Таким образом, характер свободной поверхности не зависит от положения точки отрыва и, вообще говоря, значительно отличается от того, который имеет место в решении задачи без учета капиллярных сил. Интересно, что силы вязкости и тяжести не меняют описанного характера свободной поверхности. При малых числах We условие $p=p_k$ будет приближенно выполняться почти всюду на свободной поверхности, однако и в этом случае нельзя воспользоваться условием Бриллуэна — Вилля для определения точек схода струй. Вопрос о том, каким именно условием следует для этого пользоваться, остается пока открытым.

Поступила 21 IV 1972

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
2. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
3. *Эпштейн Л. А.* Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов. Л., «Судостроение», 1970.

---

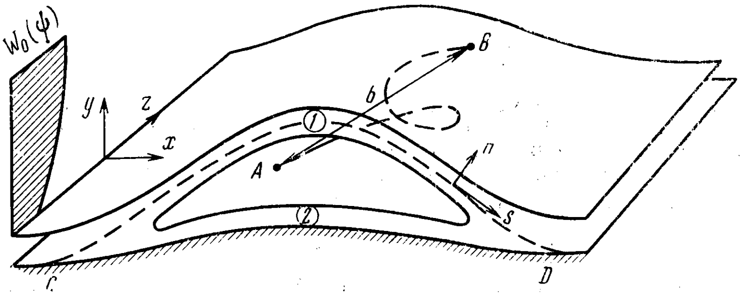
УДК 532.51—3

# К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В СТАЦИОНАРНЫХ СРЫВНЫХ ЗОНАХ

А. В. ЗУБЦОВ

(*Москва*)

Основной результат в определении асимптотического состояния потока в замкнутой зоне отрыва при $\mathrm{Re}\to\infty$ принадлежит Прандтлю [1] и Бэтчелору [2]. Они показали, что при $\mathrm{Re}\gg 1$ плоское течение несжимаемой жидкости в рециркуляционной зоне и вне ее описывается невязкими уравнениями движения и только лишь вблизи твердых границ и в зоне смешения необходимо учитывать вязкость. Ими было показано, что в пределе $\mathrm{Re}\to\infty$ зона смешения вырождается в линию контактного разрыва, а течение в рециркуляционной зоне является вихревым, причем завихренность $\omega$ есть величина постоянная. Получена формула для определения завихренности в невязкой области возвратного течения [3]. Здесь приводится развитие результатов, полученных в работах [1–3], на один случай пространственного течения несжимаемой жидкости.




Пусть $x$, $y$, $z$ — ортогональная система координат, $u$, $v$, $w$ — скорости, направленные соответственно по осям $x$, $y$, $z$. Исследуем течение, все характеристики которого не зависят от координаты $z$. В этом случае уравнения Навье — Стокса разделяются и течение жидкости в плоскости $xy$ не зависит от ее движения по направлению оси $z$. Пусть в рассматриваемом течении образуется замкнутая в плоскости $xy$ область возвратных течений. Будем полагать, что в плоскости $xy$ продольный и поперечный размеры рециркуляционной области являются величинами порядка $l_0$, а сама рециркуляционная зона ограничена частью обтекаемой поверхности и зоной смешения (фигура).

За число Рейнольдса примем величину $V_0 l_0 \nu_0^{-1}$, где $V_0$ — скорость в плоскости $xy$, характерная для области рециркуляционного течения, $\nu_0$ — кинематический коэффициент вязкости. Так как течение в плоскости $xy$ описывается уравнениями плоского течения, то при $\mathrm{Re}\to\infty$ для него будут справедливы все результаты, полученные в работах [1-3]. В частности, при $\mathrm{Re}\to\infty$ проекция вихря $\omega_z$ постоянна внутри рециркуляционной зоны.

Очевидно, что во всей области, за исключением пристеночной зоны и зоны смешения, при $\mathrm{Re}\to\infty$ функция $w$ удовлетворяет невязкому уравнению

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

решение которого $w=w(\psi)$, где $\psi$ – функция тока, определяющая течение в плоскости $xy$. Если $w_0(\psi)$ – профиль скорости $w$ в бесконечно удаленной точке, то решение для $w$ вне рециркуляционной зоны выписывается в явном виде $w=w_0(\psi)$.

Остается выяснить, как определить величину $w$ внутри зоны возвратных течений. Докажем, что в трехмерном потоке несжимаемой жидкости, характеристики которого не зависят от координаты $z$, величина скорости $w$ внутри рециркуляционной зоны при $\mathrm{Re}\to\infty$ постоянна.

Стационарные уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости имеют вид

$$\mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}-\nabla H=\mathrm{Re}^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{\omega}),\qquad H=\rho^{-1}P+{}^1/_2|\mathbf{V}|^2 \tag{1}$$

где $\mathbf{V}$ – безразмерный вектор скорости, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор завихренности, $\nabla$ – оператор Гамильтона. Возьмем интеграл от обеих частей уравнения (1) вдоль линии тока, лежащей внутри рециркуляционной зоны, от точки $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до точки $B(x_0,\ y_0,\ z_0+b)$. Интеграл от левой части (1) равен нулю, так как $\mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}\perp d\mathbf{S}$ и $H(x_0,y_0,z_0)=H(x_0,\ y_0,\ z_0+b)$. Следовательно, интеграл от правой части (1) также равен нулю

$$\int\limits_A^B(\nabla\times\boldsymbol{\omega})\,d\mathbf{s}=0 \tag{2}$$

Так как $\omega_z=\mathrm{const}$ при $\mathrm{Re}\to\infty$, то из (2) следует, что $\nabla^2w\cdot b=0$. Таким образом, величина $w$ является гармонической функцией переменных $x$, $y$. В силу равенства $w=w(\psi)$ скорость $w$ постоянна на контуре, ограничивающем рециркуляционную зону, следовательно, во всей этой зоне величина $w$ постоянна. Из полученного результата следует, что при $\mathrm{Re}\to\infty$ полная завихренность внутри рециркуляционной зоны постоянна и имеет составляющую только в направлении оси $z$.

