УДК 532.253

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ БОНДА

Л. С. СРУБЩИК, В. И. ЮДОВИЧ

(*Ростов-на-Дону*)

В ряде работ [1-5] методы пограничного слоя были применены к решению задач о равновесии и движении жидкости с поверхностным натяжением в сильном поле тяжести (при больших числах Бонда Во).

В настоящей статье эти методы применяются к задачам о форме равновесия равномерно вращающейся жидкости, заключенной в цилиндрическом сосуде произвольного сечения или в сосуде, представляющем собой поверхность вращения вокруг оси z. Обе задачи сводятся к асимптотическому интегрированию уравнения с малым параметром при квазилинейном эллиптическом операторе с нелинейным краевым условием. Во втором случае в силу радиальной симметрии уравнение задачи переходит в обыкновенное, однако граница смачивания заранее неизвестна. Наряду с формой равновесия она также определяется асимптотически.

1. Уравнения и краевые условия. Пусть цилиндрический сосуд с плоским дном $Z=0$ вместе с заполняющей его жидкостью вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси z. Тогда задача об определении формы свободной поверхности жидкости с поверхностным натяжением в однородном гравитационном поле сводится к решению квазилинейного эллиптического уравнения [6, 2] с нелинейным краевым условием

$$\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(pH)+\frac{\partial}{\partial y}(qH)\right]-u+\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)=0 \tag{1.1}$$

$$p=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$H=(1+p^2+q^2)^{-1/2},\qquad \zeta=C+u,\qquad \int\limits_\Omega \zeta\,dx\,dy=V \tag{1.2}$$

$$-H\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S=\cos\theta$$

Система (1.1), (1.2) записана в безразмерных переменных. При этом $\zeta_1=\zeta_1(x_1, y_1)$ — уравнение свободной поверхности и

$$\{x, y, z, n, \zeta\}=\frac{1}{d}\{x_1, y_1, z_1, n_1, \zeta_1\},\qquad \omega^2=\frac{\omega_*^2 d}{g}$$

$$\varepsilon^2=\frac{\alpha}{d^2 g\rho}=\frac{1}{\mathrm{Bo}}$$

Здесь ось z направлена вертикально вверх, точка (x, y) пробегает область Ω — сечение цилиндра, заполненного жидкостью, граница S области Ω предполагается достаточно гладкой кривой; для простоты дальше будем считать область Ω выпуклой и односвязной; n_1 — внутренняя нормаль к S; α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; g — ускорение силы тяжести; ρ — плотность жидкости; d — характерный размер области

Ω; ω_* — постоянная угловая скорость вращения сосуда; θ — краевой угол, который определяется свойствами жидкости и материала стенок сосуда. Константа C определяется из условия постоянства полного объема жидкости V_1 ($V_1 = Vd^3$). Система координат подвижная и жестко связана с вращающимся сосудом.

Условие постоянства объема (1.1) записано в предположении, что все дно цилиндра смочено жидкостью. Необходимым и достаточным условием (при заданных V, Ω) выполнения этого предположения при $\varepsilon=0$ служит неравенство

$$\frac{\omega^2}{2}\int\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dx\,dy<V$$

которое, очевидно, имеет место, если жидкости достаточно много и сосуд вращается не слишком быстро. Если это неравенство не выполнено, то появляется новая неизвестная — радиус окружности, ограничивающей несмоченную часть D дна, а вместо Ω в (1.1) следует писать $\Omega - D$. Этот случай далее не рассматривается. Заметим, что к нему может быть применен метод п. 4.

Аналогичная задача об определении формы свободной поверхности в сосуде, представляющем собой тело вращения вокруг оси z, сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения, которое получается из (1.1) с учетом осевой симметрии [7]

$$\varepsilon^2\frac{1}{r}[ru'(1+u'^2)^{-1/2}]'-u+\frac{1}{2}\omega^2r^2=0,\qquad (\;)'=\frac{d(\;)}{dr} \tag{1.3}$$

Здесь (r, φ, z) — цилиндрические координаты, $\zeta=u+C$.

Ради упрощения выкладок предполагается, что свободная поверхность представима в виде $z=\zeta(r)$, а форма сосуда в виде $z=\Phi(r)$. Тогда граничные условия запишутся в виде [4].

2. Построение асимптотики для задачи (1.1), (1.2). Пусть граница S допускает параметрическое представление вида

$$x=X(\varphi),\quad y=Y(\varphi),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$$

В окрестности S введем криволинейные координаты (ρ, φ) точки M; ρ — расстояние точки M до границы, а φ — значение параметра, которое соответствует точке, лежащей на S и ближайшей к M.

