

УДК 532.517.4:532.542.4

ПОРОЖДЕНИЕ И НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ ВЯЗКАЯ ДИССИПАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ

А. П. ИВАНОВ

(Ленинград)

Существующая информация о порождении и вязкой диссипации турбулентной энергии, как правило, основана на опытных данных Лауфера, полученных для течения жидкости в круглых трубах при двух числах Рейнольдса ($5 \cdot 10^5$ и $5 \cdot 10^4$).

В данной статье приводятся расчетные зависимости для порождения и вязкой диссипации турбулентной энергии, единые по всему сечению потока и для всего диапазона изменения чисел Рейнольдса. Уравнение баланса осредненной энергии при течении жидкости в круглой трубе и плоском канале решается с учетом уравнения движения и полученного автором профиля турбулентного трения [1].

Расчетные зависимости удовлетворяют всем очевидным граничным условиям, согласуются с опытными данными Лауфера [2] и дают обоснованный переход к предельным формам осредненного турбулентного движения.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарный турбулентный поток несжимаемой жидкости в круглой трубе и плоском канале постоянного поперечного сечения размером $2r_0$. Течение симметричное и однородное относительно продольной оси x . Осредненные значения скорости U и одноточечной корреляции продольной u и поперечной v турбулентных пульсаций зависят только от r . Ось r направлена от оси потока, ось y — от стенки. Для такого потока уравнение движения имеет вид

$$(1.1) \quad -\frac{r}{r_0} \rho v_*^2 = \mu \frac{dU}{dr} - \rho \langle uv \rangle \quad \left(\rho v_*^2 = \tau_0 = -\frac{r_0}{2} \frac{dp}{dx} \right)$$

где ρ , μ — плотность и динамический коэффициент вязкости жидкости, p — давление, τ_0 — напряжение сдвига на стенке, v_* — динамическая скорость.

Турбулентное трение $-\rho \langle uv \rangle$ в соответствии с [1] определяется по формуле

$$(1.2) \quad \frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} = (1-\eta) \exp \left[-\frac{\eta_*^2(1-\eta)}{(1-\eta_*)\eta} \right] \quad \left(\eta = 1 - \frac{r}{r_0} = \frac{y}{r_0} \right)$$

В точке $\eta = \eta_*$ турбулентное трение имеет максимальное значение.

Умножая (1.1) на dU/dr , получаем уравнение баланса осредненной энергии в безразмерной форме

$$(1.3) \quad \frac{rv}{r_0 v_*^2} \frac{dU}{dr} = \frac{v}{v_*^4} \langle uv \rangle \frac{dU}{dr} - \frac{v^2}{v_*^4} \left(\frac{dU}{dr} \right)^2, \quad \langle uv \rangle \frac{dU}{dr} = \Pi_*$$

$$\frac{v}{v_*^4} \langle uv \rangle \frac{dU}{dr} = \Pi, \quad v \left(\frac{dU}{dr} \right)^2 = D_*, \quad \frac{v^2}{v_*^4} \left(\frac{dU}{dr} \right)^2 = D$$

Здесь Π_* , Π — порождение турбулентной энергии рейнольдсовыми напряжениями; D_* , D — непосредственная вязкая диссипация вследствие наличия градиента осредненной скорости; v — кинематический коэффициент вязкости.

2. Порождение и вязкая диссипация турбулентной энергии. Подставляя в уравнение (1.3) значение dU/dr из (1.1), получим для порождения тур-

булентной энергии

$$(2.1) \quad \Pi = \frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} \left(\frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} - \frac{r}{r_0} \right) = \frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} \left[\frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} - (1-\eta) \right]$$

а для непосредственной вязкой диссипации

$$(2.2) \quad D = \left(\frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} - \frac{r}{r_0} \right)^2 = \left[\frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} - (1-\eta) \right]^2$$

С учетом (1.2) получаем

$$(2.3) \quad \Pi = (1-\eta)^2 \left\{ \exp \left[-\frac{2\eta_*^2(1-\eta)}{(1-\eta_*)\eta} \right] - \exp \left[-\frac{\eta_*^2(1-\eta)}{(1-\eta_*)\eta} \right] \right\}$$

$$(2.4) \quad D = (1-\eta)^2 \left\{ \exp \left[-\frac{\eta_*^2(1-\eta)}{(1-\eta_*)\eta} \right] - 1 \right\}^2$$

