

УДК 532.546

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Н. Н. ВЕРИГИН, В. С. САРКИСЯН, А. В. ШИБАНОВ

(Москва)

Рассмотрим линейную (одномерную) задачу о вытеснении тяжелой жидкостью несмешивающейся с ней легкой в горизонтальном пласте постоянной мощности при одинаковой вязкости обеих жидкостей и постоянном забойном давлении в галерее.

Область фильтрации двух жидкостей разделяется на три зоны: первая из них насыщена только нагнетаемой жидкостью; вторая — как нагнетаемой, так и вытесняемой, а третья — только вытесняемой жидкостью (см. фигуру).

Предположим, что породы пласта являются предельно анизотропными, причем проницаемость их в горизонтальных направлениях ($k_x=k$) является конечной, а в вертикальных (k_y) равна бесконечности [$1-4$].

Имея в виду, что вертикальная составляющая скорости $v_y = -k_y \mu^{-1} (\partial p / \partial y + \gamma)$ конечна, получим что давление p в сечении $x = \text{const}$ распределено гидростатически, а горизонтальная составляющая скорости v_x одинакова по высоте. Последнее допущение ранее принималось для жидкостей одинаковой плотности в работе [5].

Решение этой задачи для границы раздела в случае жесткого режима фильтрации рассмотрено в работах [2-8]. Для такой анизотропной среды в случае жесткого режима фильтрации уравнения неразрывности и условие на границе раздела жидкостей для зоны II записывается следующим образом:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{\mu} y \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] = n_0 \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{\mu} (m-y) \frac{\partial p_2}{\partial x} \right] = -n_0 \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$(3) \quad p_1 = p_2 + \Delta \gamma y + m \gamma_2, \quad \Delta \gamma = \gamma_1 - \gamma_2 > 0$$

где k — проницаемость пород пласта, μ — вязкость жидкостей, y — ордината границы раздела жидкостей, n_0 — пористость пород, p_1 и p_2 — давление, соответственно, на подошве и кровле пласта, m — мощность пласта, γ_1 и γ_2 — объемные веса нагнетаемой и вытесняемой жидкостей, t — время.

Дифференцируя (3) по x , подставляя результат в (1) и суммируя (1) и (2), получим

$$(4) \quad \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = -\frac{\Delta \gamma}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

Интегрируя (4) по x , найдем

$$(5) \quad p_2 = -\frac{\Delta \gamma}{2m} y^2 + A_2 x + B_2$$

где A_2 и B_2 — постоянные интегрирования.

Подставляя p_2 из (5) в (3), имеем

$$(6) \quad p_1 = -\frac{\Delta \gamma}{2m} y^2 + A_2 x + B_2 + \Delta \gamma y + \gamma_2 m$$

Для зон I и III давления на подошве пласта соответственно будут:

$$(7) \quad p_I = A_1 x + B_1, \quad p_{III} = A_3 x + B_3$$

В дальнейшем примем, что в зонах I и II режим фильтрации является жестким, а в зоне III — упругим. При этом упругость в зоне III будем учитывать, пользуясь методом К. Э. Лембке, согласно которому давление p_{III} должно удовлетворять уравнению Лапласа и соответствовать (7). Для определения коэффициентов A_{1-3} , B_{1-3} имеем следующие условия:

$$(8) \quad p_I(0, t) = p_0 = \text{const}, \quad p_{III}(L, t) = p_e = \text{const}$$

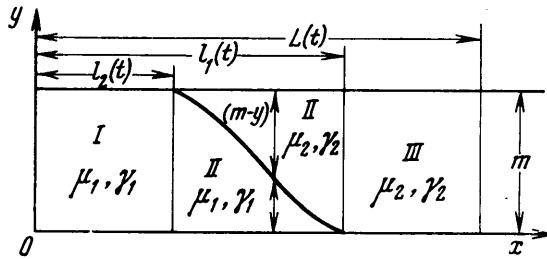
$$(9) \quad p_I(l_2, t) = p_2(l_2, t) + \gamma_1 m, \quad p_{III}(l_1, t) = p_1(l_1, t)$$

где p_0 — забойное давление в галерее, p_e — давление в пласте в естественных условиях, $l_{1,2}$ — абсциссы границы раздела соответственно на подошве и кровле пласта, L — абсцисса точки, где давление равно естественному.