Решение задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon\to0$ строится в виде

$$u\sim u_\varepsilon=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i u_i(x,y)+\varepsilon\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i v_i\left(\frac{\rho}{\varepsilon},\varphi\right) \tag{2.1}$$

Функции $u_i(x, y)$ получаются в результате первого итерационного процесса [8]. Разыскивая решение в виде $u_0+\varepsilon u_1+\ldots+\varepsilon^n u_n$ и приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$, после приведения подобных членов получаем последовательно рекуррентные формулы — линейные алгебраические уравнения для определения u_i

$$u_0-{}^1/_2\omega^2r^2=0,\quad u_1(1+u_{0x}{}^2+u_{0y}{}^2)^{3/2}=0,\quad r^2=x^2+y^2 \tag{2.2}$$

$$\Delta u_{n-2}+\sum_{i+k+m=n-2}[u_{ixx}u_{ky}u_{my}-2u_{ixy}u_{kx}u_{my}+$$

$$+u_{iyy}u_{kx}u_{mx}]-\sum_{j+i=n}u_ib_j+{}^1/_2\omega^2r^2b_n=0$$

$$(n=2,3,4,\ldots;\ i,k,m,\ j\geqslant0)$$

При этом функции b_j определяются последовательно приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε в соотношении

$$\left(1+\sum_{m=0}\varepsilon^m a_m\right)^{3/2}=\sum_{k=0}\varepsilon^k b_k,\qquad a_m=\sum_{i+j=m}(u_{ix}u_{jx}+u_{iy}u_{jy})$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, использование в качестве индексов букв x, y, ρ, φ, t означает дифференцирование по этим переменным.

Из (2.2), в частности, следует:

$$u_0={}^1/_2\omega^2r^2,\quad u_1=0,\quad u_2=(2\omega^2+\omega^6r^2)(1+\omega^4r^2)^{-3/2},\quad r^2=x^2+y^2$$

Функции пограничного слоя $v_i=v_i(\rho/\varepsilon,\ \varphi)$ находятся при помощи второго итерационного процесса [8]. Для этого (2.1) подставляем в (1.1), (1.2), учитываем (2.2) и переходим к локальным координатам (ρ, φ) по формулам

$$v_x=v_\rho\rho_x+v_\varphi\varphi_x,\qquad v_y=v_\rho\rho_y+v_\varphi\varphi_y$$
$$v_{xy}=v_{\rho\rho}\rho_x\rho_y+v_{\rho\varphi}(\rho_x\varphi_y+\rho_y\varphi_x)+v_{\varphi\varphi}\varphi_x\varphi_y+v_\rho\rho_{xy}+v_\varphi\varphi_{xy}$$

Коэффициенты при v_i в полученных выражениях разлагаем в ряды Тейлора в окрестности $\rho=0$ и производим замену $\rho=\varepsilon t$. Собирая члены с одинаковыми степенями ε и приравнивая нулю коэффициенты при ε^0, $\varepsilon^1,\ldots$ $\ldots,\varepsilon^n$, приходим к уравнениям для определения v_i. Используя соотношения, справедливые для точек контура S

$$\rho_x=-Y_\varphi\delta^{-1},\quad \rho_y=X_\varphi\delta^{-1},\quad \varphi_x=X_\varphi\delta^{-2}$$
$$\varphi_y=Y_\varphi\delta^{-2},\quad \delta^2=X_\varphi^2+Y_\varphi^2,\quad \rho_x^2+\rho_y^2=1$$

для функции v_0 получаем уравнение с краевыми условиями

$$a^2v_{0tt}-v_0(c^2+2bv_{0t}+v_{0t}^2)^{3/2}=0 \tag{2.3}$$
$$a^2=1+\omega^4[y\rho_x-x\rho_y]_S^2=1+\omega^4(YY_\varphi+XX_\varphi)\delta^{-2}$$
$$c^2=1+\omega^4R^2,\quad b=\omega^2[x\rho_x+y\rho_y]_S=$$
$$=\omega^2[YX_\varphi-XY_\varphi]\delta^{-1}\leqslant 0$$

$$R^2=[x^2+y^2]_S=X^2+Y^2,\quad \delta^2=X_\varphi^2+Y_\varphi^2$$
$$-(b+v_{0t})(c^2+2bv_{0t}+v_{0t}^2)^{-1/2}|_{t=0}=\cos\theta,\quad v_0|_{t=\infty}=0 \tag{2.4}$$

Второе краевое условие получается из требования, чтобы при удалении от границы решение в пограничном слое переходило в решение вырожденной задачи $u_0={}^1/_2\omega^2r^2$.

