

Проводя аналогичные операции с уравнением (3) в области 2, будем иметь

$$(8) \quad \int_0^{-\infty} (uw)_C dn - \int_0^{-\infty} (uw)_D dn + \int_D^C (Vw)_{n \rightarrow -\infty} ds = - \int_D^C \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{n=0} ds$$

В силу циклического характера рассматриваемого течения из (8) и (7) следует:

$$w^0 \int V|_{n \rightarrow -\infty} ds = - \oint \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{n=0} ds$$

Так как масса жидкости в рециркуляционной зоне сохраняется, то

$$\oint V|_{n \rightarrow -\infty} ds = 0$$

Таким образом, величина w^0 , от значения которой зависит решение уравнения (3) должна быть такой, чтобы имело место

$$(9) \quad \oint \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{n=0} ds = 0$$

Условие (9) имеет ясный физический смысл: количество движения в направлении оси z , которое теряет жидкость в пристеночном слое 2, равно количеству движения, которое она приобретает в слое смешения 1.

Поступила 20 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Der III. Internat. Math. Congr. Heidelberg, 1904.
2. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, p. 2.
3. Нейланд В. Я., Сычев В. В. К теории течений в стационарных срывных зонах. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.

УДК 532.546

О ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫТЕСНЕНИЯ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ

Б. И. ЛЕВИ, Ю. В. СУРКОВ

(Уфа)

Рассмотрена двумерная задача о вытеснении нефти водой в слоистых пластах с учетом капиллярных перетоков между слоями. Предложен и реализован на ЭВМ дифференциально-разностный метод расчета процесса. Приводятся и обсуждаются некоторые результаты выполненных вычислений.

1. Пренебрегая гравитационными эффектами, систему уравнений, описывающую двухфазную фильтрацию несжимаемых несмешивающихся жидкостей в несжимаемой гидрофильной пористой среде, запишем в следующем виде:

$$(1.1) \quad \operatorname{div} V_i = -m \frac{\partial S_i}{\partial t}, \quad V_i = -\frac{kk_i}{\mu_i} \operatorname{grad} p_i$$

$$P_1 - P_2 = P_k = \sigma \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} f(S)$$

Здесь V_i — скорость фильтрации, m — пористость, S_i — насыщенность, k — абсолютная проницаемость, k_i — относительная фазовая проницаемость, μ_i — вязкость, P_i — давление, P_k — капиллярное давление, σ — поверхностное натяжение на границе раздела фаз, θ — краевой угол смачивания, $f(s)$ — функция Леверетта, S — нефтенасыщенность (индекс $i=1$ относится к несмачивающей, а $i=2$ — к смачивающей фазе).

После преобразований и введения безразмерных координат систему (1.1) сведем к двум уравнениям

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) + \Lambda \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \Lambda \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Fk \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) + \Lambda \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Fk \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \Lambda \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial S}{\partial \tau}$$

$$\left(\xi = \frac{x}{L}, \quad \zeta = \frac{y}{H}, \quad k = k^0 (k_1 + \mu k_2), \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad k^0 = \frac{k}{\langle k \rangle}, \right.$$

$$\Lambda = \left(\frac{L}{H} \right)^2, \quad \Phi = k^0 k_{1j}(S) B, \quad B = \frac{H \sigma \cos \theta \sqrt{\langle k \rangle m}}{q \mu_1 L},$$

$$P = \frac{P_2 \langle k \rangle H}{q \mu_1 L}, \quad F = \frac{k_1}{k_1 + \mu k_2}, \quad \varphi = \frac{S}{\sqrt{k^0}}, \quad \tau = \frac{qt}{mLH}$$

Здесь L, H — длина и мощность пласта, q — характерное значение дебита нагнетаемой в пласт воды, $\langle k \rangle$ — средняя проницаемость пласта.

В начальный момент времени ($\tau=0$) задаются распределения по пласту давления и насыщенности.

На входе в пласт ($\xi=0$) задается дебит q нагнетаемой воды или давление, на выходе — постоянное или переменное во времени давление. Условия для насыщенности получим, постулируя на входе и выходе пласта отсутствие концевых эффектов [1].

Кровля и подошва пласта считаются непроницаемыми.

