

УДК 532.517:538.4

СМЕШЕНИЕ СПУТНЫХ ПОТОКОВ НЕПРОВОДЯЩЕЙ И ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Э. Г. СИНАЙСКИЙ

(Москва)

Существует обширная литература, посвященная решению задач о ламинарном и турбулентном смешении двух полубесконечных потоков вязкой несжимаемой непроводящей жидкости (см., например, [1, 2]). Поле скоростей описывается уравнениями пограничного слоя, в которых отсутствует градиент давления.

Уравнение, описывающее поле скоростей, требует задания трех граничных условий. Два из них — условия равенства на бесконечности продольных скоростей соответствующим скоростям невозмущенных потоков. В зависимости от третьего граничного условия получают либо симметричный профиль продольной скорости [3], либо несимметричный профиль [4], сдвинутый относительно симметричного профиля (профиля Гёртлера) без деформации. Будем в дальнейшем называть последний профиль смещенным автомодельным.

В случае турбулентного смешения при использовании первой гипотезы Прандтля задания на границах зоны только продольных скоростей и нормальных производных недостаточно. В качестве дополнительного граничного условия можно задать поперечную скорость на одной из границ. Точное решение этой задачи содержится в [5, 6], приближенное, полученное методом интегральных соотношений, — в [4]. В последней работе имеется также решение задачи о смешении турбулентных проводящих потоков в присутствии продольного магнитного поля.

Однако смешение полубесконечных потоков является идеализацией задачи о смешении потоков в некотором устройстве, ограниченном по поперечной координате. Поэтому возникает вопрос, в какой области можно пользоваться результатами, полученными из решения задачи о смешении полубесконечных потоков.

Одним из самых существенных предположений является пренебрежение градиентом давления и задание поперечной скорости только на одной из границ (на другой она определяется из решения). В канале же с непроницаемыми стенками поперечную скорость (нулевую) нужно задавать на обеих стенках. Поэтому для того чтобы пользоваться уравнениями пограничного слоя без градиента давления, одна стенка должна быть проницаема, причем ее проницаемость определяется из решения. Полученный профиль поперечной скорости на проницаемой стенке при задании его в качестве граничного условия для решения полных уравнений пограничного слоя обеспечит равенство нулю градиента давления.

Основной целью настоящей работы является исследование смешения спутных непроводящих и проводящих потоков в плоском канале на основе уравнений пограничного слоя без градиента давления. Для удобства сравнения с соответствующими автомодельными решениями будет рассмотрено смешение в канале, стенки которого движутся поступательно с постоянной скоростью, равной скоростям прилегающих к ним потоков на входе. Сначала рассматривается смешение ламинарных потоков непроводящей и проводящей жидкости в присутствии однородного поперечного магнитного поля, затем смешение турбулентных потоков непроводящей и проводящей жидкости в присутствии однородного продольного магнитного поля. В заключение рассматривается развитие ступенчатого профиля скорости на основе уравнений пограничного слоя с градиентом давления в канале с неподвижными и движущимися стенками. При некоторых значениях параметров задачи в потоке возникают области возвратного течения. Обсуждается методика расчета течения в этих областях.

В литературе нет достаточного теоретического исследования смешения потоков в канале. В работе [7] рассматривается течение двух потоков, сходящих с плоской пластины, на основе полной системы уравнений Навье — Стокса. В работе [8] использован довольно грубый для данной задачи метод линеаризации.