Подкоренные выражения в (2.3), (2.4) положительны при любых ω, так как не имеют место неравенства

$$m^2\equiv c^2-b^2\geqslant 1,\quad c^2+2bv_{0t}+v_{0t}^2=(v_{0t}+b)^2+c^2-b^2\geqslant 1$$

Второе неравенство есть следствие первого, а первое вытекает из двух соотношений, справедливых для точек, лежащих на S

$$\rho_x^2+\rho_y^2=1,\quad m^2\equiv c^2-b^2=1+\omega^4(x\rho_y-y\rho_x)^2\geqslant 1 \tag{2.5}$$

При $\omega=0$ имеем $a=c=1$, $b=0$ и задача (2.3), (2.4) переходит в задачу, рассмотренную в [6, 2, 5].

Для функций $v_i(t,\ \varphi)$ ($i\geqslant 1$) получаем линейные краевые задачи вида

$$a^2\frac{d}{dt}[(c^2+2bv_{0t}+v_{0t}^2)^{-3/2}v_{it}]-v_i=f_i(t,\varphi) \tag{2.6}$$
$$v_{it}|_{t=0}=A_i(\varphi),\quad v_i|_{t=\infty}=0\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

Здесь $f_i(t, \varphi)$ есть функции от $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}$ и их производных по t и φ не выше второго порядка, а также от значений производных на границе S от функций ρ и φ по x и y. Таким образом, функции $f_i(t, \varphi)$ и $A_i(\varphi)$ известны, если $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}$ уже найдены.

В частности, для $f_1(t, \varphi)$ и $A_1(\varphi)$ имеем

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad & f_1(t, \varphi)=h^{-3}\{-2v_{0tt}v_{0\varphi}l_\varphi\delta^{-2}+2v_{0t\varphi}l_\varphi\delta^{-2}(b+v_{0t})+\\
&+\varkappa v_{0t}(1+v_{0t}^2)-v_{0t}\delta^{-3}b(b+2v_{0t})(Y_\varphi X_{\varphi\varphi}-X_\varphi Y_{\varphi\varphi})-\\
&-\omega^2 v_{0t}(2b+v_{0t})+3v_0h[t\omega^2(b+v_{0t})+\\
&+v_{0\varphi}l_\varphi\delta^{-2}]+u_2|_S(h^3-c^3)\}\\
&A_1(\varphi)=-[v_{0\varphi}l_\varphi(b+v_{0t})\delta^{-2}(c^2+b^2+4bv_{0t}+2v_{0t}^2)^{-1}]_{t=0}\\
&l(\varphi)={}^1/{}_2\omega^2(X^2+Y^2),\quad h^2=c^2+2bv_{0t}+v_{0t}^2
\end{aligned}
$$

При выводе (2.7) использованы соотношения

$$
\begin{aligned}
&\rho_{xy}|_S=X_\varphi Y_\varphi\delta^{-5}(Y_\varphi X_{\varphi\varphi}-X_\varphi Y_{\varphi\varphi})\\
&[\rho_x\varphi_x+\rho_y\varphi_y]_S=0\\
&[\rho_{xx}+\rho_{yy}]_S=[\rho_{xx}+\rho_y^2+\rho_{yy}\rho_x^2-2\rho_{xy}\rho_x\rho_y]_S=-\varkappa(\varphi)
\end{aligned}
$$

где $\varkappa(\varphi)$ — кривизна контура S в точке, соответствующей значению параметра φ.

При $\omega=0$ из (2.7) находим

$$f_1(t, \varphi)=\varkappa v_{0t}(1+v_{0t}^2)^{-1/2},\qquad A_1(\varphi)=0$$

Таким образом, асимптотическая форма свободной поверхности равномерно вращающейся жидкости в случае задачи (1.1), (1.2) определяется в виде

$$(2.8)\qquad \zeta\sim\zeta_\varepsilon=u_\varepsilon+C_\varepsilon,\quad C\sim C_\varepsilon=C_0+\varepsilon C_1+\ldots+\varepsilon^n C_n$$

Здесь u_ε построена в (2.1), а значения C_i находим следующим образом. Разложение (2.8) подставляем в условие постоянства полного объема жидкости (см. (1.1)) и в интегралах от функций пограничного слоя переходим к координатам (t, φ). Собирая подобные члены при одинаковых степенях ε и приравнивая полученные коэффициенты нулю, выводим соотношения для C_i. В частности, имеем

$$C_0=\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\left[V-\frac{\omega^2}{2}\int\limits_\Omega(x^2+y^2)\,dx\,dy\right],\quad C_1=0$$

$$C_2=\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\left[\int\limits_S\int\limits_0^\infty v_0(t, \varphi)\,\delta dt d\varphi-\int\limits_\Omega u_2dxdy\right]$$

3. Решение и исследование уравнений пограничного слоя (2.3). В случае $\omega=0$ решение хорошо известно [6, 2]. Ниже будет указано решение при любом ω.