В непосредственной близости от стенки, т. е. при $\eta \ll 1$

$$(2.5) \quad \Pi = \exp \left[-\frac{2\eta_*^2}{(1-\eta_*)\eta} \right] - \exp \left[-\frac{\eta_*^2}{(1-\eta_*)\eta} \right],$$

$$D = \left\{ \exp \left[-\frac{\eta_*^2}{(1-\eta_*)\eta} \right] - 1 \right\}^2$$

Если движение происходит при достаточно больших числах Рейнольдса, то $\eta_* \ll 1$ и в непосредственной близости от стенки

$$(2.6) \quad \Pi = \exp \left(-\frac{2\eta_*^2}{\eta} \right) - \exp \left(-\frac{\eta_*^2}{\eta} \right), \quad D = \left[\exp \left(-\frac{\eta_*^2}{\eta} \right) - 1 \right]^2$$

Из уравнения (1.2) следует, что $\langle uv \rangle = 0$ при $\eta = 0$ и 1. Тогда из (2.1) следует, что порождение энергии имеет максимум во внутренней области потока. Используя условие для нахождения максимума $d\Pi/d\eta = 0$ при $\eta = \eta^*$, получим уравнение для определения η^*

$$(2.7) \quad \exp \left(-\frac{\eta_*^2}{\eta^*} \frac{1-\eta^*}{1-\eta_*} \right) = 1 - \frac{\eta_*^2(1-\eta^*)}{2\eta_*^2(1-\eta^*) - 2\eta_*^2(1-\eta^*)}$$

Отсюда следует, что максимум энергии располагается ближе к стенке, чем максимум турбулентного трения. Например, при $\eta_* = 0.022$ ($Re_0 = U_0 2r_0/\nu = 5 \cdot 10^5$, U_0 — максимальная скорость) $\eta^* = 0.00071$; при $\eta_* = 0.06$ ($Re_0 = 5 \cdot 10^4$) $\eta^* = 0.0055$; при $\eta_* = 0.8$ $\eta^* = 0.65$.

Максимум порождения энергии определяется по формуле

$$(2.8) \quad \Pi_{\max} = -\frac{\eta_*^2(1-\eta^*)^3 [\eta_*^2(1-\eta^*) - 2\eta_*^2(1-\eta^*)]}{4[\eta_*^2(1-\eta^*) - \eta_*^2(1-\eta^*)]^2}$$

Если воспользоваться уравнением (2.6) для определения Π_{\max} , то получаем $\exp(\eta_*^2/\eta^*) = 2$, откуда $\eta^* = \eta_*^2/\ln 2$, и если привянуть по [1] $\eta_* = 6.6(Re)^{-0.44}$, то $\eta^* = 62.8(Re)^{-0.88}$. Тогда из (2.6) получаем

$$(2.9) \quad \Pi_{\max} = -0.25 \quad \text{или} \quad \Pi_{*\max} = -v_*^4/4\nu$$

Это же значение максимума порождения энергии получается и в том случае, если для течения вблизи стенки среднее значение касательного напряжения τ принять постоянным и равным напряжению трения на стенке $\tau_0 = \rho v_*^2$. Тогда вместо (1.1) имеем [3]

$$(2.10) \quad -\rho v_*^2 = \mu \frac{dU}{dr} - \rho \langle uv \rangle$$

Составляя, как и выше, уравнение баланса энергии, после его исследования получим условие (2.9). При этом в точке $\eta = \eta^*$ найдем, что турбулентное трение равно вязкому трению

$$-\rho \langle uv \rangle = \mu dU/dr = -\tau_0/2 = -1/2 \rho v_*^2$$

Значение Π_{\max} , определяемое формулой (2.9), получается и из уравнения (2.8) при условиях

$$\eta_* \ll 1, \quad \eta^* \ll 1, \quad 2\eta_*^2 \ll \eta_*^2$$

Эти условия выполняются только при очень больших числах Рейнольдса. Следовательно, значение $\Pi_{\max} = -0.25$ можно рассматривать как максимальную величину порождения энергии. Учитывая, что η_* и η^* зависят от числа Рейнольдса, Π_{\max} , определяемое по (2.8), будет удовлетворять условию $|\Pi_{\max}| \leq 0.25$.