1. Рассмотрим ламинарное смешение двух однородных потоков несжимаемой вязкой проводящей жидкости в плоском канале $x^0 > 0$, $0 < y^0 < h$, стенки которого $y^0 = 0$ и h движутся поступательно с постоянными скоро-

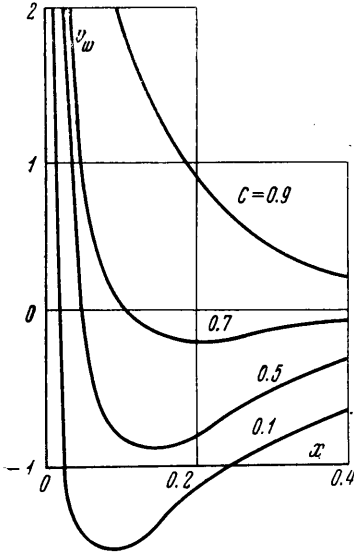
стями u_1° и u_2° . Внешнее магнитное поле B направлено по оси y и предполагается постоянным. Будем предполагать, что магнитное число Рейнольдса мало, так что индуцированным магнитным полем можно пренебречь. Электрическое поле вдоль оси z считается равным нулю. Пусть на входе имеются два поступательных потока, смешение которых начинается в области $x^\circ > 0$. Это означает, что на входе в канал задан ступенчатый профиль продольной скорости

$$(1.1) \quad u^\circ = \begin{cases} u_1^\circ & (0 < y < h_1) \\ (u_1^\circ + u_2^\circ)/2 & (y = h_1) \\ u_2^\circ & (h_1 < y < h) \end{cases}$$

Будем предполагать, что поле скоростей описывается уравнениями пограничного слоя, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(1.3) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M^2 u$$



Фиг. 1

На фиг. 1 представлено изменение поперечной скорости v_w на нижней неподвижной стенке ($y=0$) для случая $M=0$, $u_1/u_2=0$ и различных значений C . При $C > 0.7$ значения $v_w < 0$ (вдув), при $C \leq 0.7$ имеются две области вдува и отсоса, причем с уменьшением C , что соответствует увеличению толщины движущегося слоя, область вдува уменьшается. Это объясняется тем, что с уменьшением C граница зоны смешения в потоке, примыкающей к нижней стенке, достигает стенки при меньшем значении $x=x_s$, и при $x > x_s$ значения $v_w < 0$.

Сравнение профилей продольной скорости, полученных численным интегрированием (1.1)–(1.4) для $M=0$, $u_1/u_2=0$, $C=0.5$, с профилем Гертлера показало, что в области $0.01 < x < 0.02$ численное решение может быть аппроксимировано с большой точностью путем сдвига профиля Гертлера на величину, равную 0.6. Заметим, что сдвиг, предсказанный в [4] для смешения полуглубесконечных потоков, равнялся 0.8. В области $x < 0.01$, по-видимому, сказывается влияние особенности на входе, в то время как при $x > 0.02$ – влияние стенок канала. Как следует из [4], величина сдвига связана со значением поперечной скорости v_w . Так, если $v_w = p/\sqrt{x}$, то сдвиг равен p . Полученные значения v_w в области $0.01 < x < 0.02$ могут быть

$$x = \frac{2vx^\circ}{h^2(u_1^\circ + u_2^\circ)}, \quad y = \frac{y^\circ}{h},$$

$$u = \frac{2u^\circ}{u_1^\circ + u_2^\circ}, \quad v = \frac{hv^\circ}{v}$$

$$u_1 = \frac{2u_1^\circ}{u_1^\circ + u_2^\circ}, \quad u_2 = \frac{2u_2^\circ}{u_1^\circ + u_2^\circ},$$

$$C = \frac{h_1}{h}, \quad M^2 = \frac{\sigma h^2 B^2}{c^2 \mu}$$

Граничными условиями для (1.2), (1.3) будут условия на входе (1.1) и на стенках (1.4) $u=u_1$ ($y=0$) $u=u_2$, $v=0$ ($y=1$)

Уравнения (1.2), (1.3) с условиями (1.1), (1.4) решались численно по разностной схеме [9].

аппроксимированы функцией $v_w \approx 0.6/\sqrt{x}$. Коэффициент 0.6 дает величину сдвига профиля Гертлера.