Разобьем пласт на прямоугольные ячейки (i, j) со сторонами h_1 и h_2 ($i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, M; h_1=1/N, h_2=1/M$). Вводя средние по ячейке давление $P_{i,j}$ и насыщенность $S_{i,j}$, в качестве конечно-разностного аналога уравнения (1.2) возьмем

$$(1.4) \quad a_{i+1/2,j} \varepsilon P_{i+1,j} - a_{i-1/2,j} \varepsilon P_{i,j} + a_{i,j+1/2} \varepsilon P_{j+1,i} - a_{i,j-1/2} \varepsilon P_{j,i} + D = 0$$

Здесь

$$a_{i \pm 1/2, j} = \frac{2}{h_1^2} \frac{k_{i,j} k_{i \pm 1, j}}{k_{i,j} + k_{i \pm 1, j}}, \quad a_{i, j \pm 1/2} = \frac{2\Lambda}{h_2^2} \frac{k_{i,j} k_{i, j \pm 1}}{k_{i,j} + k_{i, j \pm 1}}$$

$$b_{i \pm 1/2, j} = \frac{2}{h_1^2} \frac{\Phi_{i,j} \Phi_{i \pm 1, j}}{\Phi_{i,j} + \Phi_{i \pm 1, j}}, \quad b_{i, j \pm 1/2} = \frac{2\Lambda}{h_2^2} \frac{\Phi_{i,j} \Phi_{i, j \pm 1}}{\Phi_{i,j} + \Phi_{i, j \pm 1}}$$

$$D = b_{i+1/2,j} \varepsilon \Phi_{i+1,j} - b_{i-1/2,j} \varepsilon \Phi_{i,j} + b_{i,j+1/2} \varepsilon \Phi_{j+1,i} - b_{i,j-1/2} \varepsilon \Phi_{j,i}$$

$$k_{i,j} = k(s_{i,j}), \quad \Phi_{i,j} = \Phi(s_{i,j})$$

$$\varepsilon P_{i,j} = P_{i,j} - P_{i-1,j}, \quad \varepsilon P_{j,i} = P_{j,i} - P_{j,i-1}$$

Для определения насыщенности уравнение (1.3) аппроксимируем следующим дифференциально-разностным уравнением:

$$(1.5) \quad \frac{dS_{i,j}}{d\tau} = F_{i+1/2,j} a_{i+1/2,j} \varepsilon P_{i+1,j} - F_{i-1/2,j} a_{i-1/2,j} \varepsilon P_{i,j} +$$

$$+ F_{i,j+1/2} a_{i,j+1/2} \varepsilon P_{j+1,i} - F_{i,j-1/2} a_{i,j-1/2} \varepsilon P_{j,i} + b_{i+1/2,j} \varepsilon \Phi_{i+1,j} -$$

$$- b_{i-1/2,j} \varepsilon \Phi_{i,j} + b_{i,j+1/2} \varepsilon \Phi_{j+1,i} - b_{i,j-1/2} \varepsilon \Phi_{j,i}$$

Здесь

$$F_{i \pm 1/2, j} = \begin{cases} F_{i,j} & \text{при } P_{i \pm 1, j} \leq P_{i,j} \\ F_{i \pm 1, j} & \text{при } P_{i \pm 1, j} > P_{i,j} \end{cases}, \quad F_{i, j \pm 1} = \begin{cases} F_{i,j} & \text{при } P_{i, j \pm 1} \leq P_{i,j} \\ F_{i, j \pm 1} & \text{при } P_{i, j \pm 1} > P_{i,j} \end{cases}$$

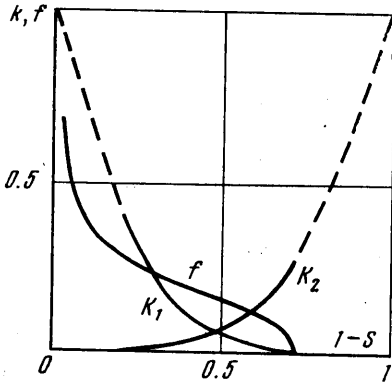
В граничных ячейках соотношения (4) и (5) записываются с учетом соответствующих краевых условий.

Нетрудно показать, что при определенных ограничениях на коэффициенты системы (2), (3) конечно-разностное уравнение (4) аппроксимирует дифференциальное уравнение (2) со вторым, а дифференциально-разностное уравнение (5) аппроксимирует (3) с первым порядком аппроксимации по пространственным координатам.

