№ 6 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1973

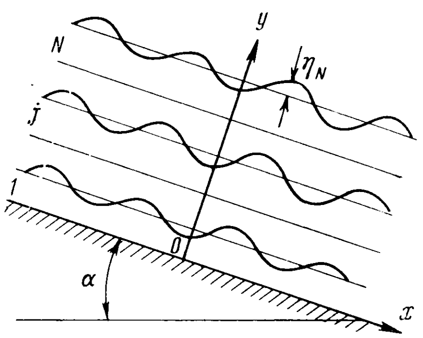
УДК 532.516

УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕОДНОРОДНОГО ВЯЗКОГО СЛОЯ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

А. Н. БОЖИНСКИЙ, И. М. ЗЕЙДИС

(*Москва*)

Исследуется устойчивость по отношению к малым возмущениям [1] медленного течения несжимаемой неоднородной линейно-вязкой жидкости под действием силы тяжести по неограниченной наклонной плоскости. Подобного рода задачи возникают в гляциологии при оценке устойчивости снега на склонах гор или определении катастрофической подвижки горного ледника; возможно также приложение результатов к явлениям солифлюкции [2, 3]. Уравнения относительно возмущений параллельных течений линейно-вязкой жидкости в случае непрерывного изменения вязкости и плотности поперек потока приведены в [4]. Попытка решения гидродинамической задачи с учетом возмущения вязкости содержится в работе [5]; однако в уравнениях для возмущений вследствие упрощений были отброшены члены, учитывающие возмущения вязкости.



Фиг. 1

В рассматриваемой здесь квазистатической постановке в случае учета возмущения плотности и вязкости уравнение относительно амплитуд возмущений представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, аналитическое решение которого весьма затруднительно, даже при длинноволновых возмущениях. В связи с этим здесь исследуется устойчивость слоистой модели; вязкость и плотность постоянны в пределах каждого слоя. Аналогичная гидродинамическая задача в длинноволновом приближении рассмотрена в работе [6].

В настоящей работе в квазистатической постановке для двуслойной модели построено точное решение, которое выявило существенное влияние на устойчивость вязкости нижнего слоя. Неустойчивость в основном наблюдается, когда нижний слой выполняет роль смазки.

1. Рассмотрим медленное стационарное стекание под действием силы тяжести N-слойной несжимаемой линейно-вязкой жидкости по неограниченной наклонной плоскости (фиг. 1). Плотность ρ_j и вязкость μ_j в пределах j-го слоя предполагаются постоянными. Уравнения равновесия, неразрывности и соотношения напряжения — скорости деформаций соответственно в случае плоской деформации имеют вид в безразмерных переменных

$$-\partial p_j/\partial x+\partial s_{xxj}/\partial x+\partial s_{xyj}/\partial y+r_j=0 \tag{1.1}$$

$$-\partial p_j/\partial y+\partial s_{xyj}/\partial x+\partial s_{yyj}/\partial y-r_j\operatorname{ctg}\alpha=0$$

$$\partial u_j/\partial x+\partial v_j/\partial y=0$$

$$s_{xxj}=\frac{2}{k}m_j\frac{\partial u_j}{\partial x},\quad s_{yyj}=\frac{2}{k}m_j\frac{\partial v_j}{\partial y},\quad s_{xyj}=\frac{1}{k}m_j\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}+\frac{\partial v_j}{\partial x}\right)$$

$$(j=1,2,\ldots,N)$$

(1.2)
$$(x, y) = (x^*, y^*)/h, \quad (u_j, v_j) = (u_j^*, v_j^*)/U$$
$$U = \rho_1 g h^2 \sin\alpha / k\mu_1, \quad t = t^* U/h$$
$$\delta_j = \sum_{k=1}^{j} h_k/h, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_N = 1$$
$$(s_{xxj}, s_{xyj}, s_{yyj}, p_j) = (\overset{*}{s}_{xxj}, \overset{*}{s}_{xyj}, \overset{*}{s}_{yyj}, p_j^*)/\rho_1 g h \sin\alpha$$
$$k = \left[\frac{\mu_1}{\rho_1 g h^2 \sin\alpha} \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{N} \int_{h_{j-1}}^{h_j} u_j^*(y)\, dy\right]^{-1} \qquad (h_0 = 0)$$

Здесь p_j — гидростатическое давление; $s_{xxj}, \ldots$ — компоненты девиатора тензора напряжений; x, y — координаты ортогональной декартовой системы; u_j, v_j — компоненты вектора скоростей смещений; $r_j = \rho_j/\rho_1$, $m_j = \mu_j/\mu_1$; h — толщина слоя; g — ускорение силы тяжести; U — средняя скорость стекания (размерные переменные отмечены звездочкой).