Учитывая, что при линейной зависимости $p_{I,III}$ от x по (7) расход потока является функцией только времени, и приравняв расходы на границах зон I и II, а также II и III, получим еще два уравнения

$$(10) \quad \frac{kt}{\mu} \frac{\partial p_I}{\partial x} = \frac{k}{\mu} \left[y \frac{\partial p_I}{\partial x} + (m-y) \frac{\partial p_2}{\partial x} \right] = \frac{kt}{\mu} \frac{\partial p_{III}}{\partial x}$$

Таким образом, для определения A_{1-3} и B_{1-3} имеем шесть уравнений (8) — (10).



Подставляя сюда значения $\partial p_i / \partial x$ ($i=I, 1, 2, III$), из (5) — (7) найдем

$$(11) \quad A_1 = A_2 = A_3 = A(t)$$

Для нахождения $l_{1,2}$ и L имеем кинематические условия

$$(12) \quad n_0 \frac{dl_1}{dt} = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p_1(l_1, t)}{\partial x}, \quad n_0 \frac{dl_2}{dt} = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p_2(l_2, t)}{\partial x}$$

$$(13) \quad \omega = \beta^* \int_{l_1}^L (p_{III} - p_e) dx = - \frac{k}{\mu} \int_0^t \frac{\partial p_{III}(l_1, t)}{\partial x} dt, \quad \beta^* = \alpha_1 n_0 + \alpha_2 (1 - n_0)$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты сжимаемости вытесняемой жидкости и породы, β^* — коэффициент упругости пласта.

Условия (12) идентичны тем, что принимаются при исследовании инъеции жидкости в пористую среду без учета различия плотностей нагнетаемой и вытесняемой жидкостей [9], а условие (13) является общепринятым для метода смены стационарных состояний.

Из первых условий (8) и (9) находим

$$(14) \quad B_1 = p_0, \quad B_2 = p_0 - \gamma_1 m + 0.5 m \Delta \gamma$$

Коэффициент B_3 находится из второго условия (9)

$$(15) \quad B_3 = p_0 - 0.5 m \Delta \gamma$$

Из второго условия (8) получим

$$(16) \quad A = -\psi / L, \quad \psi = p_0 - p_e - 0.5 m \Delta \gamma$$

Дебит галереи равен

$$(17) \quad q = - \frac{kt}{\mu} \frac{\partial p_I}{\partial x} = - \frac{kt}{\mu} A = \frac{kt}{\mu} \frac{\psi}{L}$$

Для нахождения границы раздела жидкостей подставим значение $\partial p_2 / \partial x$ из (5) в выражение (2)

$$(18) \quad \frac{k \Delta \gamma t}{\mu n_0} \left[\bar{y} (1 - \bar{y}) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + (1 - 2\bar{y}) \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right)^2 + \frac{A_2}{\Delta \gamma t} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right] = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}, \quad \bar{y} = \frac{y}{m}$$

Пренебрегая здесь членом, содержащим квадрат производной y_x' и осредняя коэффициент при y_x'' , получим

$$(19) \quad D \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - \frac{q}{mn_0} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}$$

$$(20) \quad D = \frac{km\Delta\gamma\alpha}{\mu n_0}, \quad \alpha = \int_0^1 \bar{y}(1-\bar{y}) d\bar{y} = 1/6$$

При заданном постоянном забойном давлении

$$(21) \quad L = \xi \sqrt{t} \quad (\xi = \text{const})$$

Тогда из выражения (17) имеем

$$(22) \quad \frac{q}{mn_0} = \frac{M \sqrt{D}}{\sqrt{t}}, \quad M = \frac{k\psi}{\mu n_0 \xi \sqrt{D}}$$

Уравнение (19) в этом случае запишется следующим образом

$$(23) \quad D \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - \frac{M \sqrt{D}}{\sqrt{t}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}$$

Оно имеет автомодельное решение

$$(24) \quad \bar{y} = C_1 \operatorname{erf}(\lambda - M) + C_2, \quad \lambda = x/2\sqrt{Dt}$$