На фиг. 2 приведен профиль продольной скорости на бесконечности, полученный в результате численного интегрирования уравнений (1.2), (1.3) для полубесконечных потоков. При $y \rightarrow \infty$ задавалось условие $u=2$, $v=0$. Там же пунктиром приведен профиль Гертлера. Величина сдвига оказалась равной 0.9, и профиль v_w (фиг. 2) хорошо аппроксимируется функцией $v_w \approx 0.9/\sqrt{x}$. Заметим, что величина сдвига, найденная в [4], равна 0.8. Таким образом, проведенные расчеты показывают хорошую точность предложенного в [4] метода.

До сих пор рассматривалось смешение непроводящих потоков ($M=0$). При $M \neq 0$ для свободных потоков не существует автомодельного решения и этот случай с точки зрения сравнения решений для ограниченных и свободных потоков не представляет особого интереса. Заметим только, что с увеличением числа Гартмана M длина, на которой v_w выходит на асимптотическое значение, уменьшается, а значения $|v_w|$ увеличиваются.

2. Рассмотрим смешение турбулентных спутных непроводящих и проводящих потоков. В случае проводящих потоков будем предполагать, что имеется внешнее однородное продольное магнитное поле B , магнитное число Рейнольдса мало.

Как и в п. 1, будем рассматривать смешение на основе уравнений пограничного слоя без градиента давления, в которых введена эффективная вязкость, равная суммарной вязкости $\nu^\circ = \nu_s^\circ + \nu_t^\circ$, обусловленной вязким и турбулентным трением. Будем предполагать, что $\nu_s^\circ = \text{const}$. В [4] приводится полуэмпирическая формула для ν_t°

$$\nu_t^\circ = d^2 x^{\circ 2} \frac{|\partial u^\circ / \partial y^\circ|^4}{(|\partial u^\circ / \partial y^\circ| + \beta \sigma B^2 / c^2 \rho)^3}$$

где d, β — эмпирические постоянные. Вводя безразмерные переменные, так же как и в п. 1, получим

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \nu = 1 + fx^2 \frac{|\partial u / \partial y|^4}{(|\partial u / \partial y| + M^2)^3}, \quad f = d^2 R^3,$$

$$(2.2) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad M^2 = \frac{2\beta \sigma h B^2}{\rho c^2 (u_1^{\circ 0} + u_2^{\circ 0})}$$

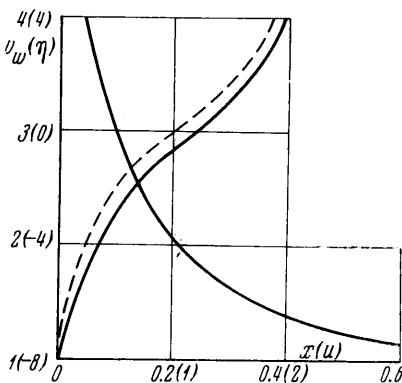
Уравнения (2.1), (2.2) будем решать при следующих условиях:

$$(2.3) \quad u = \begin{cases} u_1 & (0 < y < C) \\ 1 & (y = C), (x = 0) \\ u_2 & (C < y < 1) \end{cases} \quad \begin{matrix} u = u_1 & (y = 0), \\ v = 0 & (y = 1) \end{matrix} \quad u = u_2,$$

Задача (2.1)–(2.3) решалась численно по схеме [9].

Как и в случае ламинарного смешения, нулевое значение поперечной скорости задается на движущейся стенке ($u_1 = 0$).

Изменение поперечной скорости v_w на неподвижной стенке $y=0$ для случая $u_1/u_2 = M=0$, $C=0.5$ для значений $f=0$ и 10^3 представлено на фиг. 3.