Предполагается, что на плоской свободной поверхности напряжения отсутствуют, на границах разделов слоев непрерывны скорости смещений, нормальное и касательное напряжения, а на подстилающей поверхности выполняется условие прилипания и непротекания.

Уравнениям (1.1) и сформулированным граничным условиям удовлетворяет невозмущенное решение

(1.3)
$$\overset{\circ}{s}_{xyN} = r_N(1-y), \quad \overset{\circ}{s}_{xyj} = r_j(\delta_j - y) + \overset{\circ}{s}_{xy\,j+1}(\delta_j)$$
$$u_1^\circ = k[(\delta_1 - {}^1/_2 y) y + \overset{\circ}{s}_{xy1}(\delta_1) y]$$
$$\overset{\circ}{u}_{j+1} = k\left\{\frac{r_{j+1}}{m_{j+1}}[\delta_{j+1}(y-\delta_j) - {}^1/_2(y^2 - \delta_j^2)] + \frac{1}{m_{j+1}} \overset{\circ}{s}_{xy\,j+1}(\delta_{j+1})(y-\delta_j)\right\} + u_j^\circ(\delta_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1)$$
$$p_j^\circ = \overset{\circ}{s}_{xyj} \operatorname{ctg}\alpha, \quad \overset{\circ}{s}_{xxj} = \overset{\circ}{s}_{yyj} = v_j^\circ = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

2. Наложим на основное течение (1.3) малые нестационарные возмущения. Составляющие результирующего течения будут

(2.1)
$$u_j = u_j^\circ + u_j', \ldots, \quad p_j = p_j^\circ + p_j', \quad s_{xxj} = \overset{\circ}{s}_{xxj} + s_{xxj}', \ldots,$$

где штрих относится к приращениям величин.

Следует подчеркнуть, что в общей постановке уравнения возмущенного движения должны содержать приращения инерционных членов. Однако рассматриваемые течения слоев льда и снега характеризуются весьма малыми числами Рейнольдса (порядка 10^{-14} и 10^{-15}). Поэтому приращения инерционных сил существенно меньше приращений сил давления и сил вязкости по крайней мере для возмущений с частотой, не превышающей 10 *кгц*.

В связи с этим в данной статье приращения инерционных сил не принимаются во внимание. Поскольку в общей постановке решение задачи можно представить в виде ряда по неотрицательным степеням числа Рейнольдса, то полученное решение можно рассматривать как приближение нулевого порядка.

Уравнения равновесия относительно приращений примут вид

$$-\partial p_j'/\partial x+\partial s'_{xxj}/\partial x+\partial s'_{xyj}/\partial y=0 \tag{2.2}$$

$$-\partial p_j'/\partial y+\partial s'_{xyj}/\partial x+\partial s'_{yyj}/\partial y=0$$

В силу линейности уравнение неразрывности и соотношения напряжения — скорости деформации имеют тот же вид, что и уравнения (1.1).

Зададим безразмерную функцию тока в виде

$$\psi_j(x, y, t)=\varphi_j(y)\exp\{i\omega(x-ct)\} \tag{2.3}$$

Здесь $\varphi_j(y)$ — комплексная амплитуда, ω — волновое число, c — комплексная безразмерная скорость волны.