Коэффициенты $C_{1,2}$ определяются из граничных условий

$$(25) \quad x = l_1(t), \bar{y} = 0; \quad x = l_2(t), \bar{y} = 1$$

$$(26) \quad C_1 = \frac{1}{\operatorname{erf}(\lambda_2 - M) - \operatorname{erf}(\lambda_1 - M)}, \quad C_2 = -\frac{\operatorname{erf}(\lambda_1 - M)}{\operatorname{erf}(\lambda_2 - M) - \operatorname{erf}(\lambda_1 - M)}$$

С учетом (20) выражение (24) примет вид

$$(27) \quad \bar{y} = \frac{\operatorname{erf}(\lambda - M) - \operatorname{erf}(\lambda_1 - M)}{\operatorname{erf}(\lambda_2 - M) - \operatorname{erf}(\lambda_1 - M)}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{l_{1,2}(t)}{2\sqrt{Dt}} = \text{const}$$

Решение (27) является уравнением границы раздела жидкостей $\bar{y} = \bar{y}(x, t)$; постоянные $\lambda_{1,2}$ будут определены ниже.

Для нахождения расстояния L , где давление равно естественному p_e , рассмотрим условие (13)

$$(28) \quad \omega = \int_{l_1}^L (p_{III} - p_e) dx = \frac{\psi}{2L} (L - l_1)^2$$

Подставляя сюда значения L по (21) и l_1 по (27), найдем

$$(29) \quad \omega = \frac{\psi(\xi - \beta)^2}{2\xi} \sqrt{t}, \quad \beta = 2\lambda_1 \sqrt{D}$$

Согласно (11) имеем

$$(30) \quad \frac{\partial p_{III}}{\partial x} = A_{1-3} = A = -\frac{\psi}{L} = -\frac{\psi}{\xi \sqrt{t}}$$

Подставив (29) и (30) в выражение (13), найдем

$$(31) \quad \xi - \beta = 2\sqrt{a}, \quad a = k/\mu\beta^*$$

где a — пьезопроводность. Подставляя в (31) значения ξ по (21) и β по (29) и (27), получим

$$(32) \quad L-l_1=2\sqrt{\frac{k}{\mu\beta^*}t}=2\sqrt{\gamma at}$$

Для нахождения параметров $\lambda_{1,2}$ используем соотношения (12) и (27). Из второго равенства (27), а также из соотношений (5) и (6) находим

$$(33) \quad \frac{dl_{1,2}}{dt}=\lambda_{1,2}\sqrt{\frac{D}{t}}, \quad \frac{\partial p_{1,2}(l_{1,2})}{\partial x}=A\pm m\Delta\gamma\frac{C_1}{\sqrt{\pi Dt}}e^{-(\lambda_{1,2}-M)^2}$$

Здесь верхний знак соответствует индексу 1, а нижний — индексу 2 при p , t и λ .

Подставляя (33) в (12), получим систему двух трансцендентных уравнений для определения $\lambda_{1,2}$

$$(34) \quad \lambda_{1,2}=M\mp\frac{C_1}{a\sqrt{\pi}}\exp[-(\lambda_{1,2}-M)^2]$$

где C_1 определяется по (26), а M — по (22).

Длина границы раздела находится по формуле

$$(35) \quad l=l_1-l_2=2\sqrt{Dt}(\lambda_1-\lambda_2)$$

Рассмотрим далее более строгое решение этой задачи, когда упругий режим в третьей зоне описывается уравнением Фурье. В этом случае давления $p_{I, 1,2}$ в зонах I и II определяются выражениями (5) — (7).

В третьей зоне уравнение фильтрации и его решение

$$(36) \quad \frac{\partial^2 p_{III}}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial p_{III}}{\partial t}$$

$$(37) \quad p_{III}=A_3 \operatorname{erf} \lambda_0+B_3, \quad \lambda_0=\frac{x}{2\sqrt{\gamma at}}$$

Граничные условия для определения A_{1-3} , B_{1-3} следующие

$$(38) \quad p_I(0, t)=P_0=\operatorname{const}, \quad p_{III}(\infty, t)=p_e=\operatorname{const}$$

$$(39) \quad p_1(l_1, t)=p_{III}(l_1, t), \quad p_2(l_2, t)=p_I(l_2, t)-\gamma_1 m,$$

$$(40) \quad q_I=q_{II}=q_{III}(l_1)$$

где q_I и q_{II} — расходы жидкости в зонах I и II, $q_{III}(l_1)$ — расход в сечении на границе зон II и III.