Вязкая диссипация достигает наибольшего значения на стенке, что следует из (2.4) и (2.5). При этом если $\eta = 0$, то $D_{\max} = 1$ или $D_{*\max} = v_*^4/\nu$.

Если пользоваться уравнением (2.10), то при его исследовании получаем, что в точке $\eta = \eta^*$, где достигается значение Π_{\max} , вязкая диссипация имеет ту же величину, что и производство энергии

$$(2.11) \quad D = 0.25 \quad \text{или} \quad D_* = v_*^4/4\nu$$

Такой же результат получается и из (2.6), если в точке $\eta = \eta^*$ принять $\exp(\eta_*^2/\eta^*) = 2$. В литературе обычно приводятся условия (2.9) и (2.11) [2, 3]. Однако следует иметь в виду, что эти условия являются приближенными и не учитывают зависимости η_* и η^* от числа Рейнольдса. Хорошее совпадение условий (2.9) и (2.11) с опытными данными Лауфера [2] объясняется тем, что опыт проводился при достаточно большом числе Re. Если же обратиться к полному уравнению (2.4) для D , то из него с учетом (2.7) следует, что в точке $\eta = \eta^*$ значение D будет определяться формулой

$$D = \frac{\eta_*^4(1-\eta^*)^4}{4[\eta_*^2(1-\eta^*) - \eta_*^2(1-\eta^*)]^2}$$

которая в общем случае не совпадает с формулой (2.8) для Π_{\max} .

Отношение D/Π , найденное из уравнений (2.3) и (2.4), имеет вид

$$\frac{D}{\Pi} = 1 - \exp\left(\frac{\eta_*^2}{\eta} \frac{1-\eta}{1-\eta_*}\right)$$

Отсюда следует, что вязкая диссипация будет равна порождению энергии при

$$\exp\left(\frac{\eta_*^2}{\eta} \frac{1-\eta}{1-\eta_*}\right) = 2 \quad \text{или в точке} \quad \eta = \frac{\eta_*^2}{\eta_*^2 + (1-\eta_*) \ln 2}$$

которая с увеличением числа Re будет приближаться к точке η^* .

Уместно сравнить полученное значение D с вязкой диссипацией для ламинарного потока. В случае ламинарного режима течения $\langle uv \rangle = 0$. Тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$\nu \frac{dU}{dr} = -\frac{r}{r_0} v_*^2 = -(1-\eta) v_*^2$$

а вязкая диссипация будет определяться по формуле

$$(2.12) \quad D = \frac{\nu^2}{v_*^4} \left(\frac{dU}{dr}\right)^2 = (1-\eta)^2$$

Уравнение (2.12) получается и из (2.2) и (2.4) для диссипации в случае турбулентного течения, если принять в них $\langle uv \rangle = 0$ и $\eta_* = 1$. При этих же условиях из (2.1) и (2.3) получаем $\Pi = 0$. Таким образом, полученные уравнения для Π и D при турбулентном течении удовлетворяют условиям перехода решения к ламинарному течению.

3. Интегральные величины. Среднее значение турбулентного трения по сечению трубы или канала с учетом (1.2) равно

$$(3.1) \quad \left(\frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} \right)_\eta \equiv \int_0^1 \frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} d\eta = \frac{1}{2} + \frac{\eta_*^2}{2(1-\eta_*)} \left[1 + \left(2 + \frac{\eta_*^2}{1-\eta_*} \right) \cdot \exp \left(\frac{\eta_*^2}{1-\eta_*} \right) \text{Ei} \left(-\frac{\eta_*^2}{1-\eta_*} \right) \right]$$

где $\text{Ei}(-\eta_*^2/(1-\eta_*))$ — интегральная показательная функция. При $\eta_* \rightarrow 0$ или $\text{Re} \rightarrow \infty$ значение $\langle uv \rangle/v_*^2 = (1-\eta)$ почти по всему сечению потока, за исключением незначительной области потока около стенки, поэтому из (3.1) получаем

