2. *Сухнев В. А.* Об определении поправок к показаниям насадков полного напора в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
3. *Казначеев В. П., Сухнев В. А.* К применению высокочувствительных однокомпонентных весов крутильного типа для измерения малых сил в аэродинамике разреженных газов. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 1.
4. Физические измерения в газовой динамике и при горении. М., Изд-во иностр. лит., 1957.

УДК 533.6.011.35

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛАБОГО РАЗРЫВА С ДОЗВУКОВЫМ ТЕЧЕНИЕМ ЗА УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Л. Н. ЯКИМЕНКО

(*Москва*)

Рассматривается плоское течение идеального газа вблизи точки пересечения ударной волны и характеристики, несущей слабый разрыв. Поток за ударной волной дозвуковой.

Предполагается, что ударная волна находится вне минимальной области влияния смешанного течения, так что слабый разрыв от нее не отражается. Для простоты рассматривается диапазон малых сверхзвуковых скоростей набегающего потока, когда изменения энтропии на ударной волне несущественны, а движение газа описывается уравнениями трансзвуковых течений.

Положим для определенности, что слабый разрыв распространяется по характеристике первого семейства, а ударная волна отклоняет вектор скорости вверх (в системе координат, связанной с вектором скорости набегающего потока в некоторой точке O). Ударная волна и линия слабого разрыва разбивают окрестность точки O на секторы 1, 2, 3 (1, 2 – набегающий поток до и после линии слабого разрыва соответственно, 3 – область за ударной волной).

Уравнения трансзвуковых течений имеют вид

$$UU_x=v_y, \quad U_y=v_x, \quad (U=(\lambda-1)\,(k+1)^{1/3}) \tag{1}$$

Здесь λ – коэффициент скорости, v – угол наклона вектора скорости, k – показатель адиабаты.

На ударной волне имеют место граничные условия [1]

$$v-v_\infty=\sqrt{\frac{U_\infty+U}{2}}\,(U_\infty-U) \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=(k+1)^{-1/3}\sqrt{\frac{2}{U_\infty+U}} \tag{3}$$

Здесь индексом ∞ отмечены параметры потока перед ударной волной.

Согласно теории Прандтля – Глауэрта в окрестности точки O за ударной волной получим

$$U_x{}^*=-v_y{}^*, \quad U_y{}^*=v_x{}^* \tag{4}$$
$$(U=U_O+U^*, \quad v=v_O+\sqrt{-U_O}\,v^*, \quad U^*\ll U_O, \quad v^*\ll v_O)$$

В дальнейшем звездочки опускаем.

Обозначим через S длину дуги ударной волны, отсчитываемую от точки O.

Будем рассматривать класс течений перед ударной волной, когда по линии слабого разрыва распространяется конечный разрыв первых производных составляющих скорости. Так как в непрерывном потоке ударная волна гладкая [2], имеем

$$U_\infty=U_\infty{}^\circ+a_iS+\ldots,\ v_\infty=v_\infty{}^\circ+b_iS+\ldots\ (i=1,2) \tag{5}$$

Индексы 1, 2 указывают параметры в секторе *1* при $S>0$ и в секторе *2* при $S<0$.

Повернем оси координат на угол φ, равный углу наклона ударной волны к оси y в точке O.

$$x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi, \quad y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi$$

Уравнения (4) инвариантны относительно поворота осей координат.

Подставляя (4), (5) в (2), (3), получим на ударной волне (т. е. в первом приближении на касательной к ней) вблизи точки O

$$v + AU = \begin{cases} c_1 y + O(y) & (S>0) \\ c_2 y + O(y) & (S<0) \end{cases} \tag{6}$$

$$A = \frac{U_\infty{}^\circ + 3U_O}{2\sqrt{2}\sqrt{-U_O(U_\infty{}^\circ + U_O)}}, \quad c_i = b_i + a_i \frac{U_O + 3U_\infty{}^\circ}{2\sqrt{2}\sqrt{U_\infty{}^\circ + U_O}} \quad (i=1,2) \tag{7}$$

Если продифференцировать условие (6) по y (по направлению ударной волны), то получим граничное условие с разрывом первого рода в точке O (предполагается, что асимптотическое разложение (5) допускает почленное дифференцирование). Этому граничному условию, которое можно рассматривать как часть граничного условия некоторой задачи Дирихле, соответствует единственное ограниченное решение [2]; описывающее «источник» величины $\partial/\partial y\ (v+AU)$.