Коэффициенты A_{1-3} , B_{1-3} из (38) — (40) при значениях $p_{1,2, I}$ по (5) — (7) и p_{III} по (37) будут

$$(41) \quad A_1=A_2=\frac{A_3}{\sqrt{\pi at}}e^{-\lambda_{01}^2}, \quad \lambda_{01}=\frac{l_1}{2\sqrt{\gamma at}}$$

$$(42) \quad A_3=-\frac{\psi\sqrt{\pi}}{2\lambda_{01}\exp(-\lambda_{01}^2)+\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\lambda_{01}}, \quad \psi=p_0-p_e-0.5m\Delta\gamma$$

$$(43) \quad B_1=P_0, \quad B_2=P_0-\gamma_1 m+0.5m\Delta\gamma$$

$$(44) \quad B_3=p_e+\frac{\psi\sqrt{\pi}}{2\lambda_{01}\exp(-\lambda_{01}^2)+\sqrt{\pi}\operatorname{erfc}\lambda_{01}}$$

Граница раздела жидкостей $\bar{y}=\bar{y}(x, t)$ определяется из уравнения (19). Положим в нем

$$(45) \quad \frac{q}{mn_0}=-\frac{k}{n_0\mu}A_2=\frac{M_1}{\sqrt{t}}$$

Вводя сюда значения A_2 из (41), находим

$$(46) \quad M_1 = \frac{\kappa}{2\lambda_{01} + \sqrt{\pi} e^{\lambda_{01}^2} \operatorname{erfc} \lambda_{01}}, \quad \theta = \sqrt{\frac{D}{a}}, \quad \kappa = \frac{k\psi}{n_0\mu \sqrt{aD}}$$

Тогда уравнение (19) примет вид

$$(47) \quad D \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - \frac{M_1 \sqrt{D}}{\sqrt{t}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}, \quad D = \frac{km\Delta\gamma a}{n_0\mu}$$

Решение уравнения (47) при граничных условиях (29) выражается формулами (24)–(27), если в них принимать $M=M_1$, где M_1 находится по (46). Параметры $\lambda_{1,2}$ определяются из кинематических условий (12)

$$(48) \quad \lambda_{1,2} = M_1 \mp \frac{6C_1}{\sqrt{\pi}} \exp[-(\lambda_{1,2} - M_1)^2], \quad \lambda_{01} = \theta\lambda_1$$

Длина границы раздела вычисляется по формуле

$$(49) \quad l = l_1 - l_2 = 2\sqrt{D}t(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Дебит галереи равен

$$(50) \quad q = -\frac{km}{\mu} \frac{\partial p_1(0, t)}{\partial x} = -\frac{km}{\mu} A_1$$

где A_1 выражается по (16) или (41).

Значения параметров $\lambda_{1,2}$, вычисленные по (48) на ЭВМ «Наири», приведены в таблице.

θ	κ	λ_1	λ_2	η
0.003	0.7	1.3327	-0.5428	1.5312
0.003	1.5	1.8635	-0.1709	1.6611
0.003	2	2.2163	0.0404	1.7769
0.01	0.7	1.3326	-0.543	1.5312
0.01	1.5	1.8632	-0.1711	1.6611
0.01	2	2.2156	0.04	1.7767
0.03	0.7	1.332	-0.5435	1.5312
0.03	1.5	1.8603	-0.1728	1.6603
0.5	0.7	1.2426	-0.6154	1.5173
0.5	3	2.1202	-0.015	1.7437

Формулу (49) можно представить в следующем виде:

$$(51) \quad l = \eta \sqrt{\frac{k_\Phi m \Delta\gamma}{n_0 \gamma_2} t}$$

$$(52) \quad \eta = \frac{2}{\sqrt{6}} (\lambda_1 - \lambda_2), \quad k_\Phi = \frac{k\gamma_2}{\mu}$$

Значения η приводятся в таблице.

Из таблицы видно, что в исследованных случаях величина η при $\kappa = \text{const}$ практически не зависит от θ .

Например, при $\kappa = 0.7$ для $\theta = 0.003 - 0.03$ величина $\eta = 1.531$, а для $\theta = 0.5$ величина $\eta = 1.517$. При $\theta = \text{const}$ с увеличением параметра κ значения η возрастают.