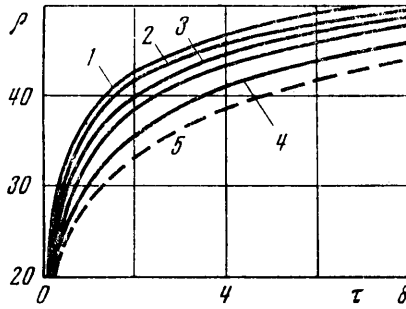
Решение задачи на каждом временном слое можно осуществить в следующей последовательности. Используя значения насыщенности с предыдущего временного слоя, вычисляем коэффициенты разностного уравнения (4) и решаем одним из из-

вестных методов полученную систему NM линейных алгебраических уравнений (4). Подставляя затем в (5) вычисленные значения давления и коэффициентов a и b , численно интегрируем систему дифференциальных уравнений (5) и определяем насыщенность на новом временном слое.

В предложенном методе решения системы (2), (3) для расчета насыщенности используются значения давления с предыдущего временного слоя. Такой подход часто применяется в численных алгоритмах решения задач фильтрации несжимаемых жидкостей, для которых характерны малые изменения давления по времени [2].



Фиг. 1



Фиг. 2

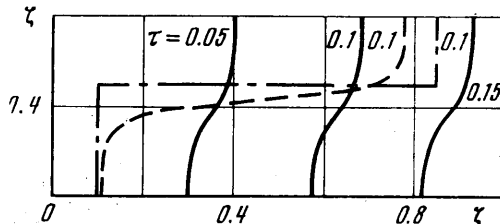
Заметим, что в случае задания на входе в пласт дебита нагнетаемой воды q на каждом временном слое производится его распределение по пропласткам в соответствии с их фильтрационными сопротивлениями [3].

2. По предложенному алгоритму на ЭВМ «Минск-32» были проведены расчеты вытеснения нефти водой в двухслойном пласте. Система алгебраических уравнений (4) решалась методом матричной прогонки, а система дифференциальных уравнений (5) — стандартным методом Рунге — Кутты четвертого порядка [4]. В расчетах использовались относительные фазовые проницаемости для нефти и воды $k_1(s)$ и $k_2(s)$ и функция Леверетта $f(s)$, изображенные на фиг. 1. Численные решения контролировались с помощью балансовых соотношений [1], точность решений проверялась также по принципу Рунге [4] повторным расчетом отдельных вариантов с уменьшенными вдвое шагами разностной сетки.

Выбор шага разностной сетки по временной координате определялся условиями устойчивости и точности численных решений. Расчеты показали, что необходимо начинать вычисления с шагом, не превышающим 0.001. В последующие моменты времени шаг многократно удваивался. При этом для расчета одного варианта требуется ~ 2 час. машинного времени.

Приведем некоторые результаты расчетов. На фиг. 2 представлены выраженные в процентах от начальных запасов зависимости отбора нефти ρ от безразмерного времени τ в двухслойном пласте, пропластки которого имеют равные мощности и отличающиеся в 10 раз абсолютные проницаемости ($L=500$ м, $H=4$ м, $\mu=20$). Кривыми 1, 2, 3 и 4 изображены отборы при $B=15 \cdot 10^{-4}$, $7,5 \cdot 10^{-4}$, $3,75 \cdot 10^{-4}$ и $1,875 \cdot 10^{-4}$ (если зафиксировать значения параметров $\sigma \cos \theta = 30$ дин/см, $m=0,25$ и $\langle k \rangle = 1$ дарси, то принятые значения параметра B соответствуют скоростям фильтрации, равным 10^{-4} , $2 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-4}$ и $8 \cdot 10^{-4}$ см/сек). Пунктиром изображен отбор нефти, рассчитанный при пренебрежении капиллярными эффектами и при учете только гидродинамических перетоков между слоями.

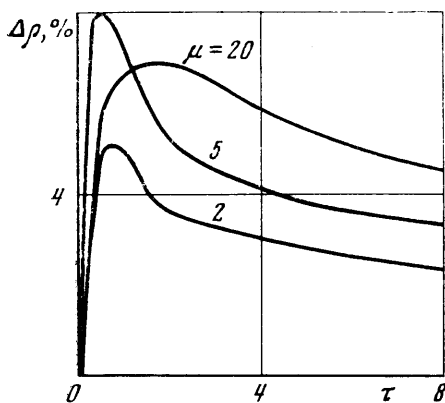
Увеличение отбора нефти при действии капиллярных сил вызвано более полной выработкой низкопроницаемого слоя за счет капиллярных перетоков нефти из него в более проницаемый прослой. С ростом скорости вытеснения ухудшаются условия для проявления капиллярных эффектов, и перетоки между слоями уменьшаются.