Отсюда

$$v+AU = m[y \operatorname{arc\,tg} y/x + {}^1/_2 x \ln (x^2+y^2)] \quad (m=(c_1-c_2)/\pi) \tag{8}$$

Используя (4), получим

$$U = \frac{m}{A^2+1}\left[(Ay-x)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - (Ax+y)\ln\sqrt{x^2+y^2}\right] + \ldots \tag{9}$$

$$v = \frac{m}{A^2+1}\left[(y+Ax)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + (Ay-x)\ln\sqrt{x^2+y^2}\right] + \ldots$$

Найденная из (3), (5) кривизна ударной волны имеет в точке O логарифмическую особенность. Направления выпуклости ударной волны по обе стороны точки O одинаковы и определяются знаком разности $(U_\infty)_2 - U_\infty{}^\circ$.

Аналогичным способом можно исследовать случаи бесконечных разрывов первых производных составляющих скорости. Возможны следующие случаи:

1. в точке O производная как справа, так и слева обращается в бесконечность;

2) в точке O производная справа (слева) имеет степенную особенность, производная слева (справа) конечна.

В первом случае решение представляется в виде

$$v+AU = B_1(x^2+y^2)^{n_1/2}\cos\left(\theta_1 + n_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) +$$

$$+B_2(x^2+y^2)^{n_2/2}\cos\left(\theta_2 + n_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) + \ldots$$

$$\theta_1 = {}^1/_2\pi(1+n_1),\ \theta_2 = {}^1/_2\pi(1-n_2) \tag{10}$$

$$B_1 = \frac{c_1}{\cos {}^1/_2\pi(1+2n_1)}, \quad B_2 = \frac{c_2}{\cos {}^1/_2\pi(1-2n_2)}$$

$$n_1 \neq n_2, \quad 0<n_1<1, \quad 0<n_2<1$$

Здесь A, c_1, c_2 даны в соотношениях (7).

Подставив в (4), получим

$$U = \frac{1}{A^2+1}\left\{\sum_{i=1}^{2} B_i|x|^{n_i}\sin\theta_i + A\sum_{i=1}^{2} B_i|x|^{n_i}\cos\theta_i + \right. \tag{11}$$

$$+x\sum_{i=1}^{2} B_i n_i \int_0^y \frac{\cos(\theta_i + n_i \operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_i}}d\eta + \sum_{i=1}^{2} B_i n_i \int_0^y \frac{\eta\sin(\theta_i + n_i \operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_i}}d\eta +$$

$$\left. + A\left[\sum_{i=1}^{2} B_i n_i \int_0^y \frac{\eta\cos(\theta_i + n_i \operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_i}}d\eta - x\sum_{i=1}^{2} B_i n_i \int_0^y \frac{\sin(\theta_i + n_i \operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_i}}d\eta\right]\right\}$$

(12)
$$v=\frac{1}{A^2+1}\left\{\sum_{i=1}^{2}B_i|x|^{n_i}\cos\theta_i - A\sum_{i=1}^{2}B_i|x|^{n_i}\sin\theta_i + \right.$$
$$+\sum_{i=1}^{2}B_in_i\int_0^y\frac{\eta\cos(\theta_i+n_i\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_i}}d\eta -$$
$$-x\sum_{i=1}^{2}B_in_i\int_0^y\frac{\sin(\theta_i+n_i\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_i}}d\eta -$$
$$-A\left[x\sum_{i=1}^{2}B_in_i\int_0^y\frac{\cos(\theta_i+n_i\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_i}}d\eta + \right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i=1}^{2}B_in_i\int_0^y\frac{\eta\sin(\theta_i+n_i\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_i}}d\eta\right]\right\}\qquad(q_i=1-n_i/2)$$

Во втором случае решение имеет вид

(13)
$$v+AU=m[y\operatorname{arc\,tg}y/x-{}^1/_2x\ln(x^2+y^2)]+B_2(x^2+y^2)^{n_2/2}\cos(\theta+$$
$$+n_2\operatorname{arc\,tg}y/x)+\ldots$$
$$\theta=\frac{\pi}{2}(1-n_2),\qquad m=\frac{2c_1}{\pi},\qquad B_2=\frac{c_2}{\cos{}^1/_2\pi(1-2n_2)}$$
$$0<n_2<1$$