Экспериментальные исследования в щелевом лотке [7] показали, что при одинаковых вязкостях и напорах на боковых границах лотка $h = 10.5$ и 15 см величина $\eta = 1.57 - 1.60$, что довольно близко к приведенным в таблице теоретическим значениям $\eta = 1.53 - 1.78$.

Если режим фильтрации во всех зонах считать упругим, то фильтрация описывается системой уравнений

$$(53) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{\mu} y \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] = n_0 \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{k}{a\mu} y \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

$$(54) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{\mu} (m-y) \frac{\partial p_2}{\partial x} \right] = -n_0 \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{k}{a\mu} (m-y) \frac{\partial p_2}{\partial t}$$

$$(55) \quad \frac{\partial^2 p_I}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial p_I}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 p_{III}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial p_{III}}{\partial t}$$

Кроме того, остается в силе зависимость (3). Уравнения (53) и (54) отличаются от (1) и (2) последними слагаемыми в правой части, учитывающими упругие силы в зоне II.

Дифференцируя выражение (3) по x и t и подставляя полученные соотношения в (53), получим

$$(56) \quad \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[y \frac{\partial p_2}{\partial x} + \Delta\gamma y \frac{\partial y}{\partial t} \right] = n_0 \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{k}{a\mu} \left(y \frac{\partial p_2}{\partial t} + \Delta\gamma y \frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

Суммируя (56) и (54), найдем

$$(57) \quad \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\Delta\gamma}{m} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial y}{\partial t} \right]$$

Предположим, что $p_{1,2}$ и y являются функциями только параметра $\lambda = x/2\sqrt{at}$. Тогда вместо (57) получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$(58) \quad p_2'' + 2\lambda p_2' = -\Delta\gamma m^{-1} [(0.5y^2)'' + 2\lambda(0.5y^2)']$$

Интегрируя его, найдем связь между давлением p_2 и координатой границы раздела y

$$(59) \quad p_2 = -\frac{\Delta\gamma}{2m} y^2 + 0.5 \sqrt{\pi} A_2 \operatorname{erf} \lambda + B_2$$

где A_2 и B_2 — постоянные интегрирования.

Вводя p_2 из (59) в (3), получим связь между давлением p_1 и y

$$(60) \quad p_1 = -\frac{\Delta\gamma}{2m} y^2 + 0.5 \sqrt{\pi} A_2 \operatorname{erf} \lambda + B_2 + \Delta\gamma y + \gamma_2 m$$

Для зон I и II интегралы уравнений (55) имеют вид

$$(61) \quad p_I = A_1 \operatorname{erf} \lambda + B_1, \quad p_{III} = A_3 \operatorname{erf} \lambda + B_3$$

Коэффициенты A_{1-3} , B_{1-3} определяются из граничных условий (38), (39), а соотношение (40) для этого случая принимает вид

$$(62) \quad q_I(l_2) = q_{II}(l_2), \quad q_{II}(l_1) = q_{III}(l_1)$$

Коэффициенты A_{1-3} , B_{1-3} равны

$$(63) \quad A_1 = -\psi - 0.5 \sqrt{\pi} \Delta\gamma m [\bar{y}'(\lambda_2) e^{\lambda_2^2} \operatorname{erfc} \lambda_2 + \bar{y}'(\lambda_1) e^{\lambda_1^2} \operatorname{erfc} \lambda_1]$$

$$(64) \quad A_2 = -2\psi / \sqrt{\pi} + m \Delta\gamma [\bar{y}'(\lambda_2) e^{\lambda_2^2} \operatorname{erf} \lambda_2 - \bar{y}'(\lambda_1) e^{\lambda_1^2} \operatorname{erfc} \lambda_1]$$

$$(65) \quad A_3 = -\psi + 0.5 \sqrt{\pi} \Delta\gamma m [\bar{y}'(\lambda_2) e^{\lambda_2^2} \operatorname{erf} \lambda_2 + \bar{y}'(\lambda_1) e^{\lambda_1^2} \operatorname{erf} \lambda_1]$$

$$(66) \quad B_1 = P_0, \quad B_2 = P_0 - \gamma_1 m + 0.5 \Delta\gamma m - 0.5 \sqrt{\pi} \Delta\gamma m \bar{y}'(\lambda_2) e^{\lambda_2^2} \operatorname{erf} \lambda_2$$

$$(67) \quad B_3 = P_e + \psi - 0.5 \sqrt{\pi} \Delta\gamma m [\bar{y}'(\lambda_2) e^{\lambda_2^2} \operatorname{erf} \lambda_2 + \bar{y}'(\lambda_1) e^{\lambda_1^2} \operatorname{erf} \lambda_1]$$