Умножая (2.3) на $v_{0t}(c^2+2bv_{0t}+v_{0t}^2)^{-3/2}$ и интегрируя от t до ∞ с учетом краевого условия на бесконечности, получим

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & v_0^2({}^1/{}_4v_0^2-ca_1^2m^2)=-a_1^4m^6v_{0t}^2(c^2+2bv_{0t}+v_{0t}^2)^{-1}\\
& m^2=c^2-b^2,\quad a_1=am^{-2}
\end{aligned}
$$

Разрешая это уравнение относительно v_{0t}, имеем

$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad & v_{0t}=[bw^2\pm mw({}^1/{}_2v_0^2-\alpha^2)](a_1^4m^6-w^2)^{-1}.\\
& w=v_0(\alpha^2-{}^1/{}_4v_0^2)^{1/2},\quad \alpha^2=ca_1^2m^2>0,\quad \alpha^2-{}^1/{}_4v_0^2>0
\end{aligned}
$$

Последнее неравенство легко следует из (3.1). Теперь докажем, что v_0 и ее первые две производные нигде не равны нулю, за исключением случая $v_0(t)\equiv 0$.

Если $v_0(t_0)=0$ при $0\leqslant t_0<\infty$, то в силу (3.1) также и $v_{0t}(t_0)=0$, а тогда $v_0(t)\equiv 0$ согласно теореме единственности решения задачи Коши. Итак, функция v_0 не обращается в нуль нигде, если $v_{0t}(0)\neq 0$.

Далее, если $v_{0t}(t_1)=0$ при $0\leqslant t_1<\infty$, то из (3.1) следует, что $v_0^2(t_1)=$ $=4\alpha^2>0$, так как $v_0(t_1)\neq 0$. Тогда $v_0(t)$ не стремится к нулю при $t\to\infty$. В самом деле, если, например, $v_0(t_1)>0$, то $v_0(t)>0$ для всех $t>0$, а из (2.3) следует тогда, что и $v_{0tt}(t)>0$. Тогда $v_{0t}(t)>0$ при $t>t_1$ и $v_0(t)$ не стремится к нулю при $t\to\infty$. Случай $v_0(t_1)<0$ рассматривается аналогично. Таким образом, v_{0t} не обращается в нуль. То же утверждение для v_{0tt} следует из (2.3).

Далее, прибавляя к обеим частям слагаемое $a_1^4m^4c^2$ и извлекая квадратный корень, выводим

$$(3.3)\qquad {}^1\!/_2v_0^2-\alpha^2=-a_1^2m^2(c^2+bv_{0t})(c^2+2bv_{0t}+v_{0t}^2)^{-1/2}$$

Знаки при извлечении корня выбираются из условия, что тождество (3.3) сохраняется при $t\to\infty$, где $\{v_0, v_{0t}\}\to 0$. Равенство (3.3) этим доказано по крайней мере для достаточно больших t, точнее для $t\geqslant t_0$, где t_0 — точка, в которой правая часть (3.3) обращается в нуль. В этой точке имеем

$$(3.4)\qquad v_0^2(t_0)=2\alpha^2,\quad w(t_0)=\alpha^2,\quad v_{0t}(t_0)=-c^2/b>0$$

Из монотонности v_0, v_{0t} следует, что левая часть (3.3) обращается в нуль не более чем в одной точке $t_0>0$ и при $t<t_0$ обе части (3.3) меняют знак, поэтому равенство (3.3) выполняется для всех $t\geqslant 0$.

Теперь, разрешая (2.4) относительно v_{0t}, получаем

$$(3.5)\qquad v_{0t}|_{t=0}=-b-m\operatorname{ctg}\theta,\quad m(c^2-b^2)^{1/2},\quad b<0$$

Знак минус перед $m\operatorname{ctg}\theta$ выбран из следующих соображений. Пусть ζ_0 — свободная поверхность вращающейся жидкости при $\varepsilon=0$ и γ — угол между стенкой сосуда и поверхностью ζ_0. Тогда

$$(3.6)\qquad \zeta_0=C_0+{}^1\!/_2\omega^2r^2$$

$$C_0=\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\left[V-\frac{\omega^2}{2}\int\limits_\Omega(x^2+y^2)\,dxdy\right]$$

$$\gamma=\arccos\left[-\frac{\omega^2(x\rho_x+y\rho_y)}{\sqrt{1+\omega^4r^2}}\right]_S=\operatorname{arctg}(-b^{-1}m)$$

