*(m, 0) - g\nu^{-2}w^*(m, 0) = ima(\rho_1\nu)^{-1}f^*, \quad w^*(m, -H) = 0$$

Пусть  $-H \leq z_2 \leq z_1 \leq 0$ ,  $k > 0$  и  $\rho_0(z)$  имеет вид

$$(1.6) \quad \rho_0(z) = \begin{cases} \rho_1, & z_1 \leq z \leq 0 \\ \rho_1 \exp k(z_1 - z), & z_2 \leq z \leq z_1 \\ \rho_1 \exp k(z_1 - z_2), & -H \leq z \leq z_2 \end{cases}$$

Тогда отрезок  $[-H, 0]$  разбивается на три, в каждом из которых уравнение (1.4) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Учитывая непрерывность  $\rho$  и  $\rho_0$  (а значит, и  $w^*$ ,  $w_z^*$ ) при  $z = z_{1,2}$  и крайние условия (1.5), легко найти решение задачи (1.4), (1.5) для  $\rho_0$  вида (1.6). После применения к нему обратного преобразования Фурье для  $w(x, z)$  получим интегральное представление

$$(1.7) \quad w = \frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_c \frac{m\Delta_1(m, z)}{\Delta(m)} f^*(m) e^{imx} dm$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \Delta &= (mchmh_1 - g\nu^{-2}shmh_1)\kappa_{11} + (mshmh_1 - g\nu^{-2}chmh_1)\kappa_{12} \\ \Delta_1 &= \kappa_{11}sh m(z - z_1) + \kappa_{12}ch m(z - z_1) \quad (z_1 \leq z \leq 0) \\ \Delta_1 &= \exp^{1/2}k(z - z_1) [\kappa_{21}sh \gamma(z - z_2) - \kappa_{22}ch \gamma(z - z_2)] \quad (z_2 \leq z \leq z_1) \\ \Delta_1 &= \kappa_3 sh m(z + H) \quad (-H \leq z \leq z_2) \\ \kappa_{11} &= \{[(gk\nu^{-2} - m^2)th mh_3 -^{1/2}km]sh \gamma h_2 - m\gamma ch \gamma h_2\} ch^{-1} mh_1 \\ \kappa_{12} &= \kappa_{21} sh \gamma h_2 - \kappa_{22} ch \gamma h_2, \quad \kappa_{21} = m(^{1/2}k th mh_3 - m) ch^{-1} mh_1 \\ \kappa_{22} &= m\gamma th mh_3 ch^{-1} mh_1, \quad \kappa_3 = -\exp(^{1/2}kh_2) m\gamma (ch mh_1 ch mh_3)^{-1} \\ \gamma &= (m^2 - gk\nu^{-2} + ^{1/4}k^2)^{1/2}, \quad h_1 = -z_1, \quad h_2 = z_1 - z_2, \quad h_3 = H + z^2, \quad \alpha = a(\rho_1\nu)^{-1} \end{aligned}$$

В формуле (1.7) путь интегрирования  $(-\infty, +\infty)$  заменен в соответствии с принципом излучения на контур  $C$ , идущий по вещественной оси комплексной плоскости  $m$  и обходящий вещественные полюса подынтегральной функции по малым полуокружностям, на которых  $\text{Re } im > 0$ .

Асимптотическое поведение интеграла (1.7) при  $|x| \rightarrow \infty$  определяется полюсами подынтегральной функции. Анализ показал, что они простые, лежат на вещественной и мнимой осях, расположены симметрично относительно точки  $m=0$ , при этом вещественных полюсов может быть только конечное число. Критерий определения их количества следующий. Пусть  $v_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) — занумерованные в порядке убывания ( $v_1 > v_2 > \dots$ ,  $\lim_n v_n = 0$ ) значения  $v$ , для которых  $m=0$  является полюсом функции  $m\Delta_1\Delta^{-1}$ . Тогда при  $v > v_1$  вещественные полюсы отсутствуют, при  $v_{n+1} < v < v_n$  существует  $n$  положительных полюсов ( $k > 0$ ). Занумеруем положительные полюсы в порядке убывания:  $m_1 > \dots > m_n > 0$ . Можно показать, что при  $n \geq 2$  для  $m_s$  справедливы оценки

$$(1.9) \quad m_0 < m_1 < g\nu^{-2}, \quad 0 < m_s < m_0 \quad (2 \leq s \leq n, \quad m_0 = (gk\nu^{-2} - ^{1/4}k^2)^{1/2})$$