Здесь ψ определяется формулой (16), $\bar{y} = y/m$, $\lambda_{1,2} = l_{1,2}/2\sqrt{at}$. Подставляя эти значения в (59)–(61), получим уравнения пьезометрических кривых. Пренебрегая в (2) произведением производных $(\partial y/\partial x) \cdot (\partial p_2/\partial x)$, получаем

$$(68) \quad \frac{k}{\mu} (1-\bar{y}) \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial p_2}{\partial t} \right) = -n_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}$$

Вводя в (68) значение $\partial^2 P_2 / \partial x^2 - a^{-1} \partial P_2 / \partial t$ по (57) и пренебрегая квадратом производной $(\partial y / \partial x)^2$, найдем следующее уравнение границы раздела жидкостей:

$$(69) \quad a \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{\bar{y}(1-\bar{y}) + \kappa} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = 0, \quad \kappa = \frac{n_0 \mu a}{k \Delta \gamma t}$$

Решение нелинейного уравнения (69) может быть выполнено на ЭВМ. Для получения аналитического решения осредним в (69) коэффициент при y_x "

$$(70) \quad a_s = a \int_0^1 \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{\bar{y}(1-\bar{y}) + \kappa} d\bar{y} = a \left[1 - \frac{2\kappa}{\sqrt{4\kappa+1}} \ln \frac{\sqrt{4\kappa+1} + 1}{\sqrt{4\kappa+1} - 1} \right]$$

Тогда с учетом (31) дифференциальное уравнение (69) примет вид

$$(71) \quad a_s \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}$$

Уравнение (71) имеет автомодельное решение

$$(72) \quad \bar{y} = C_1 \operatorname{erf} \lambda_0 + C_2, \quad \lambda_0 = x / 2\sqrt{a_s t}$$

Коэффициенты интегрирования $C_{1,2}$ находятся из условий (25)

$$(73) \quad C_1 = \frac{1}{\operatorname{erf} \lambda_{02} - \operatorname{erf} \lambda_{01}}, \quad C_2 = - \frac{\operatorname{erf} \lambda_{01}}{\operatorname{erf} \lambda_{02} - \operatorname{erf} \lambda_{01}}$$

$$(74) \quad \lambda_{01,2} = l_{1,2}(t) / 2\sqrt{a_s t}$$

Подставляя значения $C_{1,2}$ в (72), получим уравнение границы раздела

$$(75) \quad \bar{y} = \frac{\operatorname{erf} \lambda_0 - \operatorname{erf} \lambda_{01}}{\operatorname{erf} \lambda_{02} - \operatorname{erf} \lambda_{01}}$$

Параметры λ и λ_0 связаны соотношением

$$(76) \quad \lambda_0 = \lambda \theta_1, \quad \theta_1 = \sqrt{a/a_s}, \quad \lambda = x / 2\sqrt{a t}$$

где a — пьезопроводность, a_s определяется по формуле (70).

Полученные коэффициенты A_{1-3} , B_{1-3} зависят от производных $\bar{y}'(\lambda_1)$ и $\bar{y}'(\lambda_2)$, поэтому найдем из (76) эти производные

$$(77) \quad \bar{y}'(\lambda_1) = \frac{2\theta_1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\lambda_{01}^2}}{\operatorname{erf} \lambda_{02} - \operatorname{erf} \lambda_{01}}$$

$$(78) \quad \bar{y}'(\lambda_2) = \frac{2\theta_1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\lambda_{02}^2}}{\operatorname{erf} \lambda_{02} - \operatorname{erf} \lambda_{01}}, \quad \lambda_{01,2} = \theta_1 \lambda_{1,2}$$

Для определения $\lambda_{1,2}$ используются кинематические условия (12). Подставляя в них значения $P_{1,2}$ и $l_{1,2}$ из (59), (60) и (74), получим систему трансцендентных уравнений для определения $\lambda_{1,2}$

$$(79) \quad \lambda_1 = - \frac{k}{2an_0\mu} \left[A_2 e^{-\lambda_1^2} + \frac{2\Delta\gamma t \theta_1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\lambda_{01}^2}}{\operatorname{erf} \lambda_{02} - \operatorname{erf} \lambda_{01}} \right]$$

$$(80) \quad \lambda_2 = - \frac{k}{2an_0\mu} \left[A_2 e^{-\lambda_2^2} - \frac{2\Delta\gamma t \theta_1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\lambda_{02}^2}}{\operatorname{erf} \lambda_{02} - \operatorname{erf} \lambda_{01}} \right]$$

Здесь A_2 определяется выражением (64).

