

7. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
8. Тиме Н. С. Оценка спектра турбулентности в интервале диссипации по измерениям флуктуаций лазерного излучения. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана VIII, 1972, № 1.
9. Холмянский М. Э. Численное определение спектральной плотности случайного процесса с широким спектром. Электронно-вычислительная механика и программирование, вып. 4, М., «Статистика», 1971.
10. Келлер Б. С., Яглом А. М. О влиянии флуктуаций диссипации энергии на форму спектра турбулентности в крайней коротковолновой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
11. Гурвич А. С. О распределении вероятностей квадрата разности температур в двух точках турбулентного потока. Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 3.
12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., «Наука», 1967.
13. Кузьмин Г. А. Спектр турбулентности в области больших волновых чисел. ПМТФ, 1971, № 4.

УДК 532.526

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Л. Г. ШИШКИНА

(Ленинград)

Приводятся результаты численного решения двухпараметрического универсального уравнения ламинарного пограничного слоя при наличии непрерывного отсоса и вдува.

Универсальное уравнение плоского ламинарного пограничного слоя на проницаемой поверхности [1, 2] в двухпараметрическом приближении имеет вид

$$(1) \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{F+2f}{2B^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{B} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} =$$

$$= \frac{Ff}{B^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f \partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{F\lambda}{2B^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right)$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty$$

$$\Phi = \Phi_0(\eta) \quad \text{при} \quad f = \lambda = 0$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\eta = \frac{By}{\delta^{**}}, \quad \Phi = \frac{B(\psi - \psi_0)}{U\delta^{**}}, \quad f = \frac{dU}{dx} z^{**}, \quad \lambda = v_0 \sqrt{\frac{z^{**}}{\nu}}$$

$$z^{**} = \delta^{**2}/\nu, \quad F = 2[\zeta - (2+H)f - \lambda]$$

$$\zeta = B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0}, \quad H = \frac{1}{B} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\eta$$

причем x, y — продольная и поперечная координаты; ψ — функция тока, значение которой ψ_0 на поверхности соответствует скорости вдува или отсоса $v_0(x)$; $U(x)$ — скорость на внешней границе слоя; ν — кинематический коэффициент вязкости; δ^{**} — толщина потери импульса, выбранная в качестве линейного масштаба координаты y ; B — нормирующая константа, которая выбирается из условия совпадения уравнения (1) с известным уравнением Блазиуса при $f = \lambda = 0$

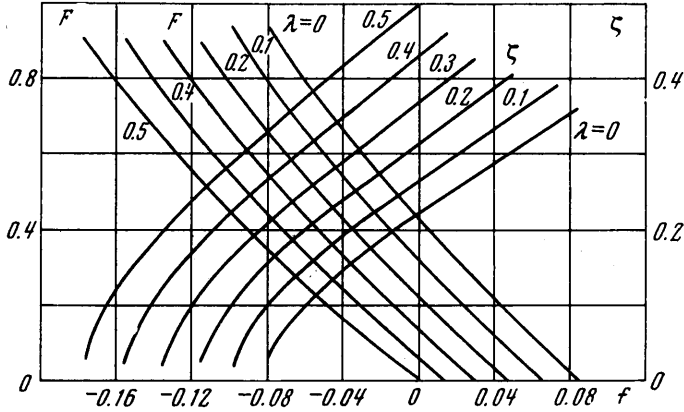
$$\Phi_0''' + \Phi_0 \Phi_0'' = 0, \quad 2B = F_0 = 2\zeta_0.$$

Уравнение (1), как известно [2], представляет собой уравнение двухпараметрического семейства безразмерных профилей скорости, пригодных для использования

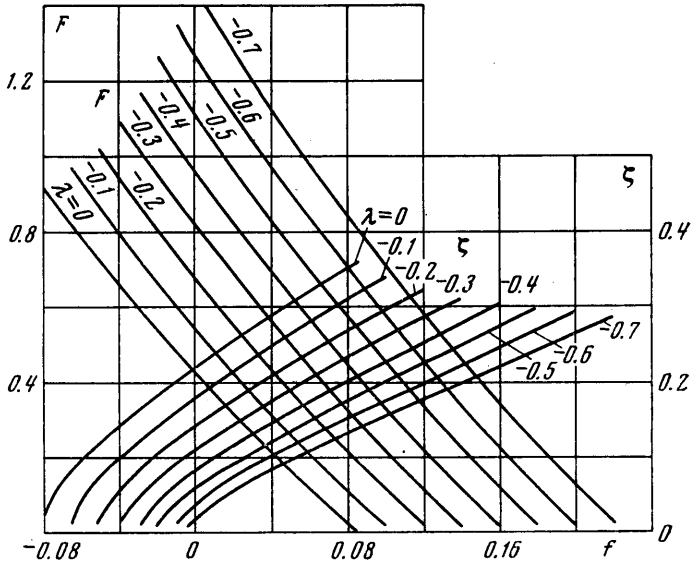
в сечениях пограничного слоя. Размещение профилей скорости по сечениям слоя зависит от значений этих параметров, характеризующих общую форму профилей (параметр f) и степень проницаемости поверхности (параметр λ) в конкретных сечениях пограничного слоя. Для осуществления этого размещения необходимо знание в каждом отдельном случае величины $\delta^{**}(x)$, определяемой как решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$(2) \quad dz^{**}/dx = F/U, \quad z^{**} = z_0^{**} \text{ при } x = x_0.$$