С учетом (3.6) краевое условие (3.5) перепишется в виде

$$v_{0t}|_{t=0}=m(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\theta)$$

Если в точке контура S, соответствующей значению параметра φ, имеет место неравенство $\gamma(\varphi)<\theta$, то под действием сил поверхностного натяжения угол γ должен увеличиться до значения θ, а поэтому $v_{0t}|_{t=0}>0$ ($v_0|_{t=0}<0$). Если же $\gamma(\varphi)>\theta$, то поверхностное натяжение действует в противоположную сторону, и $v_{0t}|_{t=0}<0$ ($v_0|_{t=0}>0$). Наконец, если $\gamma=\theta$, то $v_{0t}(0)=0$ и, как указывалось выше, $v_0(t)\equiv 0$ (пограничный слой в этом случае имеет более высокий порядок). Оба случая согласуются с формулой (3.5).

Используя (3.5), из (3.3) при $t=0$ выводим

$$(3.7)\qquad \begin{aligned}\delta^2&\equiv v_0^2(0)=2a_1^2m^2(c-m\sin\theta+b\cos\theta)=\\&=2a_1^2m^2c[1-\cos(\theta-\gamma)]\\ \gamma&=\operatorname{arc\,tg}(-b^{-1}m)\end{aligned}$$

Таким образом, решение v_0 краевой задачи (2.3), (2.4) должно удовлетворять условиями Коши (3.5), (3.7), а поэтому единственно.

Перейдем к построению явного решения задачи (2.3), (2.4). При этом в (3.2) выбираем знак плюс. Произведя замены

$$x=(\sqrt{4\alpha^2-v_0^2}-2\alpha)v_0^{-1},\quad \beta=bm^{-1}$$

из (3.2) выводим

$$-\frac{c^{3/2}}{a_1m^2}=\frac{x^8-(12+16\beta^2)x^6+(38+32\beta^2)x^4-(12+16\beta^2)x^2+1}{x(x^2+1)^2(x^4-4\beta x^3-6x^2+4\beta x+1)}x_t$$

Сокращая эту дробь, получаем

$$-\frac{c^{3/2}}{a_1m^2}=\frac{x^4+4\beta x^3-6x^2-4\beta x+1}{x(1+x^2)^2}x_t$$

или иначе

$$\left[\frac{1}{4x}+\left(\frac{1-\beta x}{1+x^2}\right)'\right]dx=-\frac{c^{3/2}}{4a_1m^2}dt$$

Здесь штрих означает производную по x. Интегрируя последнее уравнение и возвращаясь к исходной переменной, находим

$$t=K-a_1(c^2-b^2)c^{-3/2}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{2\alpha-\sqrt{4\alpha^2-v_0^2}}{2\alpha+\sqrt{4\alpha^2-v_0^2}}+\frac{1}{\alpha}(\sqrt{4\alpha^2-v_0^2}+\beta v_0)\right\}\tag{3.8}$$

$$\alpha=a_1mc^{1/2},\quad \beta=bm^{-1},\quad m^2=c^2-b^2,\quad a_1=am^{-2}$$

Здесь функции a, b и c определены в (2.3), а постоянная интегрирования K находится из (3.8) при $t=0$ и определяется соотношением

$$K=a_1(c^2-b^2)c^{-3/2}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{2\alpha-\sqrt{4\alpha^2-\delta^2}}{2\alpha+\sqrt{4\alpha^2-\delta^2}}+\frac{1}{\alpha}(\sqrt{4\alpha^2-\delta^2}+\beta\delta)\right\}\tag{3.9}$$

где δ дано в (3.7).

Из (3.8) легко получаем асимптотическое представление

$$|v_0|\sim 4\alpha\exp\left[-a^{-1}c^{-3/2}t\right]\quad (t\to\infty)\tag{3.10}$$

т. е. $v_0(t)$ является функцией типа погранслоя нулевого порядка [8].

Заметим, что если в (3.2) выбрать нижний знак, то для $v_0(t)$ при $t\to\infty$ получается асимптотическое представление (3.10), но с заменой t на $-t$, что противоречит условию $v_0(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

В случае равномерно вращающегося кругового цилиндрического сосуда в (3.7) — (3.9) надо положить

$$x=\cos\varphi,\quad y=\sin\varphi,\quad a=1,\quad b=-\omega^2,\quad c^2=1+\omega^4,$$
$$m=1,\quad \operatorname{ctg}\gamma=\omega^2$$

Заметим, что тогда при $\omega^2<\operatorname{ctg}\theta$ функцию $v_0(t)$ надо брать со знаком плюс, а при $\omega^2>\operatorname{ctg}\theta$ — со знаком минус.