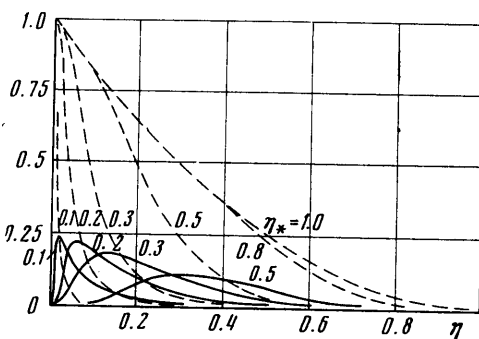
$$(3.2) \quad \left(\frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} \right)_\eta = 1/2 \quad (\eta_* = 0)$$

Аналогично среднее значение турбулентного трения по площади сечения трубы равно

$$(3.3) \quad \left(\frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} \right)_\omega \equiv 2 \int_0^1 \frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} (1-\eta) d\eta = \frac{2}{3} + \frac{a}{3} [5 + a + (6 + 6a + a^2) \cdot \exp(a) \text{Ei}(-a)] \quad \left(a = \frac{\eta_*^2}{1-\eta_*} \right)$$

С учетом замечаний к условию (3.2) из (3.3) получаем

$$(3.4) \quad \left(\frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} \right)_\omega = 2/3 \quad (\eta_* = 0)$$



Фиг. 1

Условия (3.2) и (3.4) будут приближенно выполняться и при умеренно больших числах Re , так как область потока, в которой распределение $\langle uv \rangle/v_*^2$ отклоняется от линейного, и в этом случае будет несущественно влиять на интегральную величину для всего сечения потока.

Суммарное порождение турбулентной энергии будет определяться или ее средним значением по сечению трубы (канала), которое с учетом (2.3) имеет вид

$$(3.5) \quad \Pi_\eta \equiv \int_0^1 \Pi d\eta = \frac{a}{6} [5 + 3a + (3 + 6a + 2a^2) 4 \exp(2a) \text{Ei}(-2a) - (6 + 6a + a^2) \exp(a) \text{Ei}(-a)]$$

или ее средним значением по площади сечения трубы в виде

$$(3.6) \quad \Pi_\omega \equiv 2 \int_0^1 \Pi (1-\eta) d\eta = \frac{a}{12} [26 + 33a + 7a^2 + (3 + 9a + 6a^2 + a^3) \cdot 16 \exp(2a) \text{Ei}(-2a) - (24 + 36a + 12a^2 + a^3) \exp(a) \text{Ei}(-a)]$$

Используя условие (3.2), из уравнения (1.1) получаем

$$(3.7) \quad \frac{\nu}{v_*^2} \int_0^{r_0} \frac{dU}{dr} dr = \int_0^{r_0} \left(\frac{\langle uv \rangle}{v_*^2} - \frac{r}{r_0} \right) dr = 0 \quad (\eta_* = 0)$$

При $\eta_* \rightarrow 1$ происходит вырождение турбулентного трения и

$$\int_0^{r_0} \langle uv \rangle dr = 0 \quad (\eta_* = 1)$$

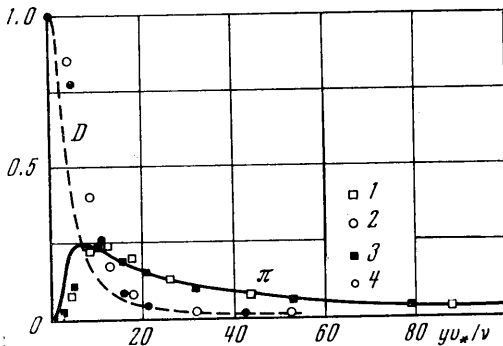
Тогда

$$\int_0^{r_0} \langle uv \rangle \frac{dU}{dr} dr = 0 \quad (\eta_* = 0, \eta_* = 1)$$

Это значит, что суммарное порождение турбулентной энергии имеет максимум при определенном значении η_* или числа Re. Используя условие максимума

$$\frac{d}{da} \int_0^1 \Pi d\eta = 0 \quad (a = a_*)$$

из (3.5) получим уравнение для a_* или η_* , соответствующих максимальному порождению турбулентной энергии