Пусть  $v_{n+1} < v < v_n$ . Вычисляя интеграл (1.7) с помощью теории вычетов и леммы Жордана, окончательно для  $w(x, z)$  получим представление

$$(1.10) \quad w = \theta(x) \sum_{s=1}^n w_s(z) \cos m_s x + w_0(x, z) \quad (|x| > l)$$

$$w_s = -2\sqrt{2\pi}\alpha m_s f^*(m_s) \Delta_1(m_s, z) [\Delta'(m_s)]^{-1}$$

где  $w_0$  — нечетная функция  $x$ , экспоненциально стремящаяся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $\theta$  — функция Хевисайда. При  $v > v_1$  незатухающего волнового движения не возникает. Представление для  $u(x, z)$ , получаемое из уравнения неразрывности и формул (1.10), имеет вид

$$(1.11) \quad u = \theta(x) \sum_{s=1}^n u_s(z) \sin m_s x + u_0(x, z) \quad (|x| > l, u_s = -m_s^{-1} w_{sz})$$

где  $u_0$  — четная функция  $x$ , экспоненциально стремящаяся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Таким образом, за перемещающейся полосой давлений при  $v < v_1$  в общем случае образуется незатухающий волновой след, который является суммой конечного числа прогрессивных волн, распространяющихся с одинаковой фазовой скоростью  $v$ . Вывод о конечности числа прогрессивных волн в рамках модели Лонга известен [9].

Значения  $v = v_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) особые для линейной задачи. В случае нелинейных длинных волн устано-

вившегося вида значениям  $v$ , близким к  $v_n$ , в нелинейной задаче чение  $v = v_n$  резонансно для  $n$ -й волны [7, 8].

2. Проведем анализ зависимости элементов отдельных волн в формулах (1.9), (1.10) от параметров задачи и поведения их амплитуд  $u_s$ ,  $w_s$  по переменной  $z$ .

Из формул (1.7), (1.8) для нахождения величин  $v_n$  получаем уравнение

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \kappa &= ab^{-1} \kappa \\ a &= 1 - \nu(\delta_1 + \delta_2), \quad b = \nu[1 + 1/2 \varepsilon(\delta_1 + \delta_2)] - \varepsilon \nu^2 \delta_1 \delta_2 - 1/2 \varepsilon \\ \delta_1 &= h_1 h_2^{-1}, \quad \delta_2 = h_3 h_2^{-1}, \quad \varepsilon = k h_2, \quad \nu = g h_2 v^{-2}, \quad \kappa = (\nu \varepsilon^{-1/4} \varepsilon^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Значение  $v_1$  можно найти из (2.1) в форме ряда по целым положительным степеням  $\varepsilon$ . Окончательное выражение для  $v_1$  имеет вид

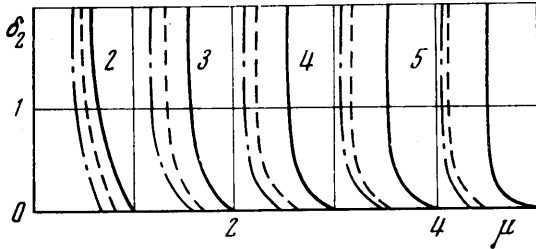
$$(2.2) \quad v_1 = (gH)^{1/2} (1 - \varepsilon \beta + O(\varepsilon^2)), \quad \beta = \frac{1 + 3\delta_1 + 3\delta_2}{12(1 + \delta_1 + \delta_2)^2}.$$

Из формулы (2.2) следует, что незатухающее волновое движение возникает только для значений  $v$ , несколько меньших, но близких к скорости распространения длинных волн ( $0 < \beta < 0.1$  при  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ ).