Подставляя (2.3) в уравнения равновесия и граничные условия, получим следующую задачу о собственных значениях:

$$\varphi_j^{\mathrm{IV}}(y)-2\omega^2\varphi_j''(y)+\omega^4\varphi_j(y)=0 \tag{2.4}$$
$$(j=1, 2, \ldots, N)$$

$$\varphi_1(0)=\varphi_1'(0)=0, \qquad \varphi_j(\delta_j)-\varphi_{j+1}(\delta_j)=0 \tag{2.5}$$

$$d_j[\varphi_j'(\delta_j)-\varphi'_{j+1}(\delta_j)]+[u_j^{\circ\prime}(\delta_j)-u^{\circ\prime}_{j+1}(\delta_j)]\varphi_j(\delta_j)=0$$

$$d_j[m_j\varphi_j''(\delta_j)-m_{j+1}\varphi''_{j+1}(\delta_j)-\omega^2(m_{j+1}-m_j)\varphi_j(\delta_j)]+$$

$$+k[s^{\circ\prime}_{xyj}(\delta_j)-s^{\circ\prime}_{xyj+1}(\delta_j)]\varphi_j(\delta_j)=0$$

$$d_j\{m_j\varphi_j'''(\delta_j)-m_{j+1}\varphi'''_{j+1}(\delta_j)-3\omega^2[m_j\varphi_j'(\delta_j)-m_{j+1}\varphi'_{j+1}(\delta_j)]\}+ \tag{2.6}$$

$$+i\omega k[p_j^{\circ\prime}(\delta_j)-p^{\circ\prime}_{j+1}(\delta_j)]\varphi_j(\delta_j)=0 \qquad (j=1, 2,\ldots, N-1)$$

$$d_Nm_N[\varphi_N''(1)+\omega^2\varphi_N(1)]-kr_N\varphi_N(1)=0 \tag{2.7}$$
$$d_Nm_N[\varphi_N'''(1)-3\omega^2\varphi_N'(1)]-i\omega\operatorname{ctg}\alpha kr_N\varphi_N(1)=0$$
$$(d_j=c-u_j^\circ(\delta_j);\ j=1, 2, \ldots, N)$$

При составлении условий (2.5)—(2.7) привлекалось также кинематическое условие на свободной поверхности и на границах разделов слоев.

Общее решение уравнений (2.4) имеет вид

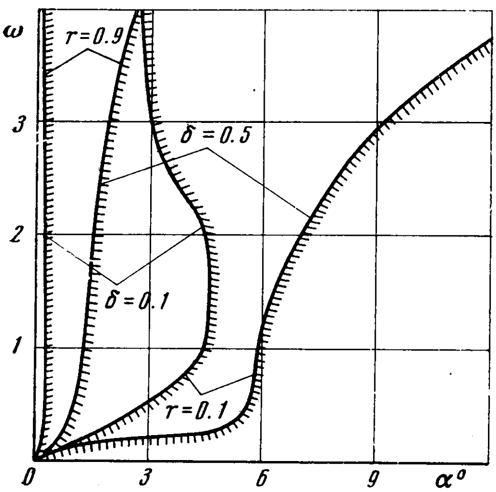
$$\varphi_j(y)=C_j^1\operatorname{ch}\omega y+C_j^2y\operatorname{ch}\omega y+C_j^3\operatorname{sh}\omega y+C_j^4y\operatorname{sh}\omega y \tag{2.8}$$

Условия (2.5)—(2.7) представляют собой линейную алгебраическую систему $4N$ уравнений с $4N$ переменными относительно C_j^1, C_j^2, C_j^3, C_j^4 ($j=1, 2, \ldots, N$). Для существования нетривиального решения необходимо обращение в нуль детерминанта этой системы. Из первого условия (2.5) следует $C_1^1=0$ и порядок детерминанта оказывается равным $4N-1$. Поскольку члены соотношений (2.5)—(2.7), не содержащие множителей d_j, соответственно пропорциональны, можно показать, что результирующее уравнение относительно c будет иметь порядок N.

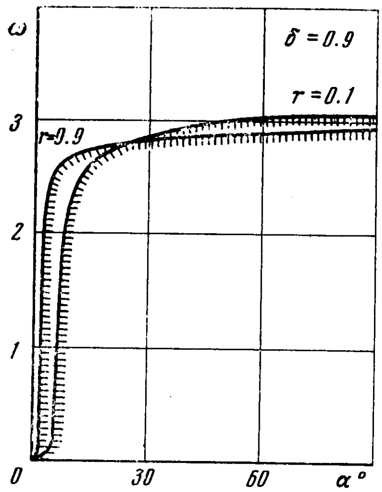
3. Полное решение задачи получено для двуслойной модели ($N=2$). Основная трудность состоит в раскрытии детерминанта седьмого порядка, элементы которого являются функциями c.