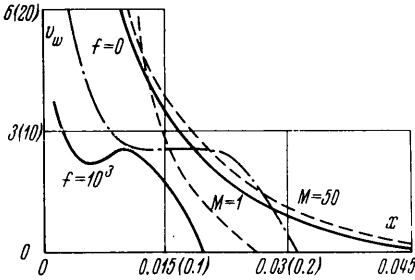
Фиг. 2

Для ламинарного смешения ($f=0$) v_w монотонно убывает, в случае турбулентного смешения имеется область немонотонности v_w .

В случае, когда эффективная вязкость обусловлена только турбулентным трением ($\nu^\circ = \nu_t^\circ$), приходим к уравнениям (2.1), (2.2), если вместо безразмерных переменных x, v , введенных ранее, ввести

$$x = x^\circ d^{2/3}/h, \quad v = 2v^\circ d^{-2/3}/(u_1^\circ + u_2^\circ), \quad \nu = x^2 |\partial u / \partial y|$$

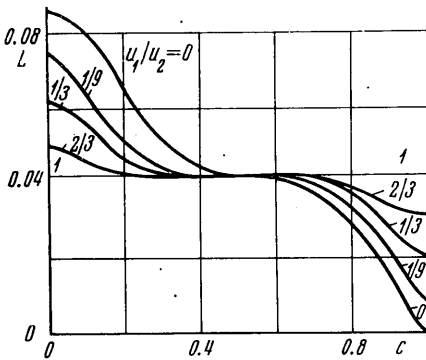
Зависимость $v_w(x)$ для этого случая представлена на фиг. 3 штрихпунктирной линией (соответствующий масштаб в круглых скобках). На графике имеется область постоянного v_w , приходящаяся как раз на область немонотонности v_w для случая $\nu_t^\circ \neq 0$. Хорошее соответствие в этой области профиля продольной скорости соответствующему автомодельному профилю свидетельствует о том, что в этой области можно пользоваться автомодельным решением.



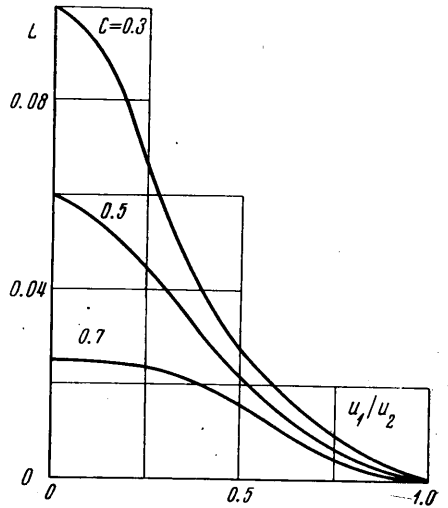
Фиг. 3

Влияние продольного магнитного поля на v_w иллюстрирует фиг. 3 ($u_1/u_2=0, C=0.5, f=10^5$, пунктирные линии). С увеличением M профиль v_w стремится к соответствующему профилю для ламинарного смешения.

3. Рассмотрим смешение в плоском канале с неподвижными и движущимися стенками на основе уравнений пограничного слоя с учетом градиента давления. При некоторых значениях параметров $C, u_1/u_2$ в потоке возникают области возвратного течения, в которых уравнения пограничного слоя, вообще говоря, не имеют смысла. Тем не менее при интегрировании этих уравнений появляются области со значениями $u < 0$ и возникает вопрос, насколько полученные результаты соответствуют действительной картине течения. Этот вопрос будет обсуждаться ниже. Здесь же приведем лишь основные данные о длине начального участка L , на котором значения продольной скорости на оси отличаются от соответствующего асимптотического значения на 1%. На фиг. 4, 5 представлены зависимости L от C и u_1/u_2 для течения в канале с неподвижными и движущимися стенками.