Величины  $v_n$  ( $n \geq 2$ ) в общем случае удается найти только численно. При  $h_1 = 0$  приближенные решения уравнения, найденные по методу последовательных приближений, имеют вид [6]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} v_n &= \sqrt{g h_2 \varepsilon} \omega_n^{-1} \\ \omega_2 &= \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\delta_2 (\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \pi \delta_2)], \\ \omega_n &= (n-1) \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} [(n-1) \pi \delta_2] \quad (n > 2) \end{aligned}$$

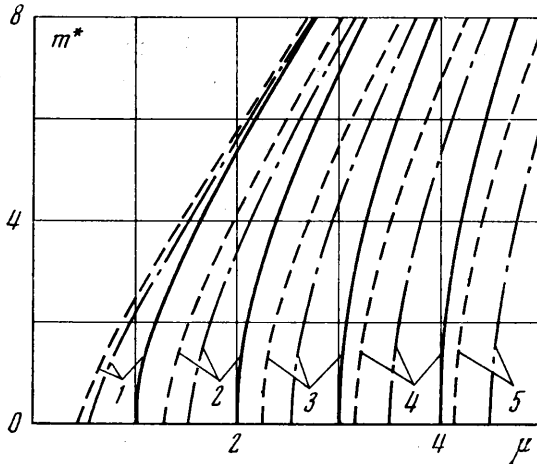
В приближении Буссинеска асимптотические по  $n$  выражения для  $v_n$  получены в работе [10]. В общем случае пространство параметров можно разбить на области  $G_n$ , для которых незатухающее с расстоянием



Фиг. 1

волновое движение складывается из  $n$  прогрессивных волн. На фиг. 1 в плоскости параметров  $\mu = \sqrt{gh_2 \varepsilon} (\pi v)^{-1}$ ,  $\delta_2$  показаны границы областей  $G_n$  ( $n=2 \div 5$ ) для  $\varepsilon = 10^{-2}$  и значений  $\delta_1 = 0, 0.2, 0.6$  (соответственно сплошная, пунктирная и штрихпунктирная линии). Границы областей  $G_n$ , при  $\delta_2 \geq 2$  слабо зависят от  $\mu$ , при  $\delta_1 = 0$  они описываются формулами (2.3).

Из фиг. 1 видно, что  $v_n$  возрастают при увеличении  $h_1, h_3$ . Более детальный анализ показал, что  $v_n$  ( $n \geq 2$ ) возрастают также при увеличении



Фиг. 2

ров задачи. Безразмерные волновые числа  $m_n^* = m_n h_2$  ( $n \geq 2$ ) находились из уравнения (1.8) методом деления интервала пополам с абсолютной погрешностью, меньшей  $10^{-7}$ . На фиг. 2 приведены зависимости  $m_n^*$  ( $n \geq 2$ ) от  $\mu$  для  $\varepsilon = 10^{-2}$  и таких значений  $\delta_1$  и  $\delta_2$ :  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  (сплошная линия),  $\delta_1 = 0, \delta_2 = 10$  (пунктирная линия),  $\delta_1 = 0.2, \delta_2 = 10$  (штрихпунктирная линия). Группе кривых под номером  $s$  ( $s=1 \div 5$ ) соответствует волновое число  $m_{s+1}^*$ . В переменных  $\mu, \delta_1, \delta_2, \varepsilon$  зависимость  $m_s^*$  от