Теперь в качестве примера рассмотрим случай, когда контур S есть эллипс:

$$X=k_1\cos\varphi,\quad Y=k_2\sin\varphi,\quad k_1>0,\quad k_2>0$$

Тогда при $\omega\neq 0$ имеем

$$b=-\omega^2k_1k_2\delta^{-1}<0,\qquad \delta^2=k_1^2\sin^2\varphi+k_2^2\cos^2\varphi$$
$$m^2=1+\omega^4(k_2^2-k_1^2)^2\delta^{-2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi,\qquad \operatorname{tg}\gamma=-m/b$$

Вычисляя $\operatorname{tg}\gamma$ и используя приведенные выше рассуждения относительно знака $v_0(t)$, приходим к выводу о том, что свободная граница может лежать как выше, так и ниже параболоида (3.6). В точках контура S, соответствующих тем значениям параметра φ, для которых имеет место неравенство

$$\omega^{-4} > k_1^2 k_2^2 \delta^{-2} \operatorname{tg}^2\theta - \sin^2\varphi\cos^2\varphi (k_2^2 - k_1^2)^2 \delta^{-2} \equiv B(\varphi)$$

свободная поверхность около стенки лежит выше параболоида ζ_0, а в точках, для которых $\omega^{-4} < B(\varphi)$, свободная поверхность лежит ниже параболоида ζ_0.

4. Построение асимптотика для задачи (1.3). В этом случае асимптотические разложения решения при $\varepsilon \to 0$ строятся в виде

$$(4.1) \qquad u \sim u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i u_i(r) + \varepsilon \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i v_i\left(\frac{\eta - r}{\varepsilon}\right)$$

$$\eta - \eta_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \eta_i, \qquad C \sim C_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i C_i$$

Первый итерационный процесс проводится так же, как и в п. 2. Разыскивая решение в виде $u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon^n u_n$, из (1.3) получаем

$$u_0 = {}^1/_2\omega^2 r^2, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = \omega^2(2 + \omega^4 r^2)(1 + \omega^4 r^2)^{-3/2}, \ldots$$

Для построения функций пограничного слоя v_i подставляем (4.1) в (1.3), (1.4). Производим замену $\rho = \eta_\varepsilon - r$, разлагаем известные функции в ряды Тейлора при $\rho = 0$, полагаем $\rho = \varepsilon t$ и собираем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Приравнивая полученные выражения при $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots$ нулю, приходим к уравнениям для определения v_i. Для функции v_0 имеем нелинейное дифференциальное уравнение с краевыми условиями

$$(4.2) \qquad v_{0tt} - v_0 (1 + \omega^4 \eta_0^2 - 2\omega^2 \eta_0 v_{0t} + v_{0t}^2)^{3/2} = 0$$

$$(4.3) \qquad v_{0t}|_{t=0} = \omega^2 \eta_0 + \frac{\Phi'(\eta_0) - \cos\theta \sin\theta [1 + \Phi'^2(\eta_0)]}{\Phi'^2(\eta_0)\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$$v_0|_{t=\infty} = 0$$

Отметим, что выражение (4.3) удобнее получить, если сначала разрешить (1.4) относительно u', а затем подставить (4.1). При этом правило выбора знака такое же, как и в п.3.

Для функций v_i ($i \geqslant 1$) получаем линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

$$(4.4) \qquad \frac{d}{dt}(g^2 v_{it}) - v_i = f_i, \qquad v_{it}|_{t=0} = A_i$$

$$v_i|_{t=\infty} = 0$$

$$g^2 = (1 + \omega^4 \eta_0^2 - 2\omega^2 \eta_0 v_{0t} + v_{0t}^2)^{-3/2}$$

Здесь f_i и A_i — известные функции, если $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}$ уже найдены. В частности, имеем

$$f_1 = g^2 \eta_0^{-1} \{3\omega^4 \eta_0^2 v_{0t} - 3\omega^2 \eta_0 v_{0t}^2 + v_{0t}^3 + v_{0t} +$$
$$+ 3\eta_0 v_0 g^{-2/3} (\eta_1 - t)\omega^2(\omega^2\eta_0 - v_{0t})\} +$$
$$+ [1 - (1 + \omega^4 \eta_0^2)^{3/2} g^2] u_2|_{r=\eta_0}$$
$$A_1 = \omega^2 \eta_1 + \Phi''(\eta_0)[\Phi'^2(\eta_0)\sin^2\theta - \cos^2\theta]^{-2} \times$$
$$\times [\Phi'(\eta_0)\sin 2\theta - \cos^2\theta]\eta_1$$