В результате получено следующее уравнение относительно c:

$$Ac^2+(B_1+izB_2)c+C_1+z^2C_3+izC_2=0 \tag{3.1}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

где $z=\operatorname{ctg}\alpha$, а A, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3 представляют собой линейные комбинации детерминантов седьмого порядка, элементы которых теперь являются функциями только ω, r, m, δ и здесь не приводятся.

Решая квадратное уравнение (3.1) с комплексными коэффициентами относительно $c=c_r+ic_i$ и выделяя мнимую часть c, получим следующее условие устойчивости:

$$c_i=(1/2A)\{-zB_2\pm(1/2^{1/2})[R+AC_1-B_1^2+z^2(4AC_3+B_2^2)]^{1/2}\}<0 \tag{3.2}$$

$$(R=\{[B_1^2-4AC-z^2(4AC_3+B_2^2)]^2+4z^2(B_1B_2-2AC_2)^2\}^{1/2})$$

Область устойчивости отвечает обоим отрицательным корням $c_i<0$; в области неустойчивости хотя бы один корень $c_i>0$.

Расчеты нейтральных кривых, разделяющих области устойчивости и неустойчивости, были проведены на ЭВМ для следующих значений параметров: r=0.1, 0.9, 1.1, 10, m=0.1, 1.0, 10, δ=0.1, 0.5, 0.9.

В случае $r=m=1$ наблюдается устойчивость при любых ω и α, что согласуется с результатом работы [3]. Оказалось, что если верхний слой более плотный и более вязкий ($r>1$, $m>1$), то всегда имеет место неустойчивость основного течения. С другой стороны, если верхний слой менее плотный и менее вязкий ($r<1$, $m<1$), то основное течение устойчиво при любых δ, ω, α. В остальных случаях возможно существование областей устойчивости и неустойчивости. Наибольший интерес представляет случай, когда нижний слой выполняет роль смазки ($m>1$). Случай $r=1$, $m\neq1$ требует специального рассмотрения, поскольку $r=1$ — особая точка кривой нейтральной устойчивости. Графики нейтральных кривых, иллюстрирующие влияние смазки, показаны на фиг. 2, 3 ($m=10$), область неустойчивости заштрихована. Оказалось, что при фиксированном $r<1$ область неустойчивости расширяется с ростом m ($m>1$), т. е. с увеличением смазки. При фиксированном $m>1$ область неустойчивости увеличивается с ростом r ($r<1$). Зависимость от δ менее существенна, хотя здесь с увеличением относительной толщины подстилающего слоя область неустойчивости суживается.

Таким образом показано, что существование скачков плотности и вязкости на границе раздела слоев является причиной неустойчивости системы в целом относительно возмущений вида (2.3). Именно на границе раздела проявляется взаимосвязь сил тяжести и сил вязкости. Основной результат состоит в том, что неустойчивость слоя в квазистатической постановке возможна при условии прилипания на подстилающей поверхности. При этом неустойчивость для рассмотренных значений параметров наблюдается, если нижний слой выполняет роль смазки, что качественно согласуется с механизмом неустойчивости, развитым в работе [3], где на подстилающей поверхности выставлялось условие проскальзывания.

Московский государственный университет

Поступила 2 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической неустойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. *Божинский А. Н.* Критерии обрушения снежных лавин. Итоги науки, Сер. гидрология суши, гляциология, Изд. ВИНИТИ, 1968.
3. *Божинский А. Н.* Об устойчивости квазистатического состояния равновесия вязкого слоя на наклонной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
4. *Drazin P. G.* On stability of parallel flow an incompressible fluid of variable density and viscosity. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1962, vol. 58, pt 4.
5. *Семенов Е. В.* О развитии волн на поверхности пленок с переменной вязкостью, обтекаемых потоком газа. Изв. АН СССР, ОТН, 1964, № 5.
6. *Kao T. W.* Role of viscosity stratification in the stability of two layer flow down an incline plane. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt 3.