$h_2$  и  $\varepsilon$ . В переменных  $\mu, \delta_2, \varepsilon$  границы областей  $G_n$  ( $n \geq 2$ ) практически не зависят от  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \leq 10^{-2}$ ), и поэтому величины  $v_n$  ( $n \geq 2$ ) с большой степенью точности можно считать пропорциональными  $\sqrt{\varepsilon}$ . Характерные значения  $v_n$  (мсек $^{-1}$ ) для  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $h_2 = 100$  м и ряда величин  $h_{1,3}$  (м) даны в табл. 1. Последняя строка таблицы показывает, что для глубоко лежащего неоднородного слоя значение  $v_2$  может быть достаточно большим. Проанализируем зависимость длин волн  $\lambda_n = 2\pi m_n^{-1}$  от парамет-

Таблица 1

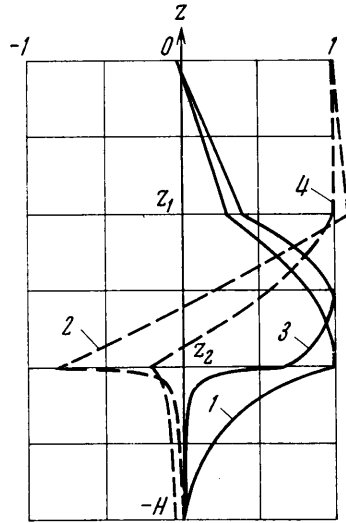
$h_1$	$h_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
0	$2 \cdot 10^2$	54.2	1.70	0.65	0.39	0.28
	$2 \cdot 10^3$	143	1.95	0.66	0.40	0.28
20	$2 \cdot 10^2$	56.0	1.99	0.76	0.45	0.31
	$2 \cdot 10^3$	144	2.32	0.77	0.45	0.31
$10^2$	$2 \cdot 10^2$	62.6	2.75	0.88	0.48	0.33
	$2 \cdot 10^3$	147	3.49	0.91	0.49	0.33
$10^3$	$10^3$	143	7.05	0.98	0.50	0.33

$\varepsilon$  является слабой ( $0 < \varepsilon \leq 10^{-2}$ ). Из фиг. 2 следует, что длины волн  $\lambda_n$  ( $n \geq 2$ ) уменьшаются при увеличении  $h_1, h_3, \varepsilon$  и уменьшении  $v$ . Анализ показал, что  $\lambda_n$  уменьшаются также при увеличении толщины среднего слоя, если значения остальных параметров фиксированы. Все кривые

$m_n^*$  ( $n \geq 2$ ), как функции  $\mu$ , имеют общую асимптоту  $m^* = \mu$  для любых  $\delta_{1,2} \geq 0$ .

Пусть  $v < v_1$ ,  $\varepsilon = 0$ . Тогда в формулах (1.10), (1.11) все слагаемые, кроме первого, пропадают. В этом случае функции  $|u_1|$ ,  $|w_1|$  монотонно возрастают при увеличении  $z$  (однородная жидкость) и своих максимальных значений достигают на свободной поверхности ( $z=0$ ). При  $\varepsilon \neq 0$  отличие  $u_1$ ,  $w_1$ ,  $\lambda_1$  от соответствующих величин в случае  $\varepsilon=0$  мало (численные расчеты для  $0 \leq \varepsilon \leq 10^{-2}$  показали, что возмущение этой волны за счет неоднородности жидкости не превышает 0.1%). Поэтому самую короткую волну можно рассматривать как слабо возмущенную обычную поверхностную волну.

Характер изменения  $u_n(z)$ ,  $w_n(z)$  ( $n \geq 2$ ) качественно различный в однородных и неоднородном слоях. Они имеют  $n-1$  нулей при  $-H < z \leq 0$ . На интервале  $-H < z \leq z_2$   $u_n$ ,  $w_n$  нулей не имеют и монотонно возрастают по абсолютной величине с увеличением  $z$ . Степень затухания скоростей при  $-H < z < z_2$  определяется, что видно из выражения для  $\Delta_1$ , отношением  $\lambda_n h_3^{-1}$ . При этом закон изменения  $w_n(z)$  близок к линейному, а  $u_n(z)$  почти постоянна, если  $\lambda_n h_3^{-1} \gg 1$ ;  $u_n$ ,  $w_n$  при  $\lambda_n h_3^{-1} \ll 1$  затухают с глубиной по экспоненциальному закону. Случай  $\lambda_n h_3^{-1} \gg 1$  реализуется для значений  $v$ , близких, но меньших  $v_n$ , противоположное неравенство — при  $v \rightarrow +0$ . Аналогичные выводы можно сделать и относительно поведения  $u_n$ ,  $w_n$  в верхнем слое, заменив  $\lambda_n h_3^{-1}$  на  $\lambda_n h_1^{-1}$ . Значение  $|w_n(0)|$  более чем в  $10^2$  раз меньше  $\max_z |w_n|$ ,