Фиг. 2

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & 11 + 24a_* + 7a_*^2 + (3 + \\ & + 18a_*^2 + 18a_*^2 + \\ & + 4a_*^3) 4 \exp(2a_*) \times \\ & \times \text{Ei}(-2a_*) - \\ & - (6 + 18a_* + 9a_*^2 + \\ & + a_*^3) \exp(a_*) \text{Ei} \cdot \\ & \cdot (-a_*) = 0 \end{aligned}$$

Аналогичное выражение можно получить и для определения максимума порождения энергии по всей площади сечения трубы, используя уравнение (3.6).

Суммарная диссипация энергии будет определяться или ее средним значением по сечению трубы (канала), которое с учетом (2.4) имеет вид

$$(3.9) \quad D_\eta = \int_0^1 D d\eta = \frac{a}{3} [a + (3 + 6a + 2a^2) 2 \exp(2a) \text{Ei}(-2a) - \\ - (6 + 6a + a^2) \exp(a) \text{Ei}(-a)]$$

или ее средним значением по площади сечения трубы в виде

$$D_\omega = 2 \int_0^1 D(1-\eta) d\eta = \frac{a}{6} [a(11 + 3a) + (3 + 9a + 6a^2 + a^3) \cdot \\ \cdot 8 \exp(2a) \text{Ei}(-2a) - (24 + 36a + 12a^2 + a^3) \exp(a) \text{Ei}(-a)]$$

Используя условие (3.7), получаем, что при больших числах Re

$$D_\eta = 0, \quad D_\omega = 0 \quad (\eta_* = 0)$$

При $\eta_* \rightarrow 1$ диссипация будет соответствовать уравнению (2.12). Тогда

$$D_\eta = 1/3, \quad D_\omega = 1/2 \quad (\eta_* = 1)$$

Предлагаемые расчетные зависимости для $\langle uv \rangle$, Π и D удовлетворяют следующим граничным условиям при $\eta = 0$ и 1 , полученным из уравнений движения, баланса энергии, неразрывности, условия прилипания, граничных условий [1] и уравнений (2.1) и (2.2)

$$\langle uv \rangle = 0, \quad \Pi = 0, \quad \frac{d\Pi}{d\eta} = 0, \quad D = 0, \quad \frac{dD}{d\eta} = 0 \quad (\eta = 1, r = 0)$$

$$\langle uv \rangle = 0, \quad \frac{d\langle uv \rangle}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^2\langle uv \rangle}{d\eta^2} = 0, \quad \Pi = 0, \quad \frac{d\Pi}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^2\Pi}{d\eta^2} = 0$$

$$D = 1, \quad \frac{dD}{d\eta} = -2, \quad \frac{d^2D}{d\eta^2} = 2 \quad (\eta = 0, r = r_0)$$

Граничные условия для последующих производных от $\langle uv \rangle$, Π и D не являются строгими.

Из уравнения (1.2) следует, что при любом n

$$d^n \langle uv \rangle / d\eta^n = 0 \quad (\eta = 0)$$

4. Сравнение расчетных и экспериментальных результатов.

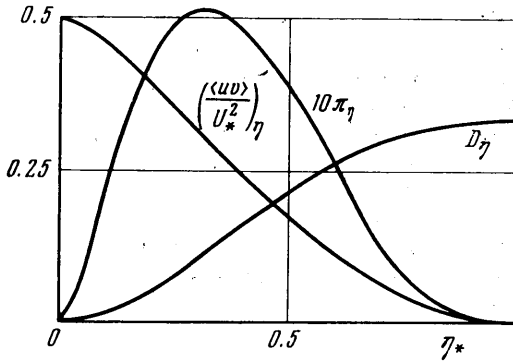
На фиг. 1 представлены графики $\Pi = f_1(\eta)$ (сплошные кривые) и $D = f_2(\eta)$ (пунктирные кривые), построенные по уравнениям (2.3) и (2.4) при некоторых значениях η_* для всего диапазона изменения η . Кривая для D при $\eta_* = 1$ соответствует ламинарному режиму и уравнению (2.12).