Действуя как и в п. 3, находим решение задачи (4.2), (4.3)

$$(4.5) \qquad t = K_1(\delta) - K_1(v_0), \qquad c^2 = 1 + \omega^4 \eta_0^2$$

$$K_1(v) = c^{-3/2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{2\sqrt{c} - \sqrt{4c - v^2}}{2\sqrt{c} + \sqrt{4c + v^2}} + \frac{1}{\sqrt{c}} (\sqrt{4c - v^2} - \omega^2 \eta_0 v) \right\}$$

Здесь $\delta^2 = v_0^2(0)$ определяется из (3.3) при $t=0$ с помощью выражения для $v_{0t}(0)$ в (4.3). При этом в (3.3) следует положить

$$a=1, \quad m=1, \quad c^2=1+\omega^4\eta_0^2, \quad b^2=-\omega^2\eta_0$$

В случае отсутствия вращения ($\omega=0$) и наклонной стенки ($\Phi'=\operatorname{ctg}\delta r$) получается результат из [4].

Заметим, что функция $v_0(t)$ зависит еще от неизвестной постоянной η_0. Точно так же нетрудно установить, что функции v_i зависят от постоянных $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_i$. Все эти постоянные определяются последовательно вместе с постоянными C_i в (4.1) из условия (1.5). Подставляя (4.1) в (1.5), имеем

$$(4.6)\qquad \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^2 \int_0^{\eta_\varepsilon} u_i r\,dr + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \int_0^{\eta_\varepsilon/\varepsilon} v_i(t)\,(\eta_\varepsilon - \varepsilon t)\,dt +$$

$$+\varphi(\eta) - \frac{1}{2\pi} V = O(\varepsilon^{n+1})$$

$$\varphi(\eta_\varepsilon) = \int_0^{\eta_\varepsilon} \left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i C_i - \Phi(r) \right) r\,dr$$

Во втором интеграле произведена замена $r=\eta_\varepsilon - \varepsilon t$. Кроме того, в точке контакта сосуда и жидкости должно выполняться соотношение $z(\eta) = \Phi(\eta)$. Используя (4.1), получаем

$$(4.7)\qquad \left[\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i (u_i + C_i) + \varepsilon \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i v_i \right]_{r=\eta_\varepsilon} - \Phi(\eta_\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравнивая нулю полученные выражения при ε^0, выводим систему уравнений для определения η_0 и C_0

$$(4.8)\qquad \frac{1}{8}\omega^2\eta_0^4 + \frac{1}{2} C_0 \eta_0^2 - \int_0^{\eta_0} \Phi(r)\, r\,dr = \frac{1}{2\pi} V$$

$$C_0 + \frac{1}{2}\omega^2\eta_0^2 = \Phi(\eta_0)$$

Тогда η_0 находим из уравнения

$$(4.9)\qquad -\frac{1}{8}\omega^2\eta_0^4 + \frac{1}{2}\Phi(\eta_0)\eta_0^2 - \int_0^{\eta_0} \Phi(r)\, r\,dr = \frac{1}{2\pi} V$$

Далее, приравнивая нулю выражения при ε^1 и учитывая (4.8), для η_1 и C_1 получаем

$$(4.10)\qquad C_1 = 0, \qquad \eta_1 = \frac{v_0(\eta_0)}{\Phi'(\eta_0) - \eta_0\omega^2}$$

Аналогично выводятся формулы для C_i, η_i при $i \geqslant 2$.

Таким образом, асимптотическая форма свободной поверхности равномерно вращающейся жидкости в случае задачи (1.3) — (1.5) разыскивается в виде $z \sim z_\varepsilon = u_\varepsilon + C_\varepsilon$, где u_ε, C_ε определены в (4.1), а процесс их построения сводится к следующему.

Сначала определяем η_0 и C_0 по формулам (4.8). Затем, используя (4.5), определяем $v_0(t)$, а по формулам (4.10) — постоянные η_1 и C_1. Далее определяем $v_1(t)$, и пользуясь (4.6), (4.7), находим η_2, C_2 и т. д.

Построенные асимптотические разложения (4.1) показывают, что при больших числах Бонда с погрешностью порядка $(\mathrm{Bo})^{-1/2}$ свободная граница есть параболоид с вершиной на оси вращения. При этом значение η_0, соответствующее точке пересечения границы сосуда и этого параболоида, определяется из (4.9).