Фиг. 3

принимаемого  $|w_n|$  внутри неоднородного слоя. Функция  $w_n(z)$  (во всяком случае, при  $h_1 \geq 20$  м,  $h_2 \geq 50$  м,  $h_3 \geq 0$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 10^{-2}$ ) имеет один нуль в верхнем слое, расположенный у свободной поверхности;  $u_n(z)$  нулей в верхнем слое не имеет.

На фиг. 3 для  $H=2 \cdot 10^3$  м,  $h_1=20$  м,  $h_2=100$  м,  $\varepsilon=10^{-2}$  представлены профили  $w_2(z)$  (кривые 1, 3) и  $u_2(z)$  (кривые 2, 4), нормированные соответственно на величины  $\theta_1 = \max w_2(z)$ ,  $\theta_2 = u_2(0)$ . Для кривых 1 и 2  $v=2.2$  м·сек<sup>-1</sup>,  $\lambda_2 h_1^{-1}=108.5$ ,  $\lambda_2 h_3^{-1} =$

$= 2.1$ , для 3, 4 эти величины равны 1.2, 18.1, 0.2. Как видно, в обоих случаях отношение  $\lambda_2 h_1^{-1}$  достаточно велико, поэтому при  $z_1 \leq z \leq 0$   $w_2$  изменяется по закону, близкому к линейному, а амплитуда  $u_2(z)$  почти постоянна. При уменьшении  $v$  происходит смещение положений экстремумов и нулей функций  $u_2$ ,  $w_2$  вверх, значения  $|w_2(z_i)| \theta_1^{-1}$  уменьшаются,  $|u_2(z_i)| \theta_2^{-1}$  возрастают ( $i=1, 2$ ). Численный анализ показал, что аналогичная деформация профилей  $u_s$ ,  $w_s$  ( $2 \leq s \leq n$ ) происходит также при увеличении  $\varepsilon$  и  $h_3$ .

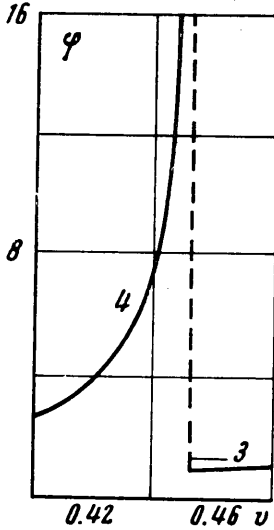
Из проведенного анализа амплитуд  $u_n(z)$ ,  $w_n(z)$ , следует, что в формулах (1.10), (1.11) волны с номерами  $n \geq 2$ , обусловленные неоднородностью жидкости, являются типичными внутренними волнами, амплитуды скоростей которых достигают своих экстремальных значений в неоднородном слое.

Введем величины

$$A_n = \max |w_n(z)|, \quad B_n = \max |u_n(z)|, \quad (-H \leq z \leq 0)$$

Анализ формул (1.10), (1.11) показал, что значения  $A_1, B_1$  достигаются при  $z=0$ ,  $B_2$  — при  $z=z_1$ ,  $A_n, B_{n+1} (n \geq 2)$  при  $z_2 \leq z \leq z_1$ . Величины  $A_1, B_1$ , как отмечалось выше, близки к найденным в случае однородной жидкости. Для значений  $v$  вне некоторой окрестности  $v=v_1$  волновое число  $m_1$  с большой степенью точности равно  $gv^{-2}$ , отношение  $B_1 A_1^{-1}$  близко к единице. Этот случай имеет место для  $v < 0.2 v_1$ , а поэтому в широком диапазоне параметров будет выполняться при  $v < v_2$ .