Длина границы раздела l будет

$$(81) \quad l = 2(\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{a t}$$

где $\lambda_{1,2}$ находятся из (79) и (80).

Расход галереи (односторонний)

$$(82) \quad q = - \frac{km}{\mu} \frac{\partial p_1(0, t)}{\partial x}$$

Подставляя в (82) значение p_1 из (61), получим

$$(83) \quad q = - \frac{km}{\mu \sqrt{\lambda at}} A_1$$

где A_1 выражается по (63).

В [5] принимается, что расход галереи

$$(84) \quad q = Q_0 m / \sqrt{Dt}$$

где Q_0 считается заданной постоянной величиной. Далее вводится параметр

$$(85) \quad a^* = Q_0 / n_0 D$$

входящий в расчетные формулы для галереи.

Сопоставление (84) с (50), где A_1 определяется по (16), показывает, что

$$(86) \quad Q_0 = \frac{k}{\mu} \frac{p_0 - p_e - 0.5m\Delta\gamma}{2(\lambda_1 + 1/\theta)}, \quad \theta = \sqrt{\frac{D}{a}}$$

$$(87) \quad a^* = \frac{k}{n_0 \mu D} \frac{p_0 - p_e - 0.5m\Delta\gamma}{2(\lambda_1 + 1/\theta)}$$

Здесь a — преезопроводность пласта.

Из (86) и (87) видно, что величина a^* является функцией от давлений p_0 и p_e , а также от параметров $\Delta\gamma$, a , k , m .

Отсюда следует, что решение [5, 6] соответствует забойному давлению $p_0 = \text{const}$. Поэтому для произвольно заданной величины Q_0 из (86) можно найти соответствующее ей постоянное забойное давление на галерее p_0 и обратно.

Таким образом только при полном рассмотрении задачи, включающем в себя изучение поля давлений во всех трех зонах, можно определить дебит при заданном забойном давлении p_0 или давление при заданной величине дебита q .

Результаты, изложенные в этой работе, отличаются от ранее предлагавшихся решений данной задачи тем, что здесь рассматривается упругий режим фильтрации. В работах же [2-3] режим фильтрации считается жестким. Кроме того, в этих работах дебит галереи принимается заданной функцией времени: в [5, 6] он обратно пропорционален \sqrt{t} , а в [7] и [8] постоянен. Так как при жестком режиме фильтрации дебит во всех сечениях одинаков, то на бесконечности он также оказывается заданным. Кроме того, при жестком режиме фильтрации давление в зонах I и III является линейной функцией координаты x , и поэтому на бесконечности оно оказывается бесконечно большим, т. е. условие ограниченности давления на бесконечности не удовлетворяется. Оно удовлетворяется лишь при упругом режиме фильтрации, хотя бы только в области вытесняемой жидкости (зона III).

При определении формы и положения границы раздела $\bar{y} = \bar{y}(x, t)$ в работах [2-4] решается нелинейное дифференциальное уравнение границы раздела. При этом для дебита, обратно пропорционального \sqrt{t} , получается обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующее автомодельному решению задачи.

В [6] на ЭВМ выполнено численное интегрирование этого уравнения.

В этом решении нелинейного уравнения точки пересечения границы раздела с кровлей и подошвой пласта движутся с конечной скоростью (аналогично тому, как это имеет место для решений нелинейного уравнения Буссинеска).

В [7] конечная скорость движения этих точек получена для дебита $q = \text{const}$, но при условии, что производная $u_x'' = 0$, вязкости обеих жидкостей принимаются одинаковыми, а пласт — горизонтальным.

В работах [7, 8] задача решается при $q = \text{const}$, причем распределение давления в зонах I, 2, 3 вообще не определяется, и, таким образом, остается неясным, какому же распределению напора соответствуют найденные форма и положение границы раздела нагнетаемой и вытесняемой жидкостей.