Фиг. 4



Фиг. 5

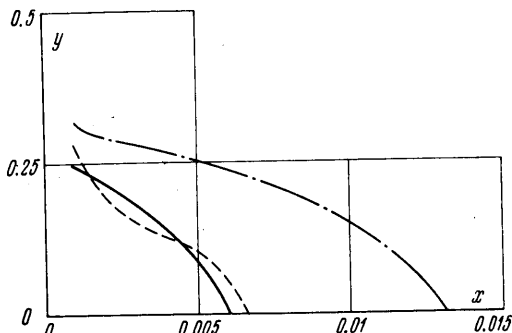
4. В случае, когда в потоке имеются области возвратного течения уравнениями пограничного слоя пользоваться во всей области нельзя. Следует либо пользоваться полной системой уравнений Навье — Стокса, либо интегрировать уравнения пограничного слоя методом, предложенным в [10],

т. е. разбить область, в которой есть возвратное течение, на две (с $u > 0$ и $u < 0$) и интегрировать уравнения в каждой из этих областей в направлении «вниз по течению». Последний метод удобен, если область возвратного течения начинается и оканчивается на стенке канала.

В рассмотренном случае это возможно при $u_1/u_2 \neq 0$. В случае же $u_1/u_2 = 0$ эта область начинается непосредственно от входного сечения, что создает определенные трудности для предлагаемого метода.

Для проверки полученных ранее результатов пришлось воспользоваться полной системой уравнений Навье — Стокса, численное решение которой было получено с помощью разностной схемы, предложенной в [11].

На фиг. 6 представлена линия раздела, на которой $u = 0$, для случая $M = 0$, $u_1/u_2 = 0$, $C = 0.5$ (сплошная линия — численное решение уравнений пограничного слоя, пунктирная — Навье — Стокса, для значений $R = 100$). Там же штрихпунктирной линией представлена линия раздела, полученная в приближении пограничного слоя методом интегральных соотношений для тех же значений параметров.



Фиг. 6

Из сравнения результатов для трех приведенных случаев можно сделать вывод, что полученное выше формальное численное решение уравнения пограничного слоя с удовлетворительной точностью описывает при данных граничных условиях область возвратного течения по крайней мере для значений $R \geq 100$ (при $R \geq 100$ продольный размер области пропорционален R), в то время как метод интегральных соотношений недостаточно точен. С увеличением u_1/u_2 , область возвратного течения отодвигается от входного сечения, размер ее уменьшается и при некотором критическом значении $(u_1/u_2)^*$ она исчезает. Интегрирование уравнений пограничного слоя для $C = 0.5$ дает $(u_1/u_2)^* = 0.13/1.87$, в то время как из уравнений Навье — Стокса $(u_1/u_2)^* = 0.23/1.77$.

Поступила 4 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
2. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
3. Gortler H. Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Naherungsansatzes. ZAMM, 1942, Bd 22, Nr 5, S. 244—254.
4. Луцкий В. Г., Регурер С. А. О слое смешения турбулентных потоков в однородной непроводящей и проводящей жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
5. Tollmien W. Berechnung der turbulenten Ausbreitungsvorgange. ZAMM, 1926, Bd 4, Nr 6, S. 468—478.
6. Kuethe A. M. Investigation of the turbulent mixing regions formed by jets. J. Appl. Mech., 1935, vol. 22, No. 3, A87—99.
7. Симуни Л. М. Движение вязкой жидкости в плоской трубе с разделяющей пластинкой. Гидродинамика. Уч. зап. Пермск. гос. ун-та, 1970, № 216, вып. 2.
8. Savkar S. D. Nonuniform flow in the inlet section of straight channel. Paper ASME, 1970, WA/FE-27.
9. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. «Вычислительные методы и программирование». Изд. МГУ, 1962, вып. 1.
10. Klemp J. B., Acrivos A. A method for investigating the boundary — layer equation through a region of reverse flow. J. Fluid Mech., 1971, vol. 53, pp. 177—191.
11. Кускова Т. В. Задача о развитии течения в канале. Сб. «Вычислительные методы и программирование». Изд. МГУ, 1970, вып. 15.