(14)
$$U=\frac{m}{A^2+1}[(Ay-x)\operatorname{arc\,tg}y/x-{}^1/_2(Ax+y)\ln(x^2+y^2)]+$$
$$+\frac{B_2n_2}{A^2+1}\left\{\frac{|x|^{n_2}}{n_2}(A\cos\theta+\sin\theta)+x\int_0^y\frac{\cos(\theta+n_2\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta)^{q_2}}d\eta+\right.$$
$$+\int_0^y\frac{\eta\sin(\theta+n_2\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_2}}d\eta+A\int_0^y\frac{\eta\cos(\theta+n_2\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_2}}d\eta-$$
$$\left.-Ax\int_0^y\frac{\sin(\theta+n_2\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_2}}d\eta\right\}\qquad(q_2=1-n_2/2)$$

(15)
$$v=\frac{m}{A^2+1}\{(y+Ax)\operatorname{arc\,tg}y/x+{}^1/_2(Ay-x)\ln(x^2+y^2)\}+$$
$$+\frac{B_2n_2}{A^2+1}\left\{\frac{|x|^{n_2}}{n_2}(\cos\theta-A\sin\theta)+\int_0^y\frac{\eta\cos(\theta+n_2\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_2}}d\eta-\right.$$
$$-x\int_0^y\frac{\sin(\theta+n_2\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_2}}d\eta-Ax\int_0^y\frac{\cos(\theta+n_2\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_2}}d\eta-$$
$$-A\int_0^y\frac{\eta\sin(\theta+n_2\operatorname{arc\,tg}\eta/x)}{(x^2+\eta^2)^{q_2}}d\eta$$

Кривизна ударной волны, найденная из решений (11), (14), меняет знак в точке O при $^1/_2 \leqslant n_i < 1$. Направления выпуклости ударной волны определяются знаком разности $(U_\infty)_2 - U_\infty^0$.

В заключение автор благодарит Э. Г. Шифрина за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 4 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.

УДК 533.6.011.55+536.244

ЗАТУПЛЕННЫЕ ПО СФЕРЕ КОНУСЫ МИНИМАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ

И. Н. МУРЗИНОВ

(*Москва*)

На основе результатов точных численных расчетов ламинарного пограничного слоя [1, 2] определены радиус сферического затупления и угол полураствора конуса, при которых конвективные тепловые потоки к лобовой и боковой поверхностям достигают минимума при заданных длине и миделе тела.

1. Задача об определении тела минимальных тепловых потоков в точной постановке пока наталкивается на большие трудности вследствие громоздкости системы определяющих задачу условий. Поэтому часто используется упрощенный подход к этой проблеме, заключающийся в сравнительном анализе или ряда заранее заданных форм тел [3], или задача решается для некоторого класса тел. Так, в работах [4, 5] ставилась задача об определении оптимального радиуса затупленного тела при заданном угле полураствора конуса и его объеме; во второй из работ в расчет принималась излучаемая поверхностью тела энергия. В этих работах определен оптимальный радиус затупления конуса с углом полураствора $\theta_k = 10°$, распределение тепловых потоков по которому бралось на основе результатов точных численных расчетов.

В работах [6, 7] сделана попытка получить решение вариационной задачи о форме тела минимальных тепловых потоков. Однако в силу громоздкости строгого математического аппарата для определения тепловых потоков при расчете газодинамических параметров на поверхности тела произвольной формы использовалась ньютонианская теория для распределения давления. В этой связи по поводу результатов работ [6, 7] следует сделать некоторые замечания. Известно, что при ламинарном и турбулентном законах теплообмене тепловые потоки пропорциональны некоторой степени произведения плотности на скорость газа на внешней границе пограничного слоя. Поэтому, не решая задачи, сразу можно сказать, что в ньютонианской постановке оптимальным телом будет цилиндр (пластина заданной толщины) с плоским затуплением. Действительно, на затуплении такого тела тепловой поток равен нулю вследствие равенства нулю скорости газа, на боковой поверхности тепловой поток равен нулю вследствие равенства нулю давления (а значит, и плотности).

Таким образом, на цилиндре с плоским торцом реализуется абсолютный минимум теплового потока в ньютонианской постановке. Следует заметить, что уже при использовании модифицированной теории Ньютона тепловой поток на боковой поверхности цилиндра с плоским затуплением не равен нулю при конечных числах Маха в набегающем потоке.

Видимо, исходя из этих предпосылок, в работах [6, 7] класс рассматриваемых тел ограничивается формами с плоским затуплением. При этом используется модифицированная ньютонианская теория для распределения давления по боковой поверхности, а расчет тепловых потоков на плоском торце базируется на более детальном анализе течения [8]. Однако использование ньютонианского распределения давления по боковой поверхности тел с плоским затуплением (и вообще затупленных) не является корректным на представляющих наибольший интерес расстояниях от носка [9]. Поэтому результаты работ [6, 7] нуждаются в уточнении.