В работе [8] передний фронт границы раздела получается неподвижным и находящимся в начале координат, а задний фронт ее находится на бесконечности, а поэтому длина границы раздела оказывается бесконечно большой. Таким образом, получается, что граница раздела при сколь угодно малых, но конечных временах, занимает всю область фильтрации, а потому скорость перемещения границы раз-

дела вдоль подошвы пласта оказывается бесконечно большой, в то время как она должна быть конечной. Поэтому для определения физически реальной длины границы раздела авторы работы [8] принимают, что передний фронт нагнетаемой жидкости находится в сечении, где ордината границы раздела составляет 0.01 и 0.1 полной мощности пласта ($\bar{y}=y/m=0.01$ и 0.1).

Задний фронт нагнетаемой жидкости принимается в сечении, где ордината границы раздела равна 0.90 и 0.99 полной мощности пласта ($\bar{y}=0.90$ и 0.99).

Тогда согласно [8] при $\bar{y}=0.01$ и 0.99 коэффициент $\eta=4.0$, а при $\bar{y}=0.1$ и 0.9 коэффициент $\eta=2.2$. Оба этих значения существенно отличаются, как от вычисленных выше ($\eta=1.53-1.78$), так и от экспериментальных данных ($\eta=1.57-1.60$).

Интересно отметить, что при $\Delta y=0$ уравнение (79) совпадает с точным решением задачи, т. е. без гипотезы о предельной анизотропии пласта [9], если принять $\mu_1=\mu_2$ и $a_1 \rightarrow \infty$.

Поступила 22 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Г. К. Применение модели предельно-анизотропных грунтов для оценки решения некоторых краевых задач о движении потока грунтовых вод по водопору. Инж. сб., 1953, т. 15.
2. Чарный И. А. Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах. Изв. АН СССР, ОН, 1954, № 4.
3. Чарный И. А. Движение границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, ОН, Энергетика и автоматика, 1959, № 3.
4. Чарный И. А. Подземная гидродинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
5. Пирвердян А. М. О движении подошвенной воды в слабо наклонных пластах. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.
6. Алихашкин Я. Н. Численное интегрирование уравнений автомодельного движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, № 15.
7. Шестаков В. М. Расчет движения границы раздела двух несмешивающихся жидкостей при фильтрации в горизонтальном напорном потоке. Научн. сообщ. ВОДГЕО, Водоснабжение, 1960.
8. Бочевер Ф. М., Орадовская А. Е. Приближенный метод определения границы раздела между подземными водами разного состава. Разведка и охрана недр, 1971, № 11.
9. Веригин Н. Н. Нагнетание вязких растворов в горные породы в целях повышения прочности и водопроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОН, 1952, № 5.

УДК 532.546 : 628.367

О ПРИТОКЕ ВОДЫ К ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ СИСТЕМАТИЧЕСКОМУ ДРЕНАЖУ В ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

А. Д. КОРОСТЕЛЕВ, А. Ж. МУФТАХОВ

(Астрахань)

Применительно к системе мелиорации рисовых полей рассматриваются два случая установившейся фильтрации грунтовых вод к горизонтальному систематическому дренажу в водоносных пластах со свободной поверхностью, причем дрены заменяются горизонтальными дренажными щелями Жуковского. Задачи решаются методом конформных отображений с использованием комплексного потенциала течения и функции Жуковского. Приводятся характеристические функции, уравнения депрессионных поверхностей и выражения для фильтрационного расхода. В силу симметрии течения исследуется приток грунтовых вод к одной дренажной щели.

1. Рассмотрим горизонтальную дренажную щель в водоносном пласте неограниченной мощности, границы которого M_5M_6 и M_3M_4 непроницаемые (фиг. 1). Приток воды к дрене происходит от контура M_6M_1 с постоянным напором, глубиной воды на контуре питания и в дрене пренебрегаем. Для решения задачи воспользуемся методом конформных отображений [1]. Отсчет напоров будем производить от линии M_6M_1 , линию тока M_1M_2 примем за нулевую. Тогда область приведенного комплексного потенциала течения

$$(1.1) \quad \omega_0 = \omega/k = \varphi_0 + i\psi_0$$