Для численного интегрирования уравнения (1) был применен метод конечных разностей. Предварительно в уравнении (1) осуществлялась замена $u = \partial\Phi/\partial\eta$, поз-



Фиг. 1

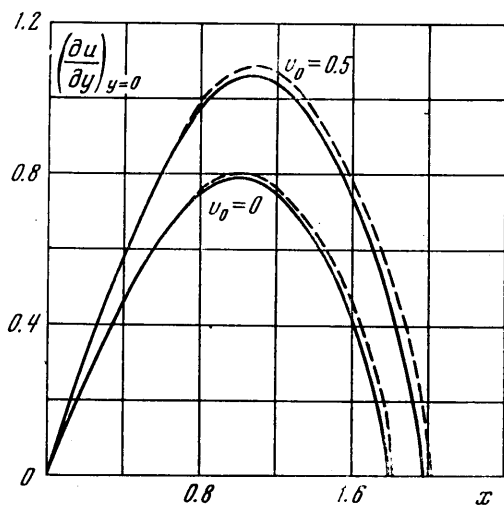


Фиг. 2

волившая снизить порядок уравнения, а производные по параметрам f и λ заменялись разностными аналогами по двухточечной схеме. Полученная система нелинейных уравнений второго порядка решалась методом прогонки с итерациями. Шаг в направлении переменных η , λ принимался постоянным и равным $\Delta\eta = 0.05$, $\Delta\lambda = 0.0125$. Шаг по переменной f был равен 0.005. Вблизи точек отрыва в области, где функция F близка к нулю, начальное значение переменной f определялось на предыдущем слое по λ из условия: $\zeta < \epsilon$ или $F < \epsilon$, где ϵ величина, сравнимая с $\Delta\lambda$.

В результате решения уравнения (1) были получены функции $\partial\Phi/\partial\eta$, определяющие безразмерные продольные профили скоростей u/U в пограничном слое, и основные характеристики пограничного слоя: F , ζ и H . Наибольший интерес представляют: функция F , удовлетворяющая уравнению (2), необходимая для расчета пограничного слоя в конкретных случаях задания внешнего потока, и безразмерный коэффициент трения ζ . На фиг. 1, 2 построены кривые зависимости функций F и ζ от параметра f для различных значений λ .

Как видно из приведенных результатов, параметр проницаемости λ влияет существенно на величину ζ и на значение параметра $f=f_s$, при котором происходит отрыв; при этом отсос значительно затягивает отрыв, а вдвух предвращает его.



Фиг. 3

Параметр λ оказывает также сильное влияние на зависимость $F(f)$, причем при всех значениях параметра λ графики $F(f)$ остаются близкими к прямым линиям.

Решение конкретной задачи сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (2) при заданных заранее распределениях скоростей $U(x)$ и $v_0(x)$. Принимая во внимание характер кривых $F(f, \lambda)$, была использована обычная в параметрических теориях линейная аппроксимация: $F(f, \lambda) = a(\lambda) - bf$, где $a(\lambda) = a(1 - 2\lambda)$, а константы a и b взяты в соответствии с решением Иглиша [3] для пластинки: $a = 0.44$; $b = 5.15$.

В качестве примера расчета рассмотрена задача о поперечном обтекании кругового цилиндра, в точной постановке решенная Террилом [4] для двух случаев задания v_0 : $v_0 = 0$ и 0.5 . На фиг. 3 приведены кривые безразмерного трения $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ для $v_0 = 0$ и 0.5 . Точное решение показано пунктиром. Для $v_0 = 0$ уравнение (1) дает известное однопараметрическое решение [5], результаты которого обсуждены в работе [2]. При осуществлении отсоса ($v_0 = 0.5$) происходит возрастание величины $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ и вместе с тем абсолютной погрешности в ее определении. Но, как и в первом случае, эта погрешность определяется недостаточно точным при обтекании цилиндра однопараметрическим представлением распределения скоростей в сечениях пограничного слоя.

Поступила 17 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Chan Y. Y. Loitsianstii's method for boundary layers with suction and injection. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 3.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
3. Iglisch R. Exakte Berechnung der laminaren Reibungsschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung. NACA RM 1205, 1949.
4. Terril R. M. Laminar boundary - layer flow near separation with and without suction. Philos. Trans., A 253, 1960.
5. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, Т. 29, вып. 1.