Фиг. 3

Интенсивность капиллярных перетоков между слоями существенно снижается с увеличением мощности пласта. Так, при $H=8$ м и скорости фильтрации $8 \cdot 10^{-4}$ см/сек отбор нефти (кривая 5 на фиг. 2) заметно ниже, чем в случае $H=4$ м.

Расчеты подтвердили экспериментально установленный эффект выравнивания вследствие действия капиллярных сил водонефтяного контакта и стабилизации его продвижения в слоистых пластах [5]. Фиг. 3 отражает динамику движения фронта вытеснения в двухслойном пласте при скорости фильтрации $1.6 \cdot 10^{-4}$ см/сек и приведенных выше значениях остальных параметров (сплошные линии). Для сравнения на этой же фигуре приведены положения фронта вытеснения в момент времени $\tau=0.1$ при отсутствии капиллярных перетоков между слоями, но при наличии гидродинамической связи между ними (пунктирная линия), и для пласта, состоящего из двух изолированных прослоев (штрихпунктирная линия).



Фиг. 4

Влияние вязкости нефти на интенсивность капиллярных перетоков иллюстрирует фиг. 4, на которой изображена зависимость от τ разности между отборами нефти, рассчитанными при $B=7.5 \cdot 10^{-4}$ и 0 для нескольких значений соотношения вязкостей фаз. Зависимость интенсивности капиллярных перетоков от вязкости нефти является сложной: с одной стороны, для

вязких нефтей ухудшаются условия для капиллярных перетоков между слоями из-за снижения скорости капиллярной пропитки, с другой стороны, увеличение вязкости усиливает неравномерность продвижения фронта вытеснения в пропластах, что способствует проявлению капиллярных эффектов на большем участке пласта. Этим и объясняется немонотонный характер кривых, представленных на фиг. 4.

Сравнение расчетов вытеснения в слоистом и однородном пластах показало, что отбор нефти из однородного пласта выше, чем из слоистого с той же средней проницаемостью. Так, отбор из однородного пласта с проницаемостью 1 *дарси* в момент времени $\tau=1$ составляет 40%, а из двухслойного с соотношением проницаемостей прослоев, равным 10, и теми же значениями остальных параметров ($L=500$ м, $H=4$ м, $\mu=20$, $\sigma \cos \theta=30$ *дин/см*, $m=0.25$) — 35%.

Существующие методики расчетов вытеснения нефти водой в неоднородных пластах основаны на модели слоисто-неоднородного пласта, представляемого системой несообщающихся между собой прослоев. Это в ряде случаев искажает истинную картину, занижая отбор из неоднородного пласта. Так, расчеты показали, что пренебрежение гидродинамическими перетоками в двухслойном пласте ($L=500$ м, $H=4$ м, $\mu=20$, $k_1/k_2=10$, $m=0.25$, $\sigma \cos \theta=30$ *дин/см*, $B=15 \cdot 10^{-4}$) приводит к занижению отбора на момент времени $\tau=1.5$ на 1.5%, а пренебрежение капиллярными перетоками занижает отбор еще на 9.5%.

Таким образом, проведенные расчеты показали, что в слоистых пластах, имеющих мощность менее 8 м и степень неоднородности $k_1/k_2 \geq 5$, при значениях параметра $B \geq 2 \cdot 10^{-4}$ капиллярные силы оказывают существенное влияние на динамику вытеснения нефти водой. Поэтому при приведенных значениях этих параметров капиллярные эффекты должны учитываться в гидродинамических расчетах соответствующих процессов.

Поступила 14 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Швидлер М. И., Леви Б. И. Одномерная фильтрация несмешивающихся жидкостей. М., «Недра», 1970.
2. Poolen H. K. van, Bizel H. C., Jargon J. R. Reservoir modeling. II. Comparison of multiphase models. Oil and Gas Journal, 1970, vol. 68, No. 30.
3. Леви Б. И., Станкевич Н. А. Методика расчета процесса вытеснения нефти из многослойных пластов оторочкой водорастворимых полимеров. Нефтяное хозяйство, 1971, № 10.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1962.
5. Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М., Гостоптехиздат, 1962.