Заметим, что решение вырожденной задачи не всегда существует (и не всегда единственно). Например, пусть жидкость находится на круговом коническом сосуде: $\Phi(r)=kr$ $(k>0)$. Из (4.9) вытекает

$$F(\eta_0)\equiv\frac{k}{6}\eta_0^3-\frac{1}{8}\omega^2\eta_0^4=\frac{1}{2\pi}V$$

Функция $F(\eta_0)$ имеет максимум при $\eta_0=k\omega^{-2}$. Следовательно, V должно удовлетворять неравенству

$$V\leqslant(\pi/12)k^4\omega^{-6}=V_0$$

Если это условие не выполняется, то равновесие жидкости в системе координат, вращающейся вместе с сосудом, невозможно. Это явление можно наблюдать в простом эксперименте. Пусть в коническую воронку, вращающуюся с угловой скоростью ω на центрифуге, налита жидкость объема $V>V_0$. Тогда часть жидкости поднимается вверх (жидкие частицы двигаются по спиралям, наматывающимся на конус). Оставшаяся часть жидкости имеет объем V_0, а соответствующая свободная граница – параболоид, касающийся воронки вдоль линии смачивания.

Значение граничной точки η_0 и поправка $\varepsilon\eta_1$ к нему, учитывающая поверхностное натяжение, определяются соответственно из (4.9) и (4.10).

В случае $\Phi(r)=kr^\alpha$, $k>0$, $\alpha>2$ решение (4.9) существует при любых ω. Пусть $\Phi(r)=kr^2$, $k>0$. Из (4.9) получаем

$$\eta_0=[2\pi^{-1}V(k-{}^1/_2\omega^2)^{-1}]^{1/4}$$

Отсюда вытекает очевидное ограничение $\omega^2<2k$, если $\omega^2\geqslant2k$ равновесие невозможно ни при каком V (вся жидкость должна в этом случае разбрызгиваться).

Рассмотрим еще особый случай: в точке контакта η_0 параболоид $z_0={}^1/_2\omega^2r^2+C_0$ касателен к стенке сосуда. Положим $\Phi(r)={}^1/_2\omega^2r^2+\lambda(r)$, где $\lambda(\eta_0)=\lambda'(\eta_0)=0$. Уравнение (4.9) принимает вид

$$(4.11)\qquad -\int_0^{\eta_0}\lambda(r)r\,dr={}^1/_2\pi V$$

В данном случае асимптотическое представление решения вместо (4.1) надо разыскивать в виде

$$(4.12)\qquad \eta\sim\eta_\varepsilon=\eta_0+\sum_{i=1}^n\varepsilon^{i/2}\eta_i$$

$$C\sim C_\varepsilon=C_0+\sum_{i=1}^n\varepsilon^{i/2}C_i$$

$$u\sim u_\varepsilon=\sum_{i=0}^n\varepsilon^{i/2}(u_i+\varepsilon v_i)$$

Подставляя (4.12) в (1.3) – (1.5), а также в условие $z(\eta)=\Phi(\eta)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, для определения v_0 получаем уравнение пограничного слоя (4.2), (4.3), а для определения η_0 – соотношение (4.11). Кроме того, выводим

$$(4.13)\qquad C_0=C_1=C_2=0,\qquad \eta_1=\pm[2v_0(\eta_0)/\lambda''(\eta_0)]^{1/2}$$

Таким образом, если $\lambda''(\eta_0)\neq 0$, в этом случае имеется два решения. Если $\lambda''(\eta_0)=\lambda^{(3)}(\eta_0)=\ldots=\lambda^{(n-1)}(\eta_0)=0$, но $\lambda^{(n)}(\eta_0)\neq 0$, то разложение следует вести по степеням $\varepsilon^{1/n}$.

Для существования асимптотического разложения (4.13) необходимо еще, чтобы подкоренное выражение в (4.13) было положительно. В противном случае решение поставленной задачи не существует (часть жидкости должна разбрызгиваться).

Авторы благодарны Л. А. Слобожанину за помощь в работе.

Поступила 4 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Мышкис А. Д., Петров А. А.* О некоторых новых задачах теории движения тела с жидкостью. Второй Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике (Аннот. докл.). М., 1964, стр. 151, 152.
2. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
3. *Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л.* Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6, стр. 1071—1095.
4. *Черноусько Ф. Л.* Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения. В сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», вып. 6. М., ВЦ АН СССР, 1968.
5. *Срубщик Л. С., Юдович В. И.* Об асимптотическом интегрировании уравнения равновесия жидкости с поверхностным натяжением в поле тяжести. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, стр. 1127—1133.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошной среды. М., Гостехиздат, 1953.
7. *Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидростатика в слабых силовых полях. В сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», вып. 4. М., ВЦ АН СССР, 1968.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.