Для внутренних волн величины  $\varphi_n = B_n A_n^{-1} (n \geq 2)$  как функции  $v$  определены на интервалах  $(0, v_n)$  и монотонно возрастают. При этом все  $A_n$  ограничены в окрестности точки  $v=v_n$ , величины  $B_n, \varphi_n, \lambda_n$  при  $v \rightarrow v_n - 0$  неограниченно возрастают. Таким образом, значение  $v=v_n$  резонансно для  $n$ -й волны.



Фиг. 4

На фиг. 4 для  $h_1=20$  м,  $h_2=100$  м,  $H=2 \cdot 10^3$  м и  $\varepsilon=10^{-2}$  показаны кривые  $\varphi_n = \varphi_n(v)$ , соответствующие резонансным волнам с номерами  $n=3, 4$ . Отсюда видно, что для значений  $v$ , близких, но меньших  $v_n$ , амплитуда горизонтальной скорости, соответствующей  $n$ -й волне, существенно больше амплитуды вертикальной скорости (длинные волны); для  $v$ , близких, но больших  $v_n$ , эти амплитуды одного порядка. При  $v \rightarrow 0$  имеем  $A_n + B_n \rightarrow 0$ , поэтому с уменьшением скорости перемещения возмущающих давлений волновое движение, описываемое  $n$ -й волной, затухает.

Выше отмечалось, что значения  $v=v_n$  являются особыми для линейной задачи: при  $v \rightarrow v_n - 0$  имеем  $B_n \rightarrow +\infty$ ,  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Представляет интерес оценка длин интегралов  $(v_{1n}, v_n)$ , для которых полученное решение линейной задачи будет недостаточно хорошим для описания внутренних волн. Предположим, что условие

$$(2.4) \quad A_n + B_n < 5 \cdot 10^{-2} \quad (a(\rho_1 g)^{-1} = 1)$$

является достаточным для применимости линейной теории. Введем величины  $\Delta v_n = v_n - v_{1n}$ ,  $\tau_n = \Delta v_n (v_n - v_{n+1})^{-1}$ , где  $v_{1n}$  таковы, что для  $0 \leq v \leq v_{1n}$  выполняется условие (2.4).

Для функции  $f(x)$  вида

$$(2.5) \quad f(x) = \cos [\pi x (2l)^{-1}] \quad (|x| < l), \quad f(x) = 0, \quad (|x| < l)$$

и  $l=10^4$  м в случае, рассмотренном выше (фиг. 4),  $\tau_n < 0.1$ ,  $\tau_n < 0.08$  ( $n=3, 4, 5$ ). Поэтому для значений  $v$  вне малых окрестностей  $v=v_n$  ( $n=2 \div 5$ )

Таблица 2

$h_1$	$h_2$	$v$	$c_1$	$d_1$	$c_2$	$d_2$	$c_3$	$d_3$	$c_4$	$d_4$	$n$
20	150	0.6	19.6	7.0	9.6	7.4	9.3	9.3	12.8	0.2	3
		0.4	36.1	22.3	27.0	22.7	26.4	26.4	32.7	11.6	4
		0.2	26.5	2.3	24.8	23.8	25.7	25.7	29.3	15.3	7
		0.6	25.8	8.4	14.6	10.0	14.1	14.4	19.1	0.4	3
20	100	0.4	10.2	2.2	5.0	3.1	5.8	4.8	6.2	1.2	4
		0.2	22.9	11.7	15.2	15.1	21.6	15.9	19.0	6.9	6
		0.6	5.3	2.3	2.0	1.8	2.0	2.0	2.7	0	3
50	100	0.4	17.1	5.1	12.1	11.3	12.0	12.0	14.6	3.3	4
		0.2	14.4	5.6	10.4	10.4	10.4	10.4	10.4	12.1	5.4

можно ожидать, что нелинейные эффекты будут слабыми. Для последующих  $n$  условие (2.4) необходимо заменить более точным: величины  $v_n$  становятся малыми, а в линейной теории предполагается, что амплитуды скоростей возмущенного движения малы по сравнению с  $v$ .

3. Незатухающее с расстоянием волновое движение на достаточном удалении от области приложения возмущающих давлений является конечной суммой прогрессивных волн разных длин и амплитуд. Провести полный анализ такого неперриодического движения в общем случае не удается. Ряд его характерных свойств можно установить численно. При расчетах функция  $f(x)$  задавалась в виде (2.5).

Таблица 3

$h_3$	$A_0$	$A_1$	$z^*$	$a_1$	$a_2$
80	0.256	5.076	58	0.092	0.165
100	0.691	5.076	58	0.248	0.451
120	0.959	5.077	58	0.343	0.629
200	1.078	5.077	59	0.385	0.709
300	1.081	5.077	59	0.386	0.711
400	1.081	5.077	59	0.386	0.711

Вклад отдельных волн в полное движение различных.

Для оценки вклада  $s$ -й внутренней волны в поле скорости возмущенного движения введем функции  $\alpha_s(z)$ ,  $\beta_s(z)$  и величины  $c_1$ ,  $c_4$ ,  $d_1$ ,  $d_4$  по формулам

$$(3.1) \quad \alpha_s = \frac{10^2(A - |w_s|)}{A}, \quad \beta_s = \frac{10^2(B - |u_s|)}{B}$$

$$c_1 = \frac{10^2 \min A}{A_0}, \quad d_1 = \frac{10^2 \min B}{B_0},$$

$$c_4 = \frac{10^2(A_0 - A_n)}{A_0}, \quad d_4 = \frac{10^2(B_0 - B_n)}{B_0}$$

$$A = \sum_{s=2}^n |w_s(z)|, \quad B = \sum_{s=2}^n |u_s(z)|,$$

$$A_0 = \max_z A, \quad B_0 = \max_z B, \quad v_{n+1} < v < v_n$$

Функции  $A(z)$  и  $B(z)$  дают равномерные по  $x$  оценки сверху для скоростей  $w(x, z)$  и  $u(x, z)$  незатухающего с расстоянием волнового движения. Величины  $c_4$ ,  $d_4$  характеризуют возмущение экстремальных значений  $w_n(z)$  волнами с такими номерами  $k$ , что  $2 \leq k < n$ .

Таблица 4

$h_1$	$A_0$	$A_1$	$a_1$	$a_2$
20	4.936	6.629	2.997	4.035
50	2.952	6.629	2.363	2.443
10 <sup>2</sup>	0.442	6.628	0.367	0.366
3 · 10 <sup>2</sup>	0.001	6.628	0.001	0.001

В табл. 2 для ряда значений  $h_1$ ,  $h_2$  (м),  $v$  (м·сек<sup>-1</sup>) и  $H = 2 \cdot 10^3$  м,  $\epsilon = 10^{-2}$  представлены величины  $c_1$ ,  $d_1$ ,  $c_2 = \alpha_n(z_1)$ ,  $d_2 = \beta_n(z_1)$ ,  $c_3 = \alpha_n(z_2)$ ,  $d_3 = \beta_n(z_2)$ ,  $c_4$ ,  $d_4$ . Отсюда видно, что наибольший вклад в волновое движение внутри жидкости дает, вообще говоря, волна наибольшей длины ( $n$ -я при  $v_{n+1} < v < v_n$ ). Вклад остальных волн в

волновое движение в данных случаях не превышает 37%. Поэтому особое значение для описания распределения амплитуд скоростей по  $z$  имеют величины  $v_n$ , поскольку при изменении знака  $v - v_n$  доминирующая волна за-

меняется другой и характер изменения амплитуд по глубине становится качественно иным (количество узловых точек и экстремумов для данной точки  $x$  обычно изменяется).

Рассмотрим величины  $A_0, B_0$  как функции  $v$ . Наличие резонансных значений приводит к тому, что характер изменения  $A_0, B_0$  для  $v$ , близких к  $v_n (v < v_n)$ , определяется величинами  $A_n, B_n$ . Поэтому значения  $v = v_n$  являются резонансными для  $u(x, z)$ , а горизонтальное волновое движение для  $v$ , близких к  $v_n (v < v_n)$ , существенно интенсивнее вертикального. Численные расчеты показали, что при уменьшении  $v (v_{n+1} < v < v_n)$   $B_0 A_0^{-1}$  уменьшается (не монотонно), а экстремальные значения амплитуд горизонтальной и вертикальной скоростей становятся величинами одного порядка.

Остановимся на вопросе о зависимости волнового движения от толщины однородных слоев.

Анализ показал, что волновое движение при  $h_3 h_2^{-1} \geq 2.5$  практически не зависит от  $h_3$ . В табл. 3 с точностью до множителя  $10^{-4} a (\rho_1 g)^{-1}$  для ряда значений  $h_3$  (м) и  $v = 1$  мсек $^{-1}$ ,  $h_1 = 20$  м,  $h_2 = 10^2$  м,  $\varepsilon = 10^{-2}$  представлены величины

$$A_1 = A(0) + |w_1(0)|, \quad A_0, a_1 = A(z_1), a_2 = A(z_2), \\ z^* = 10^2 |z_m + h_1| h_2^{-1}$$

где  $z_m$  — точка достижения  $\max_z A(z)$ . Отсюда видно, что при  $h_3 > 120$  м рас-

сматриваемые значения несколько возрастают при увеличении толщины нижнего слоя, но их изменение является малым. Величина  $A_1$  от  $h_3$  практически не зависит.

Амплитуда внутренних волн существенно зависит от толщины верхнего слоя. При увеличении  $h_1$  происходит сильное уменьшение максимально возможных амплитуд внутренних волн, что объясняется удалением неоднородного слоя от свободной поверхности, к которой приложены возмущающие давления. В табл. 4 с точностью до множителя  $10^{-5} a (\rho_1 g)^{-1}$  для  $v = 0.6$  м·сек $^{-1}$ ,  $h_2 = 10^2$  м,  $H = 2 \cdot 10^3$  м,  $\varepsilon = 10^{-2}$  и ряда значений  $h_1$  (м) представлены величины, аналогичные рассмотренным в табл. 3. Отсюда видно, что для  $h_1 = 300$  м амплитуда внутренних волн уменьшается более чем в  $10^3$  раз по сравнению со случаем  $h_1 = 20$  м.

Поступила 24 VII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Срегенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., ОНТИ, 1936.
2. Стокер Д. Д. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Войт С. С. Образование волн давлениями, приложенными к поверхности текущей жидкости. Тр. МГИ АН УССР, 1963, т. 27.
4. Букалов А. Е., Черкесов Л. В. Внутренние волны от периодических поверхностных возмущений. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1971, т. 7, № 8.
5. Доценко С. Ф., Черкесов Л. В. Генерация внутренних волн перемещающейся областью давлений. Сб. «Морские гидрофизические исследования», 1971, вып. 6 (56).
6. Доценко С. Ф. Внутренние волны от движущихся возмущений в море с неоднородным верхним слоем. Сб. «Морские гидрофизические исследования», 1972, вып. 1 (57).
7. Тер-Крикоров А. М. О внутренних волнах в неоднородной жидкости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
8. Тер-Крикоров А. М. К теории волн установившегося типа в неоднородной жидкости. ПММ, 1965, т. 29, № 3.
9. Long R. R. Some aspects of the flow of stratified fluids. I. A theoretical investigation. Tellus, 1953, vol. 5, No. 1.
10. Keller J. B., Munk W. H. Internal wave wakes of a body moving in a stratified fluid. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 6.