Через $w^\circ$ обозначим значение скорости $w$ внутри невязкой рециркуляционной зоны. Найдем условие, из которого можно определить величину $w^\circ$. Очевидно, что в зоне смешения *1* и в пристеночной зоне *2* (фигура) существенно влияние вязкости. Из обычных оценок теории пограничного слоя следует, что при $\mathrm{Re}\gg1$ течение жидкости в этих зонах удовлетворяет уравнениям Прандтля. Уравнение для скорости $w$ имеет вид

$$u\frac{\partial w}{\partial s}+V\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \tag{3}$$

где $s$, $N=n\mathrm{Re}^{-1/2}$ – независимые переменные, отсчитываемые вдоль нулевой линии тока и по нормали к ней, $u$, $v=V\cdot\mathrm{Re}^{-1/2}$ – составляющие вектора скорости, направленные соответственно по направлениям $s$ и $n$.

Граничные условия для $w$ в зонах *1* и *2* соответственно имеют вид

$$w\to w_0(0)\quad(n\to\infty),\qquad w\to w^\circ\quad(n\to-\infty) \tag{4}$$

$$w=0\quad(n=0),\qquad w\to w^\circ\quad(n\to-\infty) \tag{5}$$

В области 1, полностью включающей в себя внутреннюю часть слоя смешения $(n\leqslant0)$, возьмем интеграл от обеих частей уравнения (3) по координате $n$ от 0 до $-\infty$, имея в виду, что $V=0$ при $n=0$ и $\partial w/\partial n\to0$ при $n\to-\infty$

$$\int\limits_0^{-\infty}\frac{\partial(uw)}{\partial s}dn+Vw\Big|_{n\to-\infty}=-\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{n=0} \tag{6}$$

Интегрируя (6) по координате $s$ от точки $C$ до точки $Д$, получим

$$\int\limits_0^{-\infty}(uw)_D\,dn-\int\limits_0^{-\infty}(uw)_C\,dn+\int\limits_C^D(Vw)_{n\to-\infty}\,ds=-\int\limits_C^D\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{n=0}ds \tag{7}$$

Проводя аналогичные операции с уравнением (3) в области *2*, будем иметь

$$\int_0^{-\infty}(uw)_C\,dn-\int_0^{-\infty}(uw)_D\,dn+\int_D^C(Vw)_{n\to-\infty}\,ds=-\int_D^C\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{n=0}ds \tag{8}$$

В силу циклического характера рассматриваемого течения из (8) и (7) следует:

$$w^\circ\int V|_{n\to-\infty}\,ds=-\oint\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{n=0}ds$$

Так как масса жидкости в рециркуляционной зоне сохраняется, то

$$\oint V|_{n\to-\infty}ds=0$$

Таким образом, величина $w^\circ$, от значения которой зависит решение уравнения (3) должна быть такой, чтобы имело место

$$\oint\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{n=0}ds=0 \tag{9}$$

Условие (9) имеет ясный физический смысл: количество движения в направлении оси $z$, которое теряет жидкость в пристеночном слое *2*, равно количеству движения, которое она приобретает в слое смешения *1*.

Поступила 20 X 1971


ЛИТЕРАТУРА

1. *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Der III. Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 1904.
2. *Batchelor G. K.* On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, p. 2.
3. *Нейланд В. Я., Сычев В. В.* К теории течений в стационарных срывных зонах. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.


---

УДК 532.546

# О ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫТЕСНЕНИЯ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ


**Б. И. ЛЕВИ, Ю. В. СУРКОВ**

(*Уфа*)


**Рассмотрена двумерная задача о вытеснении нефти водой в слоистых пластах с учетом капиллярных перетоков между слоями. Предложен и реализован на ЭВМ дифференциально-разностный метод расчета процесса. Приводятся и обсуждаются некоторые результаты выполненных вычислений.**

**1. Пренебрегая гравитационными эффектами, систему уравнений, описывающую двухфазную фильтрацию несжимаемых несмешивающихся жидкостей в несжимаемой гидрофильной пористой среде, запишем в следующем виде:**

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_i=-m\frac{\partial S_i}{\partial t},\qquad \mathbf{V}_i=-\frac{kk_i}{\mu_i}\operatorname{grad}p_i \tag{1.1}$$

$$P_1-P_2=P_k=\sigma\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}\,f(S)$$

**Здесь $\mathbf{V}_i$ – скорость фильтрации, $m$ – пористость, $S_i$ – насыщенность, $k$ – абсолютная проницаемость, $k_i$ – относительная фазовая проницаемость, $\mu_i$ – вязкость, $P_i$ – давление, $P_k$ – капиллярное давление, $\sigma$ – поверхностное натяжение на границе раздела фаз, $\theta$ – краевой угол смачивания, $f(s)$ – функция Леверетта, $S$ – нефтенасыщенность (индекс $i=1$ относится к несмачивающей, а $i=2$ – к смачивающей фазе).**