В непосредственной близости от стенки графика Π (сплошная кривая) и D (пунктирная кривая) представлены на фиг. 2. Для значений $\eta_* = 0.022, 0.06$ и 0.1 соответствующие графики рассматриваемых величин практически сливаются в одну линию. Условными точками на фиг. 2 представлены

опытные данные Клауфера [2] при числах Рейнольдса $Re_0 = U_0 2r_0 / \nu = 5 \cdot 10^5$ и $5 \cdot 10^4$, где U_0 — максимальная скорость в сечении потока. Цифры 1 и 2 соответствуют значениям Π и D при $Re_0 = 5 \cdot 10^5$, а цифры 3 и 4 — значениям Π и D при $Re_0 = 5 \cdot 10^4$. Связь между yv^*/ν и η имеет вид

$$\frac{yv^*}{\nu} = 8750\eta \quad (Re_0 = 5 \cdot 10^5), \quad \frac{yv^*}{\nu} = 1150\eta \quad (Re_0 = 5 \cdot 10^4)$$

При указанных числах Re_0 максимальное значение $\langle uv \rangle$ имеет место в точках $\eta_* \approx 0.022$ и 0.06 или соответственно при $yv^*/\nu = 193$ и 69 . Из фиг. 2 следует, что совпадение расчетных графиков с опытными данными вполне удовлетворительное. Некоторое расхождение наблюдается только при $yv^*/\nu < 15$ или при $\eta < 0.002$ для $Re_0 = 5 \cdot 10^5$ и $\eta < 0.015$ для $Re_0 = 5 \cdot 10^4$. При этом следует иметь в виду, что опытные значения около самой стенки,



Фиг. 3

полученные с помощью термоанемометра, могут содержать существенную погрешность.

На фиг. 3 представлены графики средних по радиусу значений турбулентного трения $(\langle uv \rangle / v_*^2)_\eta$, порождения Π_η и вязкой диссипации D_η в зависимости от параметра η_* , построенные по уравнениям (3.1), (3.5) и (3.9). Значениям $0 \leq \eta_* \leq 1$ соответствует весь диапазон изменения чисел Рейнольдса при турбулентном режиме.

Численные значения рассматриваемых величин для больших чисел Re приведены в таблице.

η_*	η^*	Re_0	Π_{\max}	$\left(\frac{\langle uv \rangle}{U_*^2}\right)_\eta$	Π_η	Π_ω	D_η	D_ω
0.022	$7.1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^5$	0.2496	0.497	$-2.4 \cdot 10^{-3}$	$-4.54 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$	$1.36 \cdot 10^{-3}$
0.06	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^4$	0.2464	0.483	$-1.1 \cdot 10^{-2}$	$-2.02 \cdot 10^{-2}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-2}$

Из таблицы следует, что при $Re_0 > 10^4$ значение Π_{\max} близко к его наибольшему значению -0.25 .

Из фиг. 1 и 2 следует, что при $Re_0 > 10^4$ почти все порождение и вся непосредственная диссипация турбулентной энергии сосредоточены в узкой области около стенки.

С уменьшением чисел Re или с увеличением η_* непосредственная вязкая диссипация увеличивается и приближается к ее значению при ламинарном режиме движения.

Максимум порождения турбулентной энергии с уменьшением чисел Re уменьшается, но область потока, в которой существенно порождение, сначала увеличивается, а затем, как и в случае с турбулентным напряжением [1], происходит ее вырождение (фиг. 1).

Суммарное порождение Π_η имеет наибольшее значение при $\eta_* \approx 0.3$ (фиг. 3), что соответствует уравнению (3.8). При этом $\Pi_{\eta \max} = 0.051$, $\Pi_{\omega \max} = 0.0786$.

Из приведенных графиков следует, что полученные зависимости вполне соответствуют основным представлениям об осредненном турбулентном потоке жидкости в трубах и каналах во всем диапазоне изменения чисел Рейнольдса.

Поступила 10 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. П. Турбулентное трение для течения жидкости в трубах и каналах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
2. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NASA T. Rept., 1954, No. 1174.